财经易文

请访问本书教学网页 http://www.mhhe.com/hillier2e

管理科学篇

第2版

# 数据、模型与决策

# Introduction to Management Science

## 运用电子表格建模与案例研究

[美] 弗雷德里克·S·希利尔
马克·S·希利尔 著

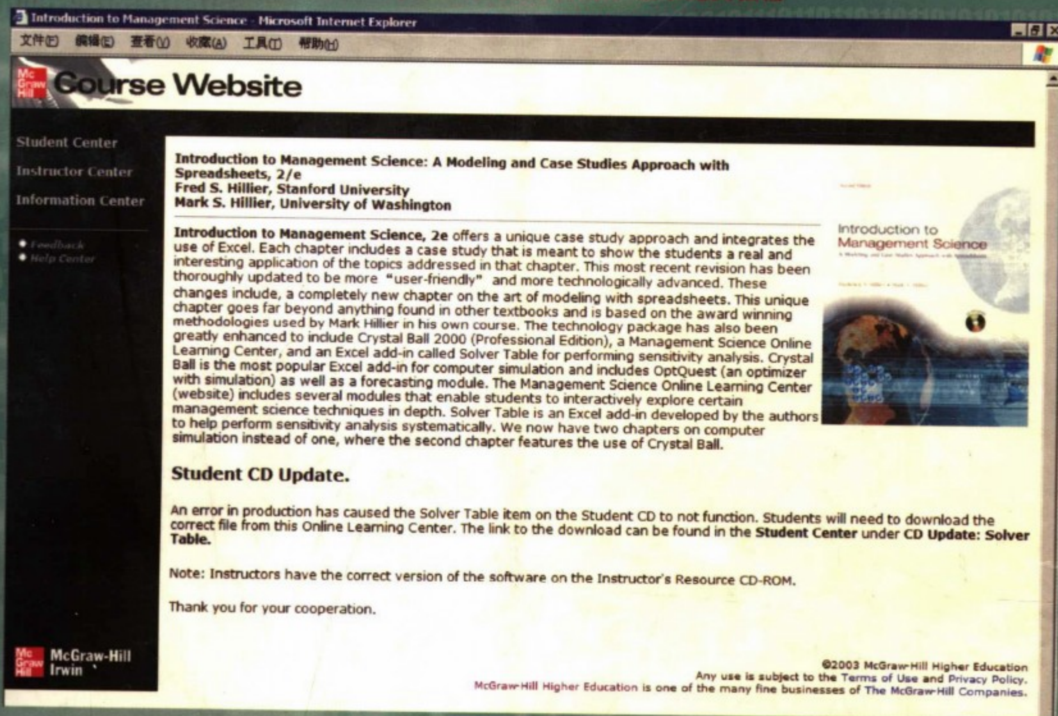
任建标 译

中国财政经济出版社

财经易文

请访问本书网页：
http://www.mhhe.com/hillier2e

使用本书作教材的教师请致电或发电子邮件与我们联系，索取免费教辅




本书是一部以案例为导向的管理科学的入门教材，与其他管理科学的教材的不同之处在于，本书不要求学生拥有深厚的数学功底，而是运用功能强大的Excel软件来完成模型的建立、求解最优化方案，因此非常适合MBA、管理学院的本科生及研究生、在职管理人员的学习和参考。本书详细介绍了各种模型及其在Excel软件中的实现方法，以及各种专业的分析工具，引入了大量实际案例，使学生可以轻松地掌握本门课程的知识，为解决工作中的实际问题打下良好的基础。

本书的新版（第2版）除了保留上一版的特色外，对全书的结构进行了较大的调整，更加有利于教学。另外，新版中还引入了全新的分析工具：Crystal Ball 2000、OptQuest、CB Predictor等，加入了全新的"电子表格建模艺术"一章，对"整数规划"和"非线性规划"的内容进行了扩充，可以使学生更加轻松地掌握管理科学的知识。


ISBN 7-5005-6953-X
9 787500 569534
ISBN 7-5005-6953-X/F·6082
定价：75.00元



财经易文
销售热线：(010) 88191017
网址：www.ewinbook.com
电子邮件：webmaster@ewinbook.com

管理科学篇

# 数据、模型与决策

## 运用电子表格建模与案例研究

# Introduction to Management Science

[美] 弗雷德里克·S·希利尔
马克·S·希利尔 ■著
任建标 ■译

中国财政经济出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

数据、模型与决策：运用电子表格建模与案例研究：第2版/（美）希利尔等著；任建标译．—北京：中国财政经济出版社，2004.1

书名原文：Introduction to Management Science

ISBN 7－5005－6953－X

Ⅰ．数… Ⅱ．①希… ②任… Ⅲ．电子表格系统，Excel－应用－管理－决策模型 Ⅳ．C934

**中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第116656号**

**著作权合同登记号：图字01－2003－6072号**

Frederick S. Hillier, Mark S. Hillier

**Introduction to Management Science**

ISBN: 0－07－249368－2

Copyright © 2003 by The McGraw-Hill Companies, Inc.

Original language published by The McGraw-Hill Companies, Inc. All Rights reserved. No part of this publication may be reproduced or distributed in any form or by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Simplified Chinese translation edition is published and distributed exclusively by China Financial & Economic Publishing House under the authorization by McGraw-Hill Education (Asia) Co., within the territory of the People's Republic of China only, excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan. Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. Violation of this Law is subject to Civil and Criminal Penalties.

本书中文简体字翻译版由美国麦格劳－希尔教育出版（亚洲）公司授权中国财政经济出版社在中华人民共和国境内（不包括香港、澳门特别行政区及台湾）独家出版发行。未经许可之出口，视为违反著作权法，将受法律之制裁。

未经出版者预先书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

**本书封面贴有McGraw-Hill公司防伪标签，无标签者不得销售。**

中国财政经济出版社 出版

URL: http://www.cfeph.com.cn

E-mail: webmaster@ewinbook.com

**（版权所有 翻印必究）**

社址：北京海淀区阜成路甲28号 邮政编码：100036

发行电话：010－88191017

北京中租胶印厂印刷 各地新华书店经销

787×1092毫米 16开 50.75印张 720千字

2004年1月第2版 2004年1月北京第1次印刷

定价：75.00元

ISBN 7－5005－6953－X/F·6082

（图书出现印装问题，本社负责调换）

# 译 者 序

由斯坦福大学弗雷德里克·S·希利尔、马克·S·希利尔合著的《数据、模型与决策(管理科学篇):运用电子表格建模与案例研究》第2版(原书名为"Introduction To Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets")是一部特点鲜明、新颖而又有很强实践指导意义的管理科学教科书。该书的两位作者都有许多管理科学的教科书出版并且多次再版,在管理科学界享有很高的声誉。

该书在分析案例、建立数学模型、使用电子表格等三个方面充分体现了作者在管理科学教学与研究上的匠心独运:

1. **运用了大量来自于企业和生活的实际案例**。作者总是从案例出发,详细讲述如何运用数学模型解决管理中遇到的问题,提供了一整套解决问题的方法——了解事实,理清问题结构,对问题中的关系进行量化,建立数学模型,运用计算机求解。本书案例的选取具有较强的代表性,对实际工作具有较强的指导作用。作者为了强调案例在学习中的作用,除在正文中大量使用案例外,在练习中也主要采用案例分析的方法进行论述,对提高读者对管理决策实际问题进行分析的能力有很大的促进作用。

2. **详细介绍如何建立数学模型**。作者充分体现了作为管理决策的辅助工具——数学模型在管理方法论中的地位和作用,将该书的重点放在了建立数学模型上。作者试图用各种数学模型揭开管理决策的神秘面纱,展示管理科学性的一面。作者先是通过简单的案例分析,对原始数学模型进行了简单明了的解释,不需要读者懂得很复杂的管理科学知识,却使读者对管理科学模型的思想有了很深刻的认识。

3. **Excel电子表格贯穿整个求解过程**。作者通过运用Excel电子表格对所有建立的数学模型进行求解,一方面使读者的注意力始终集中于解决实际问题的重点和难点——分析问题的思想方法和提炼数学模型的技巧上,另一方面又使读者掌握了分析求解的工具,能够对求解所得的结果进行分析,进而对管理实际问题作出决策。作者还对使用Excel过程中的一些窍门进行了详细介绍。

本书是一本"变革"的教材,它的价值在于取材于市场、经过市场化的运作并且经得起市场的考验。在美国商学院管理科学的教科书中她是佼佼者,在国内的商学院中她也已经成了受管理科学教师和MBA学员欢迎的教材。值得一提的是,她也成了EMBA课程"管理定量分析"和"数据模型与决策"的教科书。它涉及到的数学知识并不深,非常适合作为MBA、EMBA、管理学院学生及在职管理人员的学习和参考教材。

在麦格劳—希尔教育出版集团的教材网址http://www.mhhe.com/hillier2e上有作者准备的大量的教师教学和学生学习的辅导材料。译者为本书创建了专门的中文教学网页,放在www.asom.edu.cn上任建标的网页中。

本书的翻译工作是一项对时间和质量的挑战,团队合作的努力使得本书在时间和质量上都做到了出色,而不是一种权衡。本书由上海交通大学管理学院任建标副教授组织翻译,他的学生在部分初稿、习题和图表的翻译上发挥了智慧和付出了心血。这是一个有着共同信念的团队,作为管理学院的硕士研究生,他们对把管理科学知识应用于实践有着强烈的愿望和浓厚的兴趣。具体的翻译分工如下:第1章至第4章为任建标,第5章至第7章为张皓月、任建标,第8章至第12章为任建标、史静,第13章、第14章为任建标,第15章、第16章为任建标、董效涛,任建标还翻译了前言、关于作者、关于案例作者、目录,陈洁翻译了习题答案。任建标对所有初稿进行了校译和修改以及最后的统稿和定稿。

本书的完成是与中国财政经济出版社易文出版中心的编辑和出版工作人员高效率的运作分不开的。他们是孙忠、刘占彬和其他许多并不认识的工作人员。与在市场化运作下的专业人员合作始终是本书顺利完成的基础。

由于时间紧、译者水平有限,译文中难免有不当和错误之处,敬请读者批评指正。

任建标
上海交通大学管理学院
renjb@sjtu.edu.cn

# 译 者 简 介

**任建标**　上海交通大学管理学院工商管理系副教授，运营与物流管理研究中心副主任，运营与物流管理学科研究方向责任教授、美国新泽西州立大学供应链管理研究中心研究学者（2001－2002）。

在上海交通大学管理学院从事 EMBA 课程“数据、模型与决策”和 MBA 课程“运营与供应链管理”、“物流网络构建”的教学与研究。多年来讲学于北京、上海、济南、深圳、苏州、无锡、青岛、新加坡等国家和城市。已为许多企业进行了生产管理、现代物流与供应链设计管理、库存管理以及企业数量化管理的管理培训。2001 年 6 月获上海交通大学教学竞赛优秀教学大奖、优秀教师奖。

编著《运筹学：管理中的定量方法》、《运营管理案例》2 部，译著《数据、模型与决策》、《开发供应商合作伙伴关系：供应链一体化方法》、《运营管理：赢得竞争优势》、《物流战略咨询》等 4 部，为上海交通大学管理学院案例中心和清华大学经济管理学院案例中心开发教学案例 15 个，论文 8 篇。主持和参与了华润物流 GEP 项目业务流程重组企业咨询项目、Esprit 中国供应链诊断咨询项目、康佳集团申丝物流东北区域供应链整合项目、上海发展汽车工业教育基金会的上汽集团公司的兼并重组战略及策略研究、上汽集团合资企业生产管理特色研究项目以及国家自然科学基金资助项目——危机管理应急决策的信息策略与动态组织设计研究。

主要的专长研究领域为企业库存管理及优化、供应链管理、业务流程重组、供应链契约理论以及企业量化科学管理等。

培训过的客户企业包括上海大众汽车、联想集团、用友软件、上海阿尔卡特、英特尔等 20 多家著名企业，并开设“管理供应链的不确定性—库存管理”、“高效的一体化生产销售物流控制体系”和“物流业务流程重组”等多个企业公开课程。

联系方式

E－mail：jbren@ sjtu. edu. cn

PDG

# 关于作者

**弗雷德里克·S·希利尔(Frederick S. Hillier)**是斯坦福大学的运筹学退休教授。希利尔博士以他经典的、获奖的教科书《运筹学导论》(Introduction to Operations Research)而享有崇高的声誉,此书是与杰拉尔德·J·利伯曼(Gerald J. Lieberman)教授合著的,已经被翻译成十多种语言,目前正要出第7版。希利尔博士其他的著作有《风险关联投资的评估》(*The Evaluation of Risky Interrelated Investments*)、《排队表和图》(*Queueing Tables and Graphs*)、《运筹学随机模型导论》(*Introduction to Stochastic Models*)和《数学规划导论》(*Introduction to Mathematical Programming*)。希利尔从斯坦福大学获得了工业工程的学士学位和运筹学与管理科学的博士学位。在高中和大学阶段获得了写作、数学、辩论和音乐方面的多项奖励,在大学工业工程班级中排名第一并且在研究生学习阶段获得了三项国家奖学金[国家科学基金(National Science Foundation)、陶·贝塔·派奖学金(Tau Beta Pi)和丹福斯奖学金(Danforth)]。希利尔博士的研究涉及许多领域,包括整数规划、排队论及其应用、统计质量控制和生产与运作管理。他在资金预算(Capital Budgeting)的研究上还获得过重要的奖项。希利尔博士两次被选举为专业社会组织的国家官员,担任许多重要的专业和学术期刊的编委工作。他还是康耐尔大学、卡耐基梅隆大学工业管理研究院、丹麦技术大学、新西兰坎特布里大学和英国剑桥大学嘉杰(Judge)管理研究院(作为 Arthur Anderson 访问学者)的访问学者。

**马克·S·希利尔(Mark S. Hillier)**是弗雷德里克·S·希利尔的儿子,目前是华盛顿大学商学院管理科学副教授。希利尔博士从斯沃茨默(Swarthmore)学院获得了工程学士学位(专长在计算机科学)、从斯坦福大学获得了运筹学硕士和工业工程与工业管理的博士学位。本科学习阶段,因为在工程班级中排名第一而获得了麦克凯博(McCabe)奖学金,基于在数学上的工作获得了菲·贝塔·坎博(Phi Beta Kappa)奖学金,创下了学校男子游泳队的记录,还获得了两项国家奖学金(国家自然基金和陶·贝塔·派奖学金),那时他还为希利尔博士与杰拉尔德·J·利伯曼教授合著的教科书《运筹学导论》开发了一个综合性的指导软件(OR Courseware)。研究生学习阶段,他在斯坦福开设了一个在运营管理方面的博士程度的讨论班,并且凭借他的博士论文而获得了国家奖。在华盛顿大学,他讲授管理科学和电子表格建模方面的课程。他由于 MBA 选修课“电子表格建模”的教学获得了一项教学奖励,由于本科生“运营管理课程”的教学而获得了全校的教学奖励。他还获得了以 Neal 和 Jan Dempsey 命名的教师奖金。他的研究兴趣包括研究零部件通用性(Component Commonality)、库存、制造和生产系统设计。希利尔博士最近关于零部件通用性的研究论文获得了 IIE Transactions 2000~2001 年度的最佳论文奖。

# 关于案例作者

**卡尔·斯凯梅德(Karl Schmedders)**是西北大学凯洛格商学院管理经济学和决策科学系的副教授。他在凯洛格商学院讲授管理决策制定的定量方法。他的研究兴趣包括经济理论中管理科学的应用、不完全市场的一般均衡理论、资产定价和计量经济学。斯凯梅德博士从斯坦福大学获得了运筹学博士学位。在斯坦福大学,他还为本科生和研究生讲授管理科学。其中一门课程是管理科学案例研究,因为这门课程,他被由 INFORMS 发起的大会邀请做关于他的案例课程成功经验的演讲。他在斯坦福大学获得了许多教学奖,包括斯坦福大学著名的沃尔特·J·格雷斯(Walter J. Gores)教学奖。他还被命名为凯洛格商学院年度的 L. G. Lavengood 教授。

**莫莉·斯蒂芬司(Molly Stephens)**是位于德州休斯顿的 Weil, Gotshal & Manges LLP 公司管理证券部门的副经理。她毕业于斯坦福大学,获得了工业工程学士学位和运筹学硕士学位。斯蒂芬司在斯坦福大学工程学院讲授公共演讲课程,并且是管理科学案例研究课程的教学助教。作为教学助教,她分析了真实世界中遇到的管理科学问题,并且把这些问题编写成课堂案例研究。当她从斯坦福大学获得了一项本科研究资助继续从事案例研究工作并且被邀请在 INFORMS 做成功课堂案例研究总结的演讲时,她的研究获得了回报。研究生毕业后到她获得德州大学的法律博士学位前,作为系统集成人员,她在安达信咨询公司工作,在重新开始研究生学习前,经历了真实世界中的大量案例。

PDG

# 献　辞

献给我们的妻子——安·克莉斯丁和海伦——为她们始终如一的支持以及为了纪念管理科学领域中的一位真正巨匠——我们深爱的导师杰里·利伯曼

# 致　谢

这本新的版本从许多人充满智慧的建议中大为受益。在本书的开头，我对以下一些在第 1 版和第 2 版手稿不同阶段为我们提供过正式评论的人表达我们深深的谢意：

Kelwyn D'Souza
　Hampton University
Harvey J. Iglarsh
　Georgetown University
Ken Gordon
　University of Corlorado-Boulder
Murat M. Koksalan
　Purdue University
Scott E. Grasman
　University of Missouri at Rolla
Zubair Mohamed
　Western Kentucky University
Samuel B. Graves
　Boston College
Jack A. Vaughan
　University of Texas-El Paso
James Grayson
　Augusta State University

我们还感谢大量我们自己的学生以及通过电子邮件联系的许多其他学生和教师给我们提供的很有价值的建议。

本书继续是远超过两位作者的团队努力的结果。作为第 1 版的第三作者，离我们而去的杰拉尔德·J·利伯曼教授给了我们这一项目重要的原始的冲动。我们的案例写作者——卡尔·斯凯梅德和莫莉·斯蒂芬司是本团队不可或缺的成员。安·希利尔日日夜夜长时间地坐在电脑前进行文字处理和许多图表的制作。克莉斯丁·希利尔在照顾两个孩子的同时还经常要对手稿提出批评、解出习题答案和准备题库。她们都是团队的重要成员。

编辑和出版工作人员的指导与努力使本书更加出色。他们是 Scott Isenberg（执行编辑）、Wanda Zeman（高级开发编辑）和 Destiny Rynne（项目经理）。这本书的更为出色是由于他们的指导和努力工作，与这些完全专业的工作人员合作一直感到身心愉快。

# 前　　言

我们早就意识到传统的管理科学教科书不能够用最好地方法引导商学院的学生进入管理科学这个激动人心的领域。开发本书第1版时，我们的目标是打破旧的模式，采用一种新的创新的方法更有效地来进行管理科学的教学。我们为很多人对我们的努力表示出的欢迎感到高兴，许多评论者和本书的其他使用者都对本书众多独有的特点表示了感谢，同时也认为本书给商学院学生清晰地展现了管理科学这一学科的正确和合理的程度。

第2版的目标是要继续加强第1版的优势。合著者马克·希利尔最近用本书为华盛顿大学商学院学生讲授电子表格建模的课程获得了一个特别的教学奖，这一经历使得本书比第1版有了很多的改进。我们还采纳了许多使用本书的教师的评论和建议，包括要求扩展相应的专题。经过这些过程，我们在保持第1版独特定位的基础上付出了艰苦的努力，在第1版的基础上提高了质量。

这个独特的定位是紧紧跟随1996年INFORMS商学院教育工作执行委员会的报告的建议，下面是这个报告的其中一节：

在目前的环境中，这门课程（管理科学导论）的性质必须有所变化。人们对以算法为中心的课程不再有足够的耐心，相反，他们对以商业环境为背景的课程更为需要，包括一些著名的非数学问题、使用电子表格，以及建立和评估模型，而并非对模型结构本身的研究。这样的课程需要新的教学材料。

而本书则正好可用于本课程的教学。

与这个专家小组的建议相符，我们相信作为当代管理科学的入门教材应当拥有下列三个主要的元素，即我们在本书的副标题中所提出的建模、案例分析和与之配合应用的电子表格软件。

## 电子表格软件

在教学中使用电子表格软件已经成为管理科学教学的一个明显的新潮流。无论是商学院学生还是经理人都已经广泛地应用电子表格软件，这为我们进行相应的教学提供了一个舒适而愉快的环境。我们在本书将广泛使用的Microsoft Excel软件，它现在已经被应用于真正的管理科学中。对于解决教学模型问题（其中也包括大量实际模型），电子表格软件远优于传统的代数算法。这意味着，原先在传统管理科学教科书中占有重要地位的代数学的门帘已经可以被轻轻拉开了。

然而，在最近的对电子表格软件的巨大热情中也隐含着某种矫枉过正的不良倾向。电子表格并不是进行管理科学分析的惟一工具，偶尔应用的代数学或图形分析工具也应享有应有的地位，并且，如果我们不鼓励学生在这些方面适当地发展他们的技能，那么这也是对他们的一种伤害。再者，本书也不想成为一本关于电子表格软件的烹调大全，而仅仅着眼于电子表格软件的运行机制。电子表格软件只是我们达到某一目标的工具，而并非目标本身。

## 建模方法

本书的第二个特征就是数学建模。建立模型的方法是管理科学的方法论的核心，因此，我们特别强调建模的艺术、模型的功能和对模型结果的分析。我们主要（并非排他性的）使用电子表格软件，而不是用代数方法建立并阐述模型。

一些教师用建立代数模型的方法来教授模型已经有很多年了（INFORMS工作委员会称为"模型结构型"）。一些教师认为他们的学生应该用代数模型的方法建立模型，然后很简单地就能够转化在电子表格中使用Excel Solver来求解。我们不同意这种观点。我们的经历（以及其他教师的经历）告诉我们，大多数商学院学生感到直接在电子表格中建模更为自然和舒适。而且，通过应用最好的电子表格建模技术（就像本书展示的那样），构建电子表格模型比构建代数模型更有效率和透明。

本书以及其他当代的教科书比传统教科书的

另一个突破是真正忽略了求解模型的算法,我们认为没有理由使商学院的一般学生掌握由计算机来运行的算法的细节。在一个学期管理科学课程时间的约束下,应该有更多更重要的东西来学习。因此,本书的重点是那些我们认为更重要的东西。这些东西的核心是在电子表格上为管理问题建模的艺术。

然而,对一个实际问题建立电子表格模型通常需要花很多时间在模型设计和数据输入上。因此,我们常常按照下列工作程序,一步一步地完成建模:理解并解构问题;以书面形式逐步展开某些重要结构;收集数据;用定量的语言表达数据间的关系;最后形成电子表格模型。这种结构化的方法重点突出了建模的主要元素(数据、决策目标、限制条件、绩效度量)及其相应的不同类型的单元格。所以,这再次表明我们的重点在于建模本身而不是电子表格软件的运行机制。

## 案例分析方法

然而,在教学中,如果我们仅仅罗列一长串简单的例子以及相应的电子表格公式,那么我们的教学效果必然是贫瘠而无结果的。正是这个原因,我们采用了案例分析的方法,这也是本书的第三个特征。在本书各章中,除了一些例题之外,我们还选用了一个或两个取材于真实应用的案例,以说明相关理论在实际中运用的过程。在一些例子中,本书中的某些章节将围绕一个案例展开。为了使学生更好地进入故事的状态,我们精心设计了各个章节的每个案例,从而能够在特定的环境中,生动地反映出本章所介绍的理论在实际中的应用情况;而这样一个特定的环境,也恰好说明了适当的管理科学技巧同有效管理决策的相关性。这种讲故事似的以案例为中心的手法应当使材料更加有趣而富有刺激性,同时也能够表达出我们在实际应用中所必须注意的重要因素。

我们很高兴很多评论者对我们第 1 版的案例研究方法表示出了特别的认同。尽管这一方法在其他管理科学教科书中没有多大用处,但是我们还是认为为学员准备处理各种各样的实际管理科学问题是很重要的。一些评论者对我们用在某些案例中的对话和情景接触的方法认为很有效。尽管不是传统的,这一方法为展示在管理科学的帮助下的决策制定的过程提供了一种方式。它还促使学员用管理的语言来预习一些主要的概念。

除了第 1 章之外,在每一章的最后是习题,我们都提供了完备的案例材料。这些案例都采用一种刺激的讲故事的方法,因此可以作为有趣而具备挑战性的项目来完成。大多数的章尾案例都是由两位天才的案例专家共同完成的。他们是 Karl Schmedders,美国西北大学凯洛格管理学院的教师,以及 Molly Stephens,前安达信咨询公司的管理顾问。此外,这些案例中,有两个曾是 INFORMS 的教学案例,还有几个曾在《运筹学导论》中使用过。我们还添加了一些案例,包括一些小的案例。

当然,我们并不是第一个在管理科学教科书中引入上述三个特点的,但是我们相信本书与同类书相比,正因为同时包含了上述三个主要的特点而独具特色。

## 其他特点

此外,我们也应当提及本书沿袭第 1 版以来的其他一些特点:

- 多样化的举例、习题和案例揭示管理科学原理的普遍联系
- 许多管理科学成功案例应用的综合体现(并非孤立地)
- 对于实践应用中最新进展的进一步描述
- 很强的管理学色彩
- 每节最后附有复习题
- 每章最后有专业术语表
- 书末的部分习题解答
- 随书附赠的 CD-ROM 中的补充材料(目录中已列出)
- 一个基于 Excel 的软件包(附赠的 CD-ROM 中的管理科学课件 MS Courseware),包括许多加载宏、模板和其他文件(见后)
- 其他在学生使用光盘和教师使用光盘上的有用的附加材料

## 软 件

### 来自于第 1 版

第 1 版在学生用光盘中提供了一个称为 MS Courseware 的完整的基于 Excel 的软件包,这一软件包在本版本中也提供了。

这一软件包包括了本书所有案例和例子的多种多样的活生生的 Excel 文件,为了更进一步考察

例子和案例,这些电子表格可以作为学员和教师构建模型和求解相似问题的一个模板。软件包还包括了求解本书中各种各样模型的大量的 Excel 模板。

MS Courseware 中的另一个主要资源是收集了与本书各章节相对应的 Excel 加载宏。

- 教育版的 Premium Solver,包括求解复杂最优化问题(10.5 节)的功能强大的 Evolutionary Solver
- 为决策分析服务的生成和分析决策树的 TreePlan(第 12 章中使用)
- 为概率系统的问题实施敏感性分析的 SensIt(主要使用在第 12 章)
- 实施计算机仿真的 RiskSim(第 15 章中介绍)

MS Courseware 中还包括了下面一些额外的软件:

- 为实施对项目网络问题(第 8 章)进行结构化和分析的 Microsoft Project(2002 年 6 月更新版)
- 实施计算机仿真的排队算子(第 15 章)

## 本版新添加

我们为本版的 MS Courseware 新添加了一些激动人心的软件:

- **Crystal Ball 2000 专业版**。这一功能强大的 Excel 加载宏大大扩展了标准的 Excel 软件包实施计算机仿真的能力。新加的第 16 章是为使用 Crystal Ball 进行仿真而准备的
- **OptQuest**。只在 Crystal Ball 专业版中附带,这一特殊的模块整合了计算机仿真和高级最优化技术,16.9 节集中介绍 OptQuest 的应用
- **CB Predictor**。这一 Crystal Ball 中的特殊模块用于进行各种各样的时间序列预测。13.4 节介绍这一模块
- **互动式管理科学模块**。这一创新的工具包括了许多使你与管理科学技术深度互动的模块。这些模块覆盖了第 1、2、5、13、14、18 章的管理科学技术。在本书的网上提供了一个在线的版本,在 MS Courseware 的光盘中包括了一个离线版本
- **Solver Table**。这个 Excel 加载宏经由作者开发,为的是对最优化问题自动实施敏感性分析,会在多个章节中使用,尤其是第 5 章

## 一些新的章节

与第 1 版的一个主要的区别是本版添加了两个全新的章节,把第 1 版的某些章节扩展成了两个完全的章,以及整合了第 1 版的一些资料形成了一个独立的章。

- **第 3 章:电子表格建模的艺术**。这一全新的章节超越了其他所有的教科书,反映了当前电子表格建模的艺术,这一章远不只是介绍了电子表格建模的基本知识,还完完全全地讨论和阐述了以下一些专题:(1)电子表格建模的步骤;(2)一些通常的绊脚石以及如何克服它;(3)建立一个好的电子表格模型的指导原则;(4)如何建立一个易于阅读、修改和调试的电子表格;(5)调试电子表格模型的窍门和工具;(6)有效地使用区域名称、阴影等等。本章介绍的经验和教训将在本书所有的电子表格模型中得到体现。
- **第 9 章:整数规划**。第 1 版中整数规划的资料(一般整数规划的一节和 0-1 整数规划的单独的一章)已经整合形成了新的一章。
- **第 10 章:非线性规划**。第 1 版中非线性规划的两节(包括可分离规划)现在已经扩展成了这一专题的一个单独的章节。包括的新节内容是:(1)非线性规划的挑战;(2)复杂的非线性规划问题;(3)Evolutionary Solver 和遗传算法。
- **第 11 章:目标规划**。第 1 版中的关于目标规划的两节已经扩展成了这一专题的完整的一章。最重要的是添加了具有优先权的目标规划这一新节。
- **第 16 章:应用 Crystal Ball 进行计算机仿真**。由于很多人在计算机仿真上需要更多的资料,我们添加了全新的一章(本书中最长的一章之一)。这一章集中在现在非常流行的 Excel 加载宏 Crystal Ball 提供的高级功能。功能强大的 Crystal Ball 的特色有:(1)分布收藏室;(2)辅助决策制定的

决策表；(3)通过一系列仿真运行最优化的 OptQuest 模块。

为这些新的内容留出篇幅，第 1 版中的第 11 章(确定需求下的库存管理)和第 12 章(不确定需求下的库存管理)现在转移到了光盘的附录中(作为第 18、第 19 章)，既然库存管理现在在运营管理课程而不是在管理科学中进行教学已经非常普遍，我们认为从教科书的正文中删减这些内容是合理的。

## 新版中其他一些新的特点

第 2 版中在很多方面都比第 1 版有重要的提高：

- **全新的电子表格**。本书中所有的电子表格已经被重新设计以体现出第 3 章所展现的电子表格建模的艺术。例如，区域名称被普遍使用(通常是用圆括号内的单元格地址)来指明单元格名称。
- **重新组织"决策分析"一章**。决策分析这一章(现在是第 12 章)已经完全重新进行了组织并且进行了一些扩展以体现本章专题的逻辑过程，Excel 加载宏 TreePlan 和 SensIt 现在作为了特色介绍，更多的重点放在了敏感性分析上。
- **重新组织"线性规划的 what-if 分析"一章**。第 5 章(第 1 版是第 4 章)用了一种更为直观的方式进行了重新组织，添加的主要内容是应用 Solver Table 系统地实施敏感性分析。what-if 分析的总体方法现在是非常直观的：(1)以尝试对电子表格的单独改变开始；(2)然后应用 Solver Table；(3)最后分析 Excel 敏感性报告。
- **更多的敏感性分析**。我们还加重了在其他多个章节中实施敏感性分析的力度，包括使用 Solver Table。
- **进一步修改**。对第 1 版的每一章都进行了仔细的检查和修改以更新资料和提高阐述的准确度。
- **更多的案例**。我们还增加了 7 个全新的章尾案例。为了提供更大的多样性，这些案例与第 1 版中的详细介绍不同的是都倾向于是短案例，而且与章节的内容更加吻合。
- **Interfaces 文章的链接**。本书描述和整合进了大量管理科学成功的实际应用。对每一个实际应用，Interfaces 上描述具体应用的文章被引用了。为了便于读者进行进一步阅读，现在我们对几乎所有的文章都提供了下载的链接(网址为 www.mhhe.com/hillier2e/articles)。
- **页边注记**。全书中我们还插入了约有 1000 多条的页边注记来仔细阐明和突出一些关键点。
- **Excel 窍门**。在页边注记的中间有相当多的 Excel 窍门(或者有效使用其他软件的窍门)。
- **学习目标**。每一章都以本章的学习目标作为开始。

# 其他补充材料

教师光盘的内容包括对所有习题和案例的解答，这对复制和粘贴课后作业会非常方便。光盘还包括一个计算机化的题库，这一题库有大量的多项选择和是非题。还提供了演讲用的 PowerPoint 资料，这些 PowerPoint 的内容包括每一章的教学讲义资料和书中章节的所有图表(包括电子表格)。

随书附赠的学生光盘的内容是管理科学课件(MS Courseware)。光盘还包括了为不同的章节进行自我测试的样本问题(与教师使用的光盘中的题库不同)的一个指南。

本书的网站将不断更新资料，包括提供最新的勘误表，网站的域名是 http://www.mhhe.com/hillier2e。此外在出版商的运营管理超级网站 http://www.mhhe.om/pom 上你还可以发现众多的同本书相关的各类资源。

我们欢迎您提出建议、评论或指出错误，并且希望您能够在阅读本书时身心愉悦。

**Frederick S. Hillier**，
斯坦福大学 (fhillier@stanford.edu)
**Mark S. Hillier**，
华盛顿大学 (mhillier@u.washington.edu)

# 目　录


前言 …………………………………………………………………………………… (1)

1　管理科学简介 ……………………………………………………………………… (1)

1.1　管理科学的本质 ……………………………………………………………… (2)
1.2　一个阐述管理科学方法的例子:盈亏平衡分析 …………………………… (5)
1.3　管理科学的影响 …………………………………………………………… (11)
1.4　本书的一些特色 …………………………………………………………… (14)
1.5　本章小结 …………………………………………………………………… (16)
专业术语 ……………………………………………………………………………… (16)
本章管理科学课件的学习辅助 ……………………………………………………… (16)
习题 …………………………………………………………………………………… (17)

2　线性规划:基本概念 ……………………………………………………………… (19)

2.1　线性规划的三个经典应用 ………………………………………………… (20)
2.2　案例研究:伟恩德玻璃制品公司产品组合问题 …………………………… (22)
2.3　在电子表格上建立伟恩德公司问题的模型 ……………………………… (26)
2.4　电子表格上的数学模型 …………………………………………………… (31)
2.5　求解两变量问题的图解法 ………………………………………………… (33)
2.6　应用 Excel 求解线性规划问题 …………………………………………… (41)
2.7　一个最小化的例子——利博公司广告组合问题 ………………………… (44)
2.8　管理视角的线性规划 ……………………………………………………… (49)
2.9　本章小结 …………………………………………………………………… (51)
专业术语 ……………………………………………………………………………… (51)
本章管理科学课件的学习辅助 ……………………………………………………… (52)
习题 …………………………………………………………………………………… (52)
案例 2.1　自动装配 ………………………………………………………………… (60)
案例 2.2　降低咖啡屋的成本 ……………………………………………………… (61)
案例 2.3　为呼叫中心配备工作人员 ……………………………………………… (62)

3　电子表格建模的艺术 ……………………………………………………………… (64)

3.1　案例研究:大沼泽地金色年代公司的现金流问题 ………………………… (65)
3.2　电子表格建模程序的概述 ………………………………………………… (66)
3.3　建立一个好的电子表格模型的几个原则 ………………………………… (76)

3.4 调试电子表格模型 …… (82)
3.5 本章小结 …… (86)
专业术语 …… (86)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (87)
习题 …… (87)
案例 3.1 养老金的谨慎供应 …… (89)

4 线性规划:建模与应用 …… (91)

4.1 案例研究:超级食品公司的广告混合问题 …… (92)
4.2 资源分配问题 …… (99)
4.3 成本收益平衡问题 …… (106)
4.4 网络配送问题 …… (113)
4.5 超级食品公司案例的再研究 …… (117)
4.6 混合问题 …… (121)
4.7 管理视角的建模 …… (127)
4.8 线性规划经典应用回顾 …… (129)
4.9 本章小结 …… (131)
专业术语 …… (132)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (132)
习题 …… (132)
案例 4.1 秋季流行服饰与衣料的准备 …… (139)
案例 4.2 新的边界 …… (140)
案例 4.3 分配学生和学校 …… (142)
案例 4.4 科威特 al-Manakh 证券市场 …… (143)

5 线性规划的 what-if 分析 …… (146)

5.1 what-if 分析对管理者的重要性 …… (147)
5.2 继续研究伟恩德公司案例 …… (149)
5.3 只有一个目标函数系数变动 …… (151)
5.4 目标函数系数同时变动的影响 …… (158)
5.5 单个约束条件变化的影响 …… (166)
5.6 约束右端值同时变动的情形 …… (172)
5.7 本章小结 …… (176)
专业术语 …… (177)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (177)
习题 …… (177)
案例 5.1 销售肥皂 …… (183)
案例 5.2 控制大气污染 …… (184)
案例 5.3 农场管理 …… (185)
案例 5.4 学校分配学生(再述) …… (187)

6　运输问题和指派问题 …… (188)
6.1　案例研究:P&T 公司的配送问题 …… (189)
6.2　运输问题的特征 …… (192)
6.3　各种运输问题变体的建模 …… (198)
6.4　运输问题变形的一些其他应用 …… (203)
6.5　案例研究:特塞格公司的选址问题 …… (211)
6.6　指派问题的特征 …… (220)
6.7　对指派问题变形的建模 …… (225)
6.8　本章小结 …… (231)
专业术语 …… (231)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (231)
习题 …… (232)
案例 6.1　向市场运送木材 …… (236)
案例 6.2　特塞格案例的继续研究 …… (237)
案例 6.3　项目选择 …… (238)
7　网络最优化问题 …… (241)
7.1　最小费用流问题 …… (242)
7.2　案例研究:BMZ 公司的最大流问题 …… (249)
7.3　最大流问题 …… (253)
7.4　最短路问题 …… (256)
7.5　最小支撑树问题 …… (264)
7.6　本章小结 …… (271)
专业术语 …… (272)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (272)
习题 …… (273)
案例 7.1　帮助盟军 …… (278)
案例 7.2　资金的运作 …… (281)
8　用 PERT/CPM 进行项目管理 …… (284)
8.1　案例研究:科信建筑公司项目 …… (285)
8.2　用网络图直观显示项目 …… (287)
8.3　用 PERT/CPM 进行项目排程 …… (291)
8.4　处理不确定活动工期 …… (303)
8.5　考虑时间—成本平衡 …… (309)
8.6　项目成本的安排和控制 …… (317)
8.7　从管理的视角评价 PERT/CPM …… (323)
8.8　本章小结 …… (327)
专业术语 …… (328)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (329)

习题 …… (329)
案例 8.1 迈向成功之路 …… (337)
案例 8.2 “学校的生活结束了……” …… (339)

**9 整数规划** …… (342)

9.1 一般整数规划 …… (343)
9.2 案例分析:加利福尼亚制造公司的例子 …… (349)
9.3 其他一些应用 …… (356)
9.4 0-1 变量的一些其他描述方法 …… (360)
9.5 一些建模的例子 …… (370)
9.6 本章小结 …… (381)
专业术语 …… (381)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (382)
习题 …… (382)
案例 9.1 能力问题 …… (387)
案例 9.2 分配艺术品 …… (389)
案例 9.3 存货布置 …… (390)
案例 9.4 将学生分配到各个学校(续) …… (392)

**10 非线性规划** …… (394)

10.1 非线性规划的挑战 …… (396)
10.2 边际收益递减的非线性规划 …… (405)
10.3 可分离规划 …… (414)
10.4 复杂非线性规划问题 …… (424)
10.5 Evolutionary Solver 软件和遗传算法 …… (426)
10.6 本章小结 …… (432)
专业术语 …… (433)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (433)
习题 …… (433)
案例 10.1 超级食品公司案例研究续篇 …… (439)
案例 10.2 了解投资组合 …… (440)
案例 10.3 跨国投资 …… (441)

**11 目标规划** …… (443)

11.1 案例研究:德怀特公司的目标规划问题 …… (444)
11.2 加权目标规划 …… (451)
11.3 优先目标规划 …… (454)
11.4 本章小结 …… (460)
专业术语 …… (460)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (460)
习题 …… (460)

案例 11.1　古巴的良方 …… (463)
案例 11.2　纪念9·11 …… (465)

12　决策分析 …… (467)

12.1　案例研究:高富布鲁克公司的难题 …… (468)
12.2　决策准则 …… (471)
12.3　决策树 …… (476)
12.4　使用决策树的敏感性分析 …… (479)
12.5　检查是否需要获得更多的信息 …… (485)
12.6　使用新的信息更新概率 …… (488)
12.7　用决策树分析系列决策问题 …… (493)
12.8　系列决策问题的敏感性分析 …… (498)
12.9　用效用更好地反映收益的价值 …… (506)
12.10　决策分析的实际应用 …… (519)
12.11　本章小结 …… (522)
专业术语 …… (522)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (523)
习题 …… (524)
案例 12.1　明智的选择 …… (534)
案例 12.2　智能辅助驾驶系统 …… (536)

13　预测 …… (539)

13.1　预测的一些应用 …… (540)
13.2　案例研究：计算机俱乐部仓库(CCW)问题 …… (543)
13.3　运用时间序列预测方法进行案例分析 …… (547)
13.4　用 CB 预测软件进行时间序列预测 …… (566)
13.5　时间序列预测方法透视 …… (568)
13.6　线性回归因果预测 …… (572)
13.7　判断预测方法 …… (577)
13.8　实践中的预测 …… (578)
13.9　本章小结 …… (580)
专业术语 …… (580)
关键公式小结 …… (581)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (582)
习题 …… (582)
案例 13.1　预测手段的改进 …… (589)

14　排队模型 …… (592)

14.1　排队模型的要素 …… (593)
14.2　排队系统的一些例子 …… (601)
14.3　排队系统的绩效测度 …… (603)

14.4 案例研究:杜皮特公司问题 …… (606)
14.5 一些单服务台排队模型 …… (609)
14.6 一些多服务台排队模型 …… (618)
14.7 有优先权的排队模型 …… (624)
14.8 关于设计排队系统的一些启示 …… (630)
14.9 服务台数量的经济分析 …… (634)
14.10 排队模型的一些获奖应用 …… (637)
14.11 本章小结 …… (640)
专业术语 …… (641)
主要符号 …… (642)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (642)
习题 …… (642)
案例 14.1 排队窘境 …… (650)
案例 14.2 降低在制品库存 …… (651)
案例 14.3 奇可普公司 …… (652)

**15 计算机仿真:基本概念 …… (656)**

15.1 计算机仿真的本质 …… (657)
15.2 案例研究:赫尔卡特理发店(再次研究) …… (670)
15.3 案例分析 …… (679)
15.4 计算机仿真应用的常见类型 …… (686)
15.5 计算机仿真学习总结 …… (689)
15.6 本章小结 …… (693)
专业术语 …… (694)
本章管理科学课件的学习辅助 …… (694)
习题 …… (695)
案例 15.1 刨工的规划 …… (700)
案例 15.2 减少在制品库存(修订版) …… (701)

**16 使用 Crystal Ball 进行计算机仿真 …… (702)**

16.1 案例研究:弗瑞迪报童问题 …… (703)
16.2 为一项建筑工程投标:科信建筑公司案例研究序曲 …… (713)
16.3 项目管理:科信建筑公司案例再研究 …… (717)
16.4 现金流管理:EGGY 公司案例再研究 …… (724)
16.5 财务风险分析:梦大发展公司案例再研究 …… (729)
16.6 旅游业中的收益管理 …… (733)
16.7 选择正确的分布函数 …… (738)
16.8 用决策表制定决策 …… (750)
16.9 使用 OptQuest 进行最优化 …… (758)
16.10 本章小结 …… (769)
专业术语 …… (769)

本章管理科学课件的学习辅助 …… (770)
习题 …… (770)
案例 16.1 行为投机 …… (775)
案例 16.2 压力下的定价问题 …… (776)

**附录 A 部分习题答案** …… (778)

## 以下内容放在随书光盘中

第 8 章的补充:构建项目网络的程序
第 9 章的补充:求解 0-1 整数规划问题的一些观点
第 12 章的补充:决策规则
第 14 章的补充:*M/M/s* 模型的有限队列和有限呼叫人数变动

**17 线性规划求解的概念**

17.1 最优解的一些主要特征
17.2 寻找一个最优解的角点解的作用
17.3 单纯形方法的求解概念
17.4 单纯形方法的计算机实施
17.5 求解线性规划问题的内点方法
17.6 小节
专业术语
本章管理科学课件的学习辅助
习题
第 17 章的辅助资料:单纯形方法的深入研究

**18 确定需求下的库存管理**

18.1 案例研究:大西洋海岸轮胎公司(ACT)问题
18.2 库存模型中的成本构成
18.3 基本经济订购批量(EOQ)模型
18.4 基本 EOQ 模型的最优库存政策
18.5 有计划缺货的 EOQ 模型
18.6 有数量折扣的 EOQ 模型
18.7 逐渐补充库存的 EOQ 模型
18.8 本章小结
专业术语
本章管理科学课件的学习辅助
习题
案例 18.1 改进库存控制

**19 不确定需求下的库存管理**

19.1 易变质产品的案例研究:弗瑞迪报童问题

19.2 易变质产品的库存模型
19.3 需求稳定产品的案例研究:尼科照相机公司问题
19.4 管理科学小组对此案例的分析
19.5 稳定性产品的永续盘存库存模型
19.6 实践中的大型库存系统
19.7 本章小结
专业术语
本章管理科学课件的学习辅助
习题
案例 19.1 TNT:吸取报童的教训
案例 19.2 抛弃剩余库存

PDG

CHAPTER

# 1 管理科学简介

## 学习目标

完成本章学习后,你应该掌握:

1. 管理科学的定义
2. 描述管理科学的本质
3. 解释什么是数学模型
4. 使用数学模型进行盈亏平衡分析
5. 使用电子表格模型进行盈亏平衡分析
6. 确定各种各样的管理科学研究给企业带来的节约
7. 鉴别本书的一些特色

欢迎进入管理科学(management science)领域! 我们认为管理科学是一个让人觉得特别兴奋和有趣的领域。让人觉得兴奋是因为管理科学对全世界大量企业的盈利方面有着巨大的影响。让人觉得有趣是因为管理科学方法在实际应用中是如此的具有独创性。我们希望能够在介绍该领域的特色时能起到领路人的作用。

许多学生在选管理科学课程和教材时表现出了相当大的焦虑和怀疑,焦虑的主要原因是由于管理科学是一个高度数学化的领域,而这使得人们对管理科学方法能否处理实际管理问题产生了怀疑。大多数传统的管理科学课程和教材由于加强了对数学的介绍而不是实务应用使人们加深了对管理科学的焦虑和怀疑。

不要紧张,本书不是一本传统的管理科学教科书。我们意识到本书的大多数读者是有志于成为管理者的人,而不是数学家。因此,贯穿全书的重点是传达未来的管理者需要知道管理科学的哪些内容。不错,本书会包含一些数学知识,因为数学是管理科学领域的主要语言。但你将会遇到的数学知识只是高中代数和基础概率论的基本概念(在后面的章节中)。我们想你肯定会为这等水平的数学知识是那么有用和直观而惊喜。然而,管理者一点都不需要知道构成管理科学基础的艰深的数学理论。因此,在本书中使用数学只是起到第二位作用。

我们不再强调数学的一个原因是因为有了应用管理科学的功能强大的电子表格软件包(spreadsheet packages)。电子表格提供了一个对管理问题进行描述和分析的舒适和熟悉的环境。电子表格软件只需在用户最少的指引下自动会应用后台必要的数学知识,这已经开始对管理科学的应用发生了一场革命。在过去,训练有素的管理科学工作者要为管理者进行重要的管理科学研究,而现在,电子表格具有大量的管理者能够得到的管理科学工具和概念使得管理者自己也能够进行分析。尽管工作很忙的管理者会继续依靠管理科学小组为他们展开重大的研究,但是越来越多的管理者已经通过电子表格软件包自己进行管理科学分析了。因此,既然本书的目标读者是未来的管理者和管理咨询人员,所以我们把重点放在电子表格在管理科学知识的应用上。

未来开明的管理者需要从管理科学课程中学习哪些内容呢?

1. 对管理科学所涉及的范围和它的功能有一个正确的评价[因此,我们会列举大量管理科学实际应用(actual applications)和在相应组织中的影响的例子]。
2. 会识别在什么情况下管理科学知识能够(和不能够)得到成功应用[因此,我们着重于强调那些管理科学知识能够应用的各类问题(kinds of problems)]。
3. 学会如何应用管理科学的主要知识分析各种管理问题(因此,我们会一直强调在不超过本书所提供的管理科学知识的背景下电子表格如何使应用管理科学知识成为可能)。
4. 对管理科学研究结果形成一种理解(因此,我们将会提供大量的案例研究,这些案例能够阐明管理科学研究及研究结果是如何依赖假设和所用数据的)。

以上这些就是本书主要的教学目标。

在接下去的三节中我们将依次介绍管理科学的本质和管理科学正在对许多组织产生的影响(这些主题同样会在所有其他章节中继续进行介绍)。在 1.4 节中我们会指出本书的一些特色,你会在以后的章节中发现这些特色。

## 1.1 管理科学的本质

管理科学(management science,有时缩写为 MS)是指什么呢?它确实包含管理(management)和科学(science),或者更精确一点说,是管理的科学(the science of management)。但这一概念还是太模糊,下面是一个更有启发性的定义:

**管理科学**是对与定量因素(quantitative factors)有关的管理问题通过应用科学的方法(scientific approach)进行辅助管理决策制定(aid managerial decision making)的一门学科(discipline)。

现在让我们来说明定义中的每个概念是如何详尽阐述管理科学本质的。

### 管理科学是一门学科

作为一门学科,管理科学是建立在科学基础上的知识和技术的总体。举例来说,在某种意义上它与医疗领域(medical field)相似。一个医生总是先受到建立在医疗领域科学基础上的知识和技术总体的训练,接受训练后展开实际医疗工作,医生必须先诊断病人的病情,然后对病情采取相应合适的治疗程序,最后病人对接受哪些治疗程序作出决策。在病情不是很严重时,病人可以不去就诊,而是应用自己的医疗基础知识进行自我诊断。相似地,管

理科学专家必须接受大量的训练（尽管接受的训练不能与医生相比），但这些训练也是建立在管理科学基础上的知识和技术的总体的训练，进入实际工作后，管理科学专家必须对管理问题作出诊断，然后采用合适的管理科学技术对问题进行分析，最后知道实际情况的管理者对采用哪些分析结论作出决策。对于那些应用管理科学有帮助且不复杂的管理问题，管理者可不需要咨询管理科学专家，而是用他自己具备的管理科学基础知识对问题进行分析。

尽管管理科学有着很长的历史渊源，但学科的快速发展开始于 20 世纪四五十年代。起初的动力先是来自于第二次世界大战，大量的管理科学专家被应召应用科学方法管理盟国的战事。另一个里程碑事件是 1947 年丹捷格（George Dantzig）发现了求解线性规划问题的单纯形法（simplex method）（线性规划是下面几章的内容）。对管理科学学科发展起着更大推动作用的另一个因素是计算机革命（computer revolution）的爆发。

管理科学学科的传统名称叫运筹学（今天该名称还在商学院以外广泛使用着）。运筹学得名于第二次世界大战中科学家小组对如何管理军事运作（operations）进行的研究。缩写词 OR 也还在广泛使用着。缩写词 OR 常与管理科学缩写词 MS 组合在一起，指的是学科 OR/MS。

管理科学学科主要的国际性专业组织是运筹学与管理科学学会（INFORMS）。总部设在美国，大约有 12000 名会员，每年在美国举办大型研讨会，有时在其他国家举办会议。学会还出版几本著名的期刊，包括管理科学（Management Science）、运筹学（Operations Research）和边沿科学（Interfaces）（刊出管理科学实际应用的文章是 Interfaces 的特点，因此在全书中你会看到大量引用该期刊的参考文献）。

另外，几十个成员国组成了国际运筹学联盟（IFORS），所有成员国都在其国内有运筹学组织。欧洲和亚洲都有自己的运筹学组织来协调举办研讨会以及在各自洲出版国际期刊。

因此，运筹学/管理科学是一个名副其实的国际性学科（以后我们只用管理科学的名称）。

### 管理科学辅助管理决策制定

这里的关键词为管理科学辅助管理决策制定。管理科学专家并不作管理决策，那是管理者作出的。管理科学研究只是在对问题涉及的定量因素进行分析并向开明的管理者提出建议。管理者还必须考虑管理科学领域以外的众多无形的因素，然后根据其最佳判断作出决策。有时在决策制定时定性因素和定量因素具有同等的重要性。

一些小型的管理科学研究可以由一个人进行，或许是开明的管理者本人。但是管理科学小组一般进行大型项目的研究（我们将用小组这一术语来覆盖全书所有的案例研究），小组中有些不是管理科学专家，但他们提供研究所需的其他类型的专业知识。尽管管理科学小组通常完全是企业的雇员，但部分或所有的小组成员却是企业为完成某个项目所聘用的咨询顾问。完全或部分精通管理科学领域的咨询公司当前是一个处于增长中的行业。

### 管理科学运用科学方法

管理科学主要以数学和计算机等领域为基础，它还以社会科学为基础，尤其是经济学。既然管理科学研究组织的实际管理问题，管理科学专家应该在企业管理的各个功能领域进行严格的训练。

在大多数情况下，管理科学小组在研究中会力行科学方法，也就是说管理科学小组会强调进行包括仔细的数据收集的系统化的考察、对问题的假设进行发展和检验（一般是数学

模型)以及应用合理的逻辑进行进一步的分析。

当管理科学小组实施系统化的考察时,一般会按照下列步骤(交叉的)展开。

**步骤1:定义问题和收集数据** 这一步中,管理科学小组会向管理者咨询、鉴别所要考虑的问题以及确定研究的合理目标。然后管理科学小组在组织的关键人物的协助下一般要在收集与问题相关的数据上花费长得惊人的时间。通常遇到的困难是某些关键数据不是很模糊就是全然不知。这就有必要安装计算机管理信息系统。

幸运的是,近年来信息技术领域的迅速发展使可供管理科学小组使用的数据在质量上和数量上都取得了巨大的进步。信息技术公司往往能够提供管理科学小组所需的计算资源和数据。因此,管理科学小组经常与信息技术小组有密切的合作。

**步骤2:构建模型(一般为数学模型)** 模型,或者抽象化的表述,是日常生活的必要组成部分。通常的例子如模型飞机、雕像、地球仪等。同样,通过原子模型、基因结构模型、表达运动物理定律和化学反应的数学等式、图、组织图表和工业会计系统模型,模型在科学与商业中起着重要的作用。这些模型在抽象研究事物的本质、表明事物间的相互关系和促进分析等方面的价值是无法估量的。

数学模型也是抽象化的表述,但它是通过数学符号和表达式进行表述。物理定律 $F=ma$ 与 $E=mc^2$ 是我们所熟悉的例子。同样,商业数学模型也是一些有描述问题本质的等式和相应数学表达式组成的系统。

随着功能强大的电子表格技术的出现,电子表格模型被广泛应用来分析管理问题。电子表格模型在一种有利于成功分析问题的整合方式的表格上设置相关数据、绩效度量及其相互关系等。电子表格常常还采用相应的数学模型来进行辅助分析,但数学模型是在后台的,所以你可以专注于对问题的分析。

建模过程是一项创造性的工作。在处理实际管理问题中(与教科书里简化抽象的案例不同)一般没有一个惟一正确的模型,而是有多种不同的处理方案。建模过程通常还是一个演进的过程,开始是用简单的"动词模型"对问题的本质下定义,然后渐渐演化成为更趋完整的数学模型(或许是电子表格的形式)。

在本节的后一部分我们将进一步描述和阐明数学模型。

**步骤3:从模型中形成一个对问题进行求解的基于计算机的程序** 设计完好的数学模型的漂亮之处在于它能在计算机上运行数学程序对问题进行求解。这些程序往往在计算机上完成,因为计算过于繁复。在某些情况中,管理科学小组需要编写程序,在其他情况中,能找到对模型进行求解的标准软件包。当数学模型编到电子表格中后,电子表格一般就包含了求解模型的一个求解器(Solver)。

**步骤4:测试模型并在必要时进行修正** 现在模型能够求解了,管理科学小组需要对模型进行仔细检验和测试以保证对实际问题进行了充分精确的表达。必须提许多问题,或许是在对问题尤其熟悉的其他人的帮助下。所有相关的因素和相互关系是否已被精确地编制进了模型?模型提供合理的解了吗?模型在过去的情形下应用时,模型的解比实际发生的有改善吗?当有关成本和收入的假设改变时,解是以一种近乎合理的方式改变吗?

**步骤5:应用模型分析问题以及提出管理建议** 为了分析问题,管理科学小组现在准备对问题进行求解了,或许在一系列的假设之下。然后将相应的建议提交给管理者,管理者必须对如何处理问题作出决策。

如果模型在不断发展的基础上重复应用,指导决策,管理科学小组还可以发展出一个决策支持系统。这是一个辅助管理决策制定的交互式的基于计算机的系统。系统从数据库或管理信息系统中读取数据,然后对管理者提出的各种模型进行求解。

**步骤 6:帮助实施被管理者采纳的小组建议**　一旦作出管理决策,管理科学小组一般会被要求来帮助监督新程序的实施。包括提供管理运营的某些信息以及专注于正在发生的转变基本原理管理的人员。管理科学小组必须确保新的运营系统与他们设计并得到管理者同意的建议一致。如果实施成功,新系统或许会使用多年。考虑到这一点,小组要监督新系统的实施并且确定出将来要进行的修正。

### 管理科学考虑定量因素

许多管理问题与生产数量、收入、成本和资源的可得数量等定量因素有关。通过把这些定量因素编入数学模型然后应用数学程序对模型进行求解,管理科学提供了一个独特的、功能强大的分析此类管理问题的方法。尽管管理科学考虑组织的实际管理,包括相应的定性因素,但它特殊的贡献在于处理定量问题的独特能力。

下面讨论的特殊产品公司的例子会体现管理科学是如何考虑定量因素的。

### 问题回顾

1. 管理科学学科在什么时候开始有了快速的发展?
2. 在商学院以外还广泛使用的对管理科学学科的传统叫法是什么?
3. 对于辅助管理者的决策制定,管理科学研究提供给管理者什么?
4. 管理科学特别是以哪些科学领域和社会领域作为基础?
5. 什么是决策支持系统?
6. 与管理问题有关的一般定量因素有哪些?

## 1.2　一个阐述管理科学方法的例子:盈亏平衡分析

特殊产品公司生产在商店销售的昂贵而不常见的礼品,礼品是为那些已经几乎什么都有的富人生产的。公司研发部最新的产品计划是限量版落地摆钟(limited edition grandfather clock)。公司管理部门需要决定是否生产这个新产品,如果生产的话要生产多少。在作出决策之前,可以获得一个销售额的预测。管理者希望作出能使公司利润最大化的决策。

> 不随产量变动的成本称为固定成本,随产量变动的成本称为变动成本。

如果公司生产该产品,设置生产设施的固定成本为 50000 美元(注意:如果决定不生产该产品,则此项支出不会发生。因为不会设置该设施)。此外,还有变动成本。每生产 1 个单位产品的变动成本为 400 美元(这里每生产 1 单位附加的 400 美元称为边际成本)。每销售出 1 只落地摆钟会给公司带来 900 美元的收入。

### 用数学方式描述问题

管理者所要作出的是如下决策。

决策:如果要生产,生产多少落地摆钟?

因为这个数字尚不得知,我们引入代数变量 $Q$ 来表示这一数量。即:

$$Q = \text{落地摆钟的生产数量}$$

这里 $Q$ 是模型的决策变量。自然 $Q$ 不能超过预测的市场需求数量。如果 $Q$ 为 0 表示不生产该产品。在这种情况下,没有任何成本和收入会发生。

目标是选择 $Q$ 的值使公司从该产品中所获利润最大化。管理科学方法建立一个数学模型,通过建立用变量 $Q$ 表示利润的等式来解决此问题。为此,首先我们必须建立用 $Q$ 表示总成本和收入的等式。

如果 $Q=0$,没有成本支出。当 $Q>0$ 时,固定成本和变动成本同时发生。

$$\text{固定成本} = 50000 \text{ 美元} \quad (\text{当 } Q>0)$$
$$\text{变动成本} = 400Q \text{ 美元}$$

所以总成本是:

$$\text{总成本} = \begin{cases} 0 & \text{如果 } Q=0 \\ 50000 \text{ 美元} + 400Q & \text{如果 } Q>0 \end{cases}$$

因为每售出一只摆钟的收益是 900 美元,所以总收入可以表示为:

$$\text{总收入} = 900Q \text{ 美元}$$

因此,生产和出售摆钟所获得的利润可表示为:

$$\text{利润} = \text{总收入} - \text{总成本}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{如果 } Q=0 \\ 900Q \text{ 美元} - (50000 \text{ 美元} + 400Q \text{ 美元}) & \text{如果 } Q>0 \end{cases}$$

因为 $900Q - 400Q = 500Q$(美元)

$$\text{利润} = -50000 \text{ 美元} + 500Q \text{ 美元} \quad \text{如果 } Q>0$$

## 分析问题

最后一个等式表明新产品方案的吸引力主要取决于 $Q$ 的值,也就是落地摆钟的销售数量。$Q$ 值小意味着公司损失(负利润),而很大的 $Q$ 值将会给公司创造正利润。例如,比较一下 $Q=20$ 和 $Q=200$ 时利润的区别。

$$\text{利润} = -50000 + 500(20) = -40000(\text{美元}) \quad \text{如果 } Q=20$$
$$\text{利润} = -50000 + 500(200) = 50000(\text{美元}) \quad \text{如果 } Q=200$$

图 1.1 画出了对于不同 $Q$ 值的公司总成本和总收入。注意到成本线与收入线在 $Q=100$ 处相交。对所有 $Q<100$,成本超过收入,两直线的相交区域代表公司的损失。对所有 $Q>100$,收入超过成本,两直线的相交区域现在代表公司的盈利。在 $Q=100$ 时,利润为 0。由于 100 单位是公司产品新方案既不盈利也不亏损的生产和销售量,这个数量称为盈亏平衡点(break-even point)。必须超过这个数量才值得引入新产品。因此关键的问题是销售预测的数额是在盈亏平衡点之上还是之下。

图 1.1 用图形方法(graphical procedure)找到了盈亏平衡点,找平衡点的另一个方法为

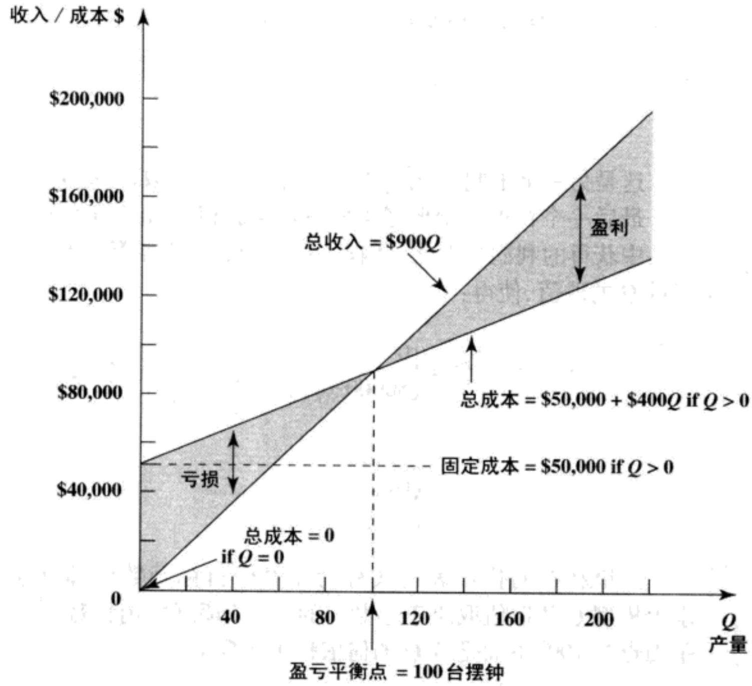



**图 1.1**　特殊产品公司的盈亏平衡分析表明成本直线与收入直线在 $x=100$ 时相交，所以这个值是新产品方案的盈亏平衡点。

代数方法(algebraic procedure)。因为在盈亏平衡点处利润为 0，我们要求解使下面等式成立的 $Q$ 的取值：

$$利润 = -50000\ 美元 + 500Q\ 美元 = 0$$

因此：

$$500Q = 50000$$

$$Q = \frac{50000}{500}$$

$$Q = 100$$

## 关于该问题的完整数学模型

前面的分析用了基本的数学模型——用 $Q$ 来表示利润的等式。在分析中隐含了一些附加因素可以构造一个更完整的数学模型。

> **约束条件**
> 数学模型中对决策变量可能取值进行限制的不等式或等式。

其中两个因素是对 $Q$ 的取值的约束。一是摆钟的生产数量不能小于 0，因此：

$$Q \geq 0$$

是完整的数学模型的限制条件之一。另外一个限制条件是 $Q$ 的取值不能超过能够售出的摆钟的数量。因为销售预测尚未获得，我们用 $s$ 代表这个目前未知的值。

$s$ = 预测所能售出的落地摆钟数量(目前尚未知)

因此有:

$$Q \leqslant s$$

**参数**
数学模型中的变量被称为参数。

这是另一个限制,其中 $s$ 是模型中的一个参数,它的值还没确定。

最后一个在模型中要考虑的因素是:管理者的目标是要使公司从新产品中获得的利润最大化。因此,这个问题的全部数学模型是找到决策变量 $Q$ 的取值,使得:

$$\text{利润最大化} = \begin{cases} 0 & \text{如果 } Q = 0 \\ 50000\text{ 美元} + 500Q\text{ 美元} & \text{如果 } Q > 0 \end{cases}$$

其中

$$Q \leqslant s$$
$$Q \geqslant 0$$

**目标函数**
目标函数是模型中根据决策变量作出的绩效度量的数学表达式。

这里利润的代数表达式称为模型的目标函数(objective function)。求解模型 $Q$ 的取值取决于参数 $s$ 的设置(预测的销售数量)。由于盈亏平衡点为 100,下面是解 $Q$ 如何依赖于参数 $s$ 的:

**数学模型的解**

$$\text{盈亏平衡点} = \frac{50000\text{ 美元}}{900\text{ 美元} - 400\text{ 美元}}$$

如果 $s \leqslant 100$,则设置 $Q = 0$

如果 $s > 100$,则设置 $Q = s$

因此,只有在销售数量超过盈亏平衡点时企业才值得引入新产品。

## 数学模型的敏感性分析

数学模型只是问题的一个近似求解。比如,模型中的一些数字在很多时候只是一个估计值,不可能在当时就被准确估计。

上面的数据模型所根据的四个数据只是估计值——固定成本为 50000 美元,边际成本 400 美元,单位收入 900 美元以及销售预测(在取得之后)。管理科学往往花很多时间研究如果一个估计值发生了偏差,将会给模型带来怎样的变化。这被称为敏感性分析。

**敏感性分析**
因为估计可能有错,敏感性分析用来检查当估计值错误时对模型造成的影响。

为了帮助你更直接方便地对此模型进行敏感性分析,我们在 www.mhhe.com/hillier2e 网站的管理科学互动模型组上提供了盈亏平衡分析模型(在 CD-ROM 中包含了所有这些模型组)。那里预设的模型就是特殊产品公司的例子。因此,你马上就能看到图 1.1 的副本。按照指示,你能方便地拖动固定成本线和收入线来更改固定成本、边际成本或单位收入。你将很快看到这些成本或收入的值发生变动时给盈亏平衡点带来的变化。比如,如果固定成本从 50000 美元变为 75000 美元,则盈亏平衡点变为 150,如图 1.2 所示。我们希望你使用盈亏平衡分析模型来看看其他一些变化的效果。

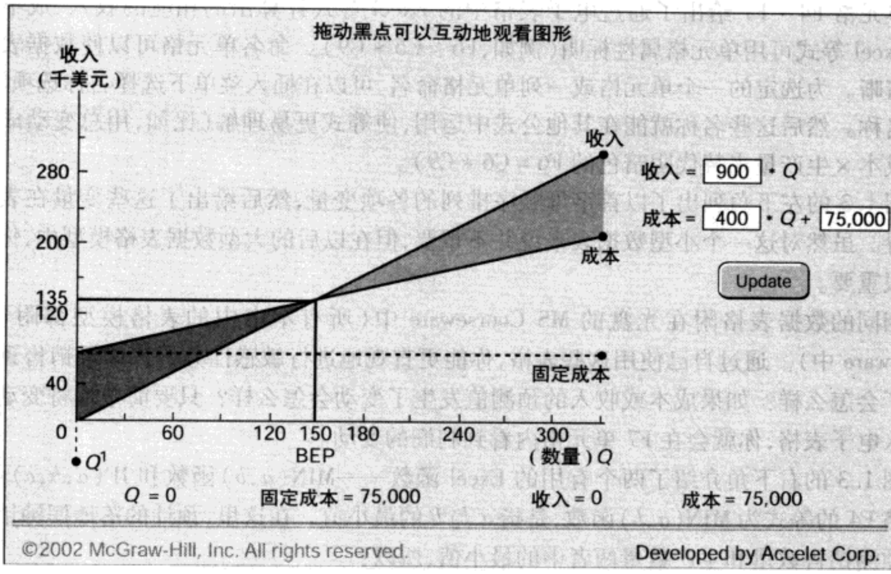



图 1.2 将固定成本从 50000 美元变为 75000 美元后盈亏平衡分析模型。

## 电子表格模型

你会通过整本书发现,电子表格提供了运用管理科学方法来建模和分析问题的方便途径。这对特殊产品公司的例子也是一样的,我们现在就会得到证实。

图 1.3 是在获知落地钟摆的销售预测数量是 300 单位情况下的数据表格。问题的数据设置在单元格 C4 – C7。单元格 C9 记录生产数量决策的试算值。许多值会被试算,图中表示的是一个特定的试算值 200。

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Special Products Co. Break-Even Analysis | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | Data | | | Results |
| 4 | | Unit Revenue | $900 | | Total Revenue | $180,000 |
| 5 | | Fixed Cost | $50,000 | | Total Fixed Cost | $50,000 |
| 6 | | Marginal Cost | $400 | | Total Variable Cost | $80,000 |
| 7 | | Sales Forecast | 300 | | Profit (Loss) | $50,000 |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | Production Quantity | 200 | | | |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| FixedCost | C5 |
| MarginalCost | C6 |
| ProductionQuantity | C9 |
| Profit | F7 |
| SalesForecast | C7 |
| TotalFixedCost | F5 |
| TotalRevenue | F4 |
| TotalVariableCost | F6 |
| UnitRevenue | C4 |

| | E | F |
|---|---|---|
| 3 | | Results |
| 4 | Total Revenue | =UnitRevenue * MIN(SalesForecast, ProductionQuantity) |
| 5 | Total Fixed Cost | =IF(ProductionQuantity > 0, FixedCost, 0) |
| 6 | Total Variable Cost | =MarginalCost * ProductionQuantity |
| 7 | Profit (Loss) | =TotalRevenue – (TotalFixedCost + TotalVariableCost) |

图 1.3 特殊产品公司问题的电子表格模型

单元格 F4 - F7 给出了通过电子表格中的 Excel 等式计算出的相应的收入、成本和利润。Excel 等式可用单元格属性标明(例如,F6 = C6 * C9)。命名单元格可以使数据表格模型更清晰。为选定的一个单元格或一列单元格命名,可以在插入菜单下选择名称选项,然后输入名称。然后这些名称就能在其他公式中运用,使等式更易理解(比如,用总变动成本 = 边际成本 × 生产量来替代阴暗色的 F6 = C6 * C9)。

图 1.3 的左下角列出了以首字母顺序排列的各项变量,然后给出了这些变量在表格中的位置。虽然对这一个小型数据表来说并不重要,但在以后的大型数据表格模型中,你会发现这很重要。

相同的数据表格附在光盘的 MS Courseware 中(所有本书中的表格模型都附在 MS Courseware 中)。通过自己使用这些表格,你能更直观地进行敏感性分析。如果销售预测数减少了会怎么样?如果成本或收入的预测值发生了变动会怎么样?只要简单地将变动的数据输入电子表格,你就会在 F7 单元格内看到利润的变动。

图 1.3 的右下角介绍了两个有用的 Excel 函数——MIN($a$,$b$)函数和 IF($a$,$b$,$c$)函数。单元格 F4 的等式为 MIN($a$,$b$)函数,是指 $a$ 与 $b$ 的最小值。在这里,预计的落地摆钟销售数量为预测销售数量和生产数量两者中的最小值,所以:

F4 = 单位收入 * MIN(预测销售数量,生产数量)

进入单元格 F4 的是单位收入(C4) * 预测销售数量(C7)与单位收入(C4) * 生产数量(C9)两者中的最小值。

再注意到单元格 F5 的等式使用的是 IF($a$,$b$,$c$)函数,它表示以下意思:如果表达式 $a$ 为真,值为 $b$,否则值为 $c$。因此:

F5 = IF(生产量 >0,固定成本,0)

也就是说如果生产量(C9) >0(开始生产),进入单元格 F5 的是固定成本(C5),否则进入的是 0(没有生产而避免了固定成本)。

尽管在图 1.3 的电子表格中可以试算许多生产数量值,它并不直接意味着生产数量就应是那么多。图 1.4 显示了电子表格可以添加其他规定而进行扩展。像图中底部等式所表示的,单元格 F9 通过固定成本(50000 美元)除以落地摆钟单位净利润(500 美元)来计算盈亏平衡点,这里净利润是通过单位收入(900 美元)减去边际成本(400 美元)得到。既然预测销售数量 300 超过了盈亏平衡点 100,这个预测量就进入了单元格 C9。

如果需要的话,盈亏平衡分析的数学模型可以通过要求进入单元格 C9 的生产数量模型的解全部编制入电子表格。这可以通过以下等式来实现:

C9 = IF(销售预测量 > 盈亏平衡点,销售预测量,0)

然而,引入这一等式的弊端是它消除了其他或许感兴趣的生产数量的可能。例如,如果管理者对预测的销售数量不是很有信心,而且想使落地摆钟的生产数量超过销售数量的风险最小化,将会考虑生产数量小于预测的销售数量。例如,或许会取到图 1.3 中单元格 C9 所示的试算值。对于任何一个管理科学的应用,数学模型会给管理者提供有用的指导,但管理者必须要在对模型中可能没有包括的因素进行考虑后才作出最后决策。

就像这里阐述的,数学模型编制入了电子表格,这种数学模型通常称为电子表格模型(spreadsheet model)。全书中你会看到大量电子表格模型的例子。

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Special Products Co. Break-Even Analysis | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | Data | | | Results |
| 4 | | Unit Revenue | $900 | | Total Revenue | $270,000 |
| 5 | | Fixed Cost | $50,000 | | Total Fixed Cost | $50,000 |
| 6 | | Marginal Cost | $400 | | Total Variable Cost | $120,000 |
| 7 | | Sales Forecast | 300 | | Profit (Loss) | $100,000 |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | Production Quantity | 300 | | Break-Even Point | 100 |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| BreakEvenPoint | F9 |
| FixedCost | C5 |
| MarginalCost | C6 |
| ProductionQuantity | C9 |
| Profit | F7 |
| SalesForecast | C7 |
| TotalFixedCost | F5 |
| TotalRevenue | F4 |
| TotalVariableCost | F6 |
| UnitRevenue | C4 |

| | E | F |
|---|---|---|
| 3 | | Results |
| 4 | Total Revenue | =UnitRevenue * MIN(SalesForecast, ProductionQuantity) |
| 5 | Total Fixed Cost | =IF(ProductionQuantity > 0, FixedCost, 0) |
| 6 | Total Variable Cost | =MarginalCost * ProductionQuantity |
| 7 | Profit (Loss) | =TotalRevenue – (TotalFixedCost + TotalVariableCost) |
| 8 | | |
| 9 | Break-Even Point | =FixedCost/(UnitRevenue – MarginalCost) |

图 1.4　求解计算盈亏平衡点数学模型的图 1.3 电子表格的扩展

## 问题回顾

1. 新产品的生产数量与盈亏平衡点如何进行比较以使引入新产品是值得的？
2. 在特殊产品公司的完整数学模型中除了利润等式外，还有什么因素是要考虑的？
3. 敏感性分析的目的是什么？
4. 如何利用数据表格进行敏感性分析？
5. Excel 函数——MIN($a$,$b$)函数的作用是什么？
6. Excel 函数——IF($a$,$b$,$c$)函数的作用是什么？

## 1.3　管理科学的影响

管理科学对改善全世界大量组织的效率方面已有深远的影响。在这一进程中，管理科学对许多国家经济生产力的提高一直起着重要的贡献。

说明管理科学影响的最好方式是介绍管理科学的实际应用和实际应用已产生的效益。因此，全书中你会看到大量实际应用的例子（特别在后面的章节中）。其中一些例子描述了众多不同的组织是如何应用管理科学的，另一些是已经获奖的尤其值得关注的应用。

为管理科学实践者颁发的最负盛名的奖项是每年举行的为管理科学成就而设立的弗兰茨·厄德曼（Franz Edelman）奖。这些奖项授予全世界年度管理科学的最佳应用。评奖活动由国际运筹学与管理科学协会（INFORMS）以及它的管理科学实践学会（College for the Practice of the Management Sciences）联合发起。

每年都有大量入围者参与竞争，经过艰苦的评审程序后，大约有六位优胜者获奖，一等奖的奖金大约 10000 美元，其他获奖者获得 10000 美元以下的奖金。比奖金更为重要的是

成为获奖者的声誉。Interfaces 期刊的一整期(目前为第二年的首期)专门用于发表详细的获奖应用的文章。

表 1.1 和表 1.2 是将会在以后的章节中讨论的那些获奖应用的预览。表 1.1 提供了那些至今还有价值的经典应用(1990 年以前实施的),表 1.2 专注于在 20 世纪 90 年代进行的管理科学研究。每张表的第三列显示的是那些研究在 Interfaces 上详细介绍的期刊号,第四列显示了那些研究将会在书中进行讨论的章节,因为那是对相应章节内容的应用。最右边的一列表示这些研究所带来的每年所节省的花费。此外,表中没有列出的另一项收益(例如改善的客户服务和更好的管理控制)有时比财务收益显得更为重要。

以后的章节中还讨论了许多没有获奖的一些管理科学的实际应用,这些平常的应用常常比获奖的应用取得更大的收益。然而,表中最后一列数字准确地体现了设计完好的大型管理科学研究有时会产生的巨大影响。

在网站上你还能看到 80 年代到 90 年代间在边缘科学中发表的文章。所以,本书网站(www. mhhe. com/hillier2e)的一个特点就是提供了连接到书中所提过的那些管理科学实际运用文章的链接,包括在表 1.1 和表 1.2 中提到的那些文章。这些文章能在 www. mhhe. com/hillier2e/articles 中下载。

**表 1.1 一些经典的管理科学获奖应用**

| 组　织 | 应　用 | Interface 期刊号 | 讨论的章节 | 每年节支(美元) |
|---|---|---|---|---|
| 联合航空公司 | 为满足乘客需求的以最低的成本进行订票和机场的工作班次排程 | 1 ~ 2/1986 | 2,4,13,14 | 600 万 |
| Citgo 石油公司 | 优化炼油运作以及产品的供应、配送和营销 | 1 ~ 2/1987 | 2,4,7 | 7000 万 |
| 旧金山警署 | 用计算机系统最优排程和巡警设置 | 1 ~ 2/1989 | 9 | 1100 万 |
| 荷玛特发展公司(Homart Development Co.) | 商业区和办公楼销售的最优化安排 | 1 ~ 2/1987 | 9 | 4000 万 |
| AT&T | 为公司商业用户的电话销售中心的优化选址 | 1 ~ 2/1990 | 9 | 4.06 亿,更多的销售 |
| 美国石油公司 | 确定和评价公司产品商业化的新战略 | 12/1982 | 11 | 1000 万 |
| 美国邮政服务公司 | 邮件自动化方案的技术经济分析 | 3 ~ 4/1987;<br>1 ~ 2/1992 | 11<br>15 | 2 亿 |
| 标准品牌公司 | 控制 100 种成品的库存(安全库存、再订购点和订购量) | 12/1981 | 18 | 380 万 |
| Hydroeléctrica Español | 应用统计预测管理水力发电的水库系统 | 1 ~ 2/1990 | 13 | 200 万 |
| 施乐公司 | 对维修用户机器的战略进行修正以缩短反应时间和改进维修人员的生产率 | 11/1975,第二部分 | 14 | 生产率提高 50% 以上 |

**表 1.2　自 1990 年以来的管理科学获奖应用**

| 组　织 | 应　用 | Interface 期刊号 | 讨论的章节 | 每年节支(美元) |
|---|---|---|---|---|
| 宝洁公司 | 重新设计北美生产和分销系统以降低成本、改进市场进入速度 | 1~2/1997 | 6 | 2 亿 |
| 法国国家铁路 | 制定最佳铁路时刻表和调整铁路日运营量 | 1~2/1998 | 7 | 1500 万,更多年收入 |
| 新西兰航空 | 创立最小飞行成本航员责任制 | 1~2/2001 | 9 | 670 万 |
| Grantham, Mayo, Van Otterlee and Company | 用有限的股票和交易创造最佳投资组合 | 1~2/1999 | 9 | 400 万 |
| Sears, Roebuck | 制定家庭运送服务的最佳路线和时间表 | 1~2/1999 | 9 | 4200 万 |
| 南非国防部 | 国防设施和武器系统规模与状态的重新优化设计 | 1~2/1997 | 9 | 11 亿 |
| 数字设备公司 | 重构供应商、工厂、分销中心、潜在厂址和市场区域的全球供应链 | 1~2/1995 | 9 | 8 亿 |
| Reynolds 金属制品公司 | 自动化来自超过 200 个工厂、仓库和供应商的货物装载的调度系统 | 1~2/1991 | 9,15 | 700 万 |
| 中国 | 为满足国家未来能源需求的大型项目的优选和排程 | 1~2/1995 | 9 | 4.25 亿 |
| Delta 航空公司 | 超过 2500 个国内航线的飞机类型配置来最大化利润 | 1~2/1994 | 9 | 1 亿 |
| 美洲航空公司 | 为机组人员和服务人员优化配置航行支线的顺序 | 1~2/1991 | 9 | 2000 万 |
| IBM | 重组它的全球供应链,在保持最小库存的同时更快满足客户 | 1~2/2000 | 19 | 第一年 7.5 亿 |
| 美洲航空公司 | 设计票价结构、订票和协调航班的系统来增加收入 | 1~2/1992 | 12,13 | 5 亿,更多收入 |
| Merit 青铜制品公司 | 安装统计销售预测和成品库存管理系统来改进客户服务 | 1~2/1993 | 13 | 更佳的服务 |
| Taco Bell | 优化员工安排以最小成本提供客户满意服务 | 1~2/1997 | 13,15 | 1300 万 |
| L. L. Bean 公司 | 为一个大型呼叫中心优化配置电话干线、接收台和电话代理 | 1~2/1991 | 14 | 950 万 |

（续表）

| 组　织 | 应　用 | Interface 期刊号 | 讨论的章节 | 每年节支(美元) |
|---|---|---|---|---|
| 纽约市 | 详细检查从传讯到被捕的程序以缩短等待时间 | 1～2/1993 | 14,15 | 950 万 |
| AT&T | 为指导商业用户设计呼叫中心开发了一个基于个人计算机的系统 | 1～2/1993 | 14,15 | 7.5 亿 |
| 惠普公司 | 重新设计打印机组装线缓冲的大小和位置来达到产量要求 | 1～2/1998 | 15 | 2.8 亿，更多收入 |

**问题回顾**

1. 管理科学获奖应用为企业和组织所带来的每年节省开支的顺序是怎样的？

## 1.4 本书的一些特色

本书的重点是要教导未来开明的管理者需要从管理科学课程中学习什么，不是要训练技术分析师。这一重点使本书包括了许多特点，我们希望你会喜欢。

本书一个特色是全书围绕建模作为管理决策制定的辅助。这与管理者特别相关。尽管他们可能不用这一术语，但所有管理者经常利用至少是非正规的模型（对问题的本质进行抽象以求更好地进行分析），所以多学习一些建模的艺术是重要的。既然管理者是发动其他人来进行大型的管理科学研究，他还需要能够辨认出进行管理科学研究会有帮助的各种管理问题。因而，将来的管理者不仅应该掌握辨认什么时候管理科学可以得到应用的能力，而且还要掌握对模型分析得出的结果进行正确解释的能力。所以，在本书中我们不是把大量的时间放在数学理论、求解程序和电子表格操作上，而是把重心放在建立模型、模型的用处和对模型结果的分析上。本书将介绍大量不同类型的模型。

另一个特色是在应用的全过程中重点强调案例研究，用一种有趣的方式更好地阐述管理科学观点。几乎每章都至少有一个在现实框架下介绍和阐明涉及该章知识应用的案例。在有些章节中，整章都围绕一个案例研究展开介绍。尽管比实际案例要小且简单（为了保持明晰），但这些案例是以需要进行较大的管理科学进行研究的实际应用为模板的。因此，这些案例传达了案例研究的全过程、一些易犯的错误，还能为管理科学小组和管理者作出决策起到补充作用。

为了补充这些案例研究，几乎每章最后还大约有两个主要案例，这些案例可以作为个人单独完成作业、小组项目和课堂案例进行研究。

本书还把重点放在介绍管理科学各种模型和技术的广泛应用上。这些应用领域涉及大量不同组织的各个商业功能部门。

此外，我们试图对管理科学在实际中的应用提供一个广阔的视角。为了掌握一系列技术而做教科书的习题容易迷失自己的方向。因此，我们在从掌握技巧到洞察更大的问题上进行了一些转换。案例研究、案例和对实际应用的描述是这些努力的组成部分。我们还对实际中确实是怎么发生的做了进一步的描述。我们给出了求解管理科学模型的一些观点，

包括实际中被解决的大量问题，但是我们不想你被没有必要知道的细节所烦扰。我们指出了各种不同模型和技术正在被广泛地使用，还指出了一些技术的缺陷以及有哪些新的发展正在克服这些缺陷。

本书最后的一个特色是软件的应用。我们将描述和举例说明怎样使用当今重要的电子表格软件包——Excel 以电子表格形式建立管理科学模型。一些模型用标准 Excel 就能解决，但本书中更多的模型需要用加载宏的 Excel 解决。

本书附带的光盘中包含管理科学的课件。这一课件包括电子表格、几个 Excel 加载宏、Microsoft Project 以及一系列管理科学互动模型，所有这些互动模型都在下面进行简要描述。

课件包括书中各章的 Excel 文件，每一文件一般包括几个电子表格，这些电子表格将会帮你对各章中不同的模型进行建立和求解。里面有两类电子表格：第一类，每次对可用 Excel 求解的例子进行介绍时，可以在课件中找到完整的电子表格模型和解，这为你建立电子表格解决相似的问题提供了方便的参考，甚至是有用的模板。第二类，对书中许多模型，提供了已经包括求解模型所需的所有方程式的模板文件，你只要简单地为模型输入数据就能够进行求解。

Solver Table 是作者创建的对最优化问题的敏感性分析进行自动求解的 Excel 加载宏。这个加载宏会在好几章中被用到，特别是第 5 章。

在标准 Excel 中包含了一个加载宏——Solver，被用来解决本书前半部分的大多数最优化模型。标准 Solver 是由 Frontline Systems 公司开发的。Frontline Systems 公司还开发了其他多个 Excel 的 Solver 加载宏。其中一个加载宏是 Premium Solver，它包括在管理科学的课件中。标准 Solver 和 Premium Solver 的一个主要区别就是 Premium Solver 包含了名为 Evolutionary Solver 的选项，它用来解决第 10 章中的各种附加的最优化模型。

在管理科学的课件中还包括了 3 个由迈克·米德尔顿教授创建的 Excel 加载宏。TreePlan 使你能够用 Excel 建立决策树，这在第 12 章中会提到。SensIt 用来创建一系列图表进行敏感性分析。在第 15 章和第 16 章中，我们会用到 RiskSim 来进行计算机仿真。

管理科学课件还包含几个由 Decisioneering 公司创建的 Excel 加载宏。Crystal Ball 大大简化了第 16 章中会提到的蒙特卡罗模拟。OptQuest 使你能够在仿真模型中进行最优化求解。最后，CB Predictor 是一个在预测方面很有用的工具，这在第 13 章中会提到。

Microsoft Project 的试用版也包括在管理科学课件中，这可以帮助进行项目管理。在第 8 章中我们会用到该软件。

如 1.2 节中所提到的，配合该书的另一个学习帮助是在本书的网站（www.mhhe.com/hillier2e）上提供的一系列管理科学互动模型。这一创新的工具使你能够更深入地进行管理科学研究的探索。为了方便起见，我们在管理科学课件的光盘中还提供了它的离线版本。

在软件的选择上，我们要指出的是 Excel 和它的求解器 Solver 不是为了处理有时在实际中需要的大型管理科学模型而设计的。功能更强大的软件包不是建立在电子表格上的，例如 CPLEX 或 IBM 的 OSL 通常是被用来处理大型的模型。然而主要是管理科学小组而不是管理者使用这些复杂的软件[包括编写模型语言（modeling languages）来帮助输入大的模型]。既然本书的目标读者主要是未来的管理者而不是未来的管理科学专家，我们不会要求你使用这些软件。

为了提醒你注意在管理科学课件中的相关资料，每章结尾有一个命名为“本章管理科学课件的学习辅助”的列表清单。

## 1.5 本章小结

管理科学是对与定量因素有关的管理问题通过应用科学的方法进行辅助管理决策制定的一门学科。学科快速发展始于20世纪40~50年代,计算机革命的爆发为学科的发展一直起着巨大的推动作用,目前进一步的推动力是电子表格软件的广泛使用,它大大地便利了管理者和其他人对管理科学的应用。

一项主要的管理科学研究包括进行仔细的数据收集的系统化考察、对问题的假设进行发展和检验(一般是数学模型)以及应用合理的逻辑进行进一步的分析。然后,管理科学小组向必须对如何解决问题作出决策的管理者提供建议。

一项典型的管理科学研究主要包括把定量因素编入数学模型(或许是编写进电子表格),然后应用数学程序对模型进行求解。模型用决策变量表示要作出的可量化的决策。目标函数表达了根据决策变量作出的相应的绩效度量。模型的约束条件表示对决策变量可能取值的限制。模型的参数是在目标函数和约束条件中出现的常数。为阐述数学模型,本章列举了一个有关盈亏平衡分析的例子。

管理科学对改善全世界大量组织的效率已有深远的影响。实际上,许多获奖应用已经为组织每年节省了几百万、几千万甚至几亿美元。

本书的中心放在一个未来开明的管理者需从管理科学课程中学习哪些内容。因此,本书是围绕模型的构建作为管理决策制定辅助的。许多案例研究(章节内容中)和案例(章节末尾)被用来更好地表达这些观点。

## 专业术语

**盈亏平衡点**(Break-even point):一个产品为了获取利润必须超过的生产和销售数量。(1.2节)

**约束条件**(Constraint):数学模型中对决策变量可能取值进行限制的不等式或等式。(1.2节)

**决策支持系统**(Decision support system):辅助管理决策制定的交互式计算机系统。(1.1节)

**决策变量**(Decision variable):表示可量化决策的代数变量。(1.2节)

**数学模型**(Mathematical model):一个抽象的表述,例如,商业问题用数学符号和表达式进行表述。(1.1节)

**模型**(Model):事件的抽象表述。(1.1节)

**管理科学课件**(MS Courseware):书后用软塑料包装的软件包的名字。(1.4节)

**目标函数**(Objective function):模型中根据决策变量作出的绩效度量的数学表达式。(1.2节)

**运筹学**(Operations research):在商学院以外还被广泛使用的管理科学的传统称谓。(1.1节)

**参数**(Parameter):数学模型中的几个常数。(1.2节)

**敏感性分析**(sensitivity analysis):分析预测的数字变动时给模型带来的影响。(1.2节)

**电子表格模型**(Spreadsheet model):一个抽象的表述,例如,商业问题在电子表格上用一种便于分析的方式进行展示。(1.1节)

## 本章管理科学课件的学习辅助

**"Ch. 1—管理科学简介"Excel 文件:**

特殊产品公司举例

**管理科学互动模型:**

盈亏平衡分析模型

# 习　题

1.1. 选择表 1.1 中所列的一个管理科学应用,阅读在相应 Interfaces 期刊上进行介绍的文章,撰写一页管理科学应用所取得的收益(包括非财务收益)的描述报告。

1.2. 与习题 1.1 一样的要求,选择表 1.2 中所列的一个管理科学应用进行描述。

1.3. 一家小公司的经理在考虑是不是要生产一种新产品,生产新产品会增加每月租赁特殊设备的租金 20000 美元。除了租赁费外,每个产品的生产成本为 10 美元。每售出一个产品可带来 20 美元的收入。

创建数学表达式:用每月生产和售出的产品数量来表示月利润。然后计算每月至少需要生产多少数量的新产品才能使公司盈利。

1.4. 续习题 1.3,销售预测得出每月能售出 4000 个新产品,这个预测非常可靠。但是对租赁成本、边际成本和单位收入的估计可能有所偏差。

用管理科学互动模型中的盈亏平衡分析模型进行如下的敏感性分析。

a. 为了使新产品盈利,租赁成本不能超过多少?
b. 为了使新产品盈利,边际成本不能超过多少?
c. 为了使新产品盈利,单位收入不能小于多少?

1.5. Toys R4U 公司的经营者在考虑是不是要为到来的圣诞节生产一种新玩具,节日过后这种新玩具就会停产。生产和推销这种产品的总成本为 500000 美元加上边际成本 15 美元,每售出一个新玩具会收入 35 美元。

a. 假设所有生产出来的玩具都能售出。写出用生产量表示利润的表达式。然后找出该问题的盈亏平衡点。
b. 假设售出的玩具数小于生产量。写出用销售数和生产数表示利润的表达式。
c. 根据问题 b 创建数据表格。
d. 根据条件生产量不应超过销售量写出数学表达式。

1.6. 准确的销售预测表明特殊产品公司(见 1.2 节)能够售出 300 台摆钟,显然已经能够推出新产品。但是经营者考虑到由于对固定成本、边际成本和单位收入的估算值的变化可能会引起结论的改变,因此希望在作出最后决定之前能够对这些变量进行敏感性分析。

用管理科学互动模型中的盈亏平衡分析模型进行如下敏感性分析:

a. 为了使生产摆钟盈利,最大的建立生产设施的固定成本不能超过多少?
b. 为了使生产摆钟盈利,最大的边际成本不能超过多少?
c. 为了使生产摆钟盈利,单位收入至少为多少?

1.7. 重新考虑在 1.1 节结尾介绍的特殊产品公司的问题:

现在有一更详细的调查提供了对问题中数据的更好的估计,实施生产限量版落地摆钟的固定成本的估计值还是 50000 美元,但新估计的边际成本为 500 美元,每销售一单位落地摆钟的收入现在估计为 700 美元。

a. 用图解方法找出新的盈亏平衡点。
b. 用代数方法找出新的盈亏平衡点
c. 用新数据写出问题的数学模型。
d. 在销售预测数量为 300 单位的条件下,将数学模型编入电子表格。使用这个电子表格模型找出盈亏平衡点,然后决定生产数量和模型显示的总利润。
e. 假如管理者担心销售预测可能太过乐观了,因此不想让生产数量超过 200 单位,使用 d 部分的电子表格决定应该生产的落地摆钟的数量以及相应的估计总成本。

1.8. Best-for-Less 公司以两个工厂为其零售经销商供货。工厂 A 下月会提供 30 船货物。工厂 B 尚未制定生产计划,但是它每月有生产 50 船货物的生产上限。经销商 1 下月已经接受了 40 船货物的订单。经销商 2 需要至少 25 船货物,如果能多一些当然更好。两个工厂的生产成本一样但是运输费不同。从每个工厂到经销商的每船货物的运输费由下表给出,同时还给出了其他一些数据。

| | 单位运输成本 | | 供　货 |
|---|---|---|---|
| | 经销商 1 | 经销商 2 | |
| 工厂 A | $700 | $400 | =30 船 |
| 工厂 B | $800 | $600 | ≤50 船 |
| 需要 | =40 船 | ≥25 船 | |

配送部经理詹尼弗·洛佩兹现在要决定每月从每个工厂运送到经销商处的货物数量。她的目标是使总运输成本最小。

a. 明确詹尼弗要做的决定。为每一个决定定义一个变量来表示。
b. 根据决策变量写出总运输成本的数学表达式。
c. 写出每个变量取值的限制条件的数学表达式。
d. 为詹尼弗的问题建立一个完整的数学模型。
e. 你认为詹尼弗的运输计划应该是怎样的？解释你的理由。然后用决策变量表示你的运输计划。

1.9. 水上运动公司很快会引进一款新型摩托艇。生产经理迈克·杰生现正在考虑这些摩托艇的船外马达到底是自己生产还是外购。自己生产这些马达需要 100 万美元的初始设备投入，另外每个马达的生产成本为 1600 美元。如果外购的话，马达的价格为 2000 美元。

迈克从市场部获得的初步信息是将有 3000 艘摩托艇能被售出。

a. 用数据表格表明迈克所面临的两种选择。应该选择哪一个？
b. 迈克从以前的经验中了解到初步的市场预测往往不是很可靠，因此他想知道如果市场预测发生很大变化时，对他的决策有何影响。确定一个生产和销售数量的盈亏平衡点，使在这一点上自己生产或外购的决策是一样的。

1.10. 重新考虑在 1.2 节结尾介绍的特殊产品公司的问题：

虽然公司对生产落地摆钟的大部分工作都能胜任，但目前缺少在一个关键领域的专门技术，即构造摆钟的计时装置。因此，管理部门在考虑把这部分工作外包给一个拥有这方面的专门技术以及已经有一些设备展开这类生产作业的公司。如果这样的话，特殊产品公司不会产生任何实施生产的固定成本，但会产生 650 美元的边际成本（包括付给外包公司的成本），生产和销售一个落地摆钟的收入还是 900 美元。如果公司还是什么都自己生产的话，就仍然适用 1.2 节中的数据。在获得潜在销量的分析后，管理部门相信 300 个落地摆钟是能够销售出去的。

管理部门现在要对自制（所有都自己内部生产）还是外购（外包计时装置的生产）哪个更好作出决策。

a. 使用电子表格描述和分析外购选择。显示相关的数据和财务结果，包括生产和销售 300 个落地摆钟的总利润。
b. 图 1.4 是对自制的分析，与 a 部分得出的结果相比较决定哪种选择更好。
c. 比较这两种方案的另一方法是找出生产与销售量的盈亏平衡点，如果生产数量小于销售数量则外购更好，如果生产数量大于销售数量则自制更好。首先，写出用生产数量表示自制与外购两种方案利润差异的表达式。因此，如果选择自制而不是外购，这一表达式应该显示利润增加，除非落地摆钟的生产量为 0，则增加的利润为 0，否则小于盈亏平衡点利润增加为负，大于盈亏平衡点利润增加为正。用这一表达式作为目标函数，写出决定是否自制问题的全部数学模型（包括约束函数），假如自制的话，要生产多少个计时装置（每个钟要一个计时装置）。
d. 用图解方法找出 c 部分描述的盈亏平衡点。
e. 用代数方法找出 c 部分描述的盈亏平衡点。
f. 用电子表格模型找出 c 部分描述的盈亏平衡点。公司应该怎样做呢？

PDG

CHAPTER

# 2 线性规划:基本概念

## 学习目标

完成本章学习后,你应该能够:

1. 解释什么是线性规划。
2. 明确在建立电子表格模型时必须回答的三个关键问题。
3. 知道用电子表格为线性规划问题建立模型时的四类单元格,并知道它们各自的作用。
4. 对于一个问题,能够建立基本的线性规划电子表格模型。
5. 能够根据线性规划电子表格模型写出它的代数形式。
6. 会运用图解法解决有两个变量的线性规划问题。
7. 运用 Excel 解决线性规划电子表格模型问题。

任何一个组织的管理通常都必须对如何向不同的活动分配资源的问题作出决策,以最好地达到组织的目标。线性规划是帮助管理这些决策的一个功能强大的问题解决工具。它可适用于营利性组织和非营利性组织,也适用于政府机构。向活动进行分配的资源可以是比如钱、不同的人员以及不同的机器和设备。在许多情况下,大量不同的资源必须同时进行分配,需要这些资源的活动可以是不同的生产活动(例如生产不同产品)、营销活动(例如在不同媒体做广告)、金融活动(例如进行资金投资)或者其他一些活动。所有这些类型的活动(以及其他)就会导致一些问题的产生,因为它们争夺同一资源。

在我们介绍的过程中你会发现对线性规划应用范围的这些描述还不是很广,一些应用超出了资源分配的范围,但是都涉及活动。因此,线性规划提及的主题就是要找出活动的最佳组合——做哪些以及做到什么程度。

与其他管理科学技术一样,线性规划也是应用数学模型对所研究的问题进行表述。线性(Linear)这个词是指模型中数学表达式的形式。规划(Programming)不是指计算机程序(Computer Programming),而本质上是计划(Planning)的同义词。因此,线性规

划是指用线性数学模型表示的活动计划。

因为线性规划是管理科学的重要组成部分，所以我们要用好几章的内容进行介绍。而且，如何应用线性规划的许多课程内容将会在其他管理科学技术的应用中继续下去。

本章主要介绍线性规划的基本概念。

## 2.1 线性规划的三个经典应用

为了给你一个线性规划在管理决策制定中所起作用的印象，我们将简短地描述一下它在三种实际情况下是如何得到应用的。每个都是经典的应用，它们是很多年前实施的，已经被视为线性规划将来应用的优秀标准。在你具备了线性规划的知识后，我们会在4.8节中再回顾并进行更详细的介绍。

### 确定潘得罗索工业公司的产品组合①

潘得罗索工业公司（Ponderosa Industrial）是一家墨西哥公司，截止到1998年的销售，公司生产了全国胶合板产量的1/4。与其他胶合板生产厂商一样，潘得罗索工业公司的许多产品根据厚度和所用木材的质量而有所不同。因为产品在一个竞争的环境中进行销售，产品的价格由市场决定，所以产品的价格每月都有很大的变化。结果导致每项产品对公司整体利润的贡献也有很大的变动。这样，在某个月中一个产品比另一个产品能赚取更多的利润，而在下个月的情况可能正好相反。所以每个月管理层面临的一个关键问题是选择产品组合（Product Mix）——每种产品各生产多少——以获取尽可能多的利润。这一选择是很复杂的，因为它需要考虑当前生产产品必须的各种资源的可得数量。六项最重要的资源为：（1）四种类型的原木（根据原木的质量区分）；（2）生产胶合板的两项关键作业的生产能力（模压作业和刨光作业）。

> 线性规划找到利润最多的产品组合。

从1980年开始，潘得罗索工业公司管理部门每个月使用线性规划指导下个月的产品组合决策。线性规划的数学模型考虑了这一决策的所有相关限制条件，包括生产产品所需的有限的资源可得数量。然后对模型求解，找出可行并且最大可能利润（largest possible profit）的产品组合。模型往往会在由市场决定的不同情景下进行多次求解，以获得最优的产品组合决策。线性规划还使经营者能够判断改变现有产量的某一特定资源的决策是否能够带来利润的增加。

在潘得罗索工业公司，线性规划的影响被报道是“惊人的”。它导致公司强调生产的原木产品类型有巨大的转换，改进的产品组合决策使公司的总利润增加了20%，线性规划的其他一些贡献包括更好的原材料利用、更好的资本投资和更好的人员使用。

### 联合航空公司的员工排程②

在航空行业生存，成本控制是关键。作为公司扩展的一部分，1982年联合航空公司的高层管理部门实施了一个成本控制项目，目标是通过更紧密地根据消费者的需求进行工作

① Asim Roy, Emma E. DeFalomir, and Leon Lasdon, "An Optimization-Based Decision Support System for a Product Mix Problem," Interfaces 12, no. 2 (April 1982), pp. 26–33. 这篇文章还可以在 www.mhhe.com/hillier2e/articles 下载。

② Thomas J. Holloran and Judson E. Bryn, "United Airlines Station Manpower Planning System," Interfaces 16, no. 1 (January-February 1986), pp. 39–50. 这篇文章还可以在 www.mhhe.com/hillier2e/articles 下载。

排程，以改进航班订票处和机场工作人员的利用。

那时，联航在其 11 个航班订票处有超过 4000 名的机票销售代表和支持人员，在 10 个最大的机场大约有 1000 名客户服务代表，有些是兼职的，每班 2 到 8 个小时不等，大部分是全职的，每班 8 小时或 10 小时，有许多个不同的上班时间。每个订票处都一天 24 小时营业（通过电话订票），各个重要的机场也如此。然而，每个地点提供所需水平服务的雇员数量在一天 24 小时中的变化很大，或许每过半个小时就会有很大的变化。

为了更有效率地满足服务需求，在每个地点为所有雇员设计工作排程是一个组合的梦魇。一旦一名雇员上了班，他（或她）就会工作一个班次（根据雇员 2 到 10 个小时不等），只有就餐和每隔两小时的短暂时间休息。给定 24 小时的一天中每半个小时间隔的服务所需的最小雇员数（每周 7 天里这个最小值天天有变化），在 7 天一周、24 小时一天中每个班次需要多少雇员并且何时上班呢？幸运的是，线性规划能解决这些组合梦魇问题。

> 线性规划能进行人员排程，以在最小的成本下为消费者提供所需的服务。

实际上，本书介绍的多个管理科学技术在规划系统中得到了应用以用来处理这些问题。预测（第 13 章）和排队模型（第 14 章）都可以用来确定每半小时间隔任务的最少雇员数。整数规划（第 9 章）可确定班次何时开始。但是，规划系统的核心是线性规划，它能进行所有实际的排程以在最小的劳动力成本下提供所需的服务，每个月会产生一个新的工作排程以反映实际情况的变化。

线性规划的这个应用据报道“不仅对联航的管理层和项目小组成员，而且对许多未曾听说过管理科学或数学模型的人有压倒一切的影响”。它获得了高级管理层、运营经理、相关雇员等人员的强烈好评。例如，一位经理描述排程系统为“魔术般的，……就好像消费者的排队正要变长的时候，新的工作人员就进来提供服务；就好像你认为工作强度在增大时，消费者就开始回家了”。

用货币来衡量，建立在线性规划基础上的计算机规划系统每年为联合航空公司在直接薪酬和津贴成本上节省了 600 万美元，得到的其他好处包括改善客户服务以及降低雇员的工作负担。20 世纪 90 年代早期经过一些升级以后，系统今天还在发挥与过去同样的效用。

## Citgo 石油公司的供应、配送和营销规划[①]

Citgo 石油公司专长于石油炼制和销售，20 世纪 80 年代中期，它每年的销售额有几十亿美元，是美国 150 大工业公司之一。

经过几年的财务亏损后，1983 年 Citgo 石油公司被 Southland 集团收购了，Southland 集团是 7－11 便利连锁店的拥有者（7－11 便利连锁店每年销售 20 亿加仑高质量的汽车燃油）。为了扭转 Citgo 石油公司的亏损局面，Southland 集团组建了一个由 Southland 集团人员、Citgo 石油公司人员和外部咨询顾问组成的任务小组，一位管理科学咨询顾问被任命为小组的负责人并直接向 Citgo 石油公司总裁和 Southland 集团董事长汇报工作。

1984 年和 1985 年间，任务小组应用各种管理科学技术对 Citgo 石油公司广泛的业务领

① Darwin Klingman, Nancy Phillips, David Steiger, Ross Wirth, and Warren Young, “The Challenges and Success Factors in Implementing an Integrated Products Planning System for Citgo,” Interfaces 16, no. 3 (May-June 1986), pp. 1－19. Also see Darwin Klingman, Nancy Phillips, David Steiger, and Warren Young, “The Successful Deployment of Management Science throughout Citgo Petroleum Corporation,” Interfaces 17, no. 1 (January-February1987), pp. 4－25. 这篇文章还可以在 www.mhhe.com/hillier2e/articles 下载。

域活动进行了分析,例如炼油、供应和配送、营销计划、应付和应收账款、库存控制和收购等领域。据报道,这些管理科学应用"转变了 Citgo 石油公司的经营方式以及带来了每年约 7000 万美元的利润增加"。

大部分增加的利润是由于应用了由任务小组开发的两个线性规划系统,一个称为"炼油 LP 系统"(LP 是线性规划的通用缩写),它改善了炼油的产出率、劳动成本的本质性下降和其他一些成本节支。炼油 LP 系统使管理部门能更有效率地运作 Citgo 石油公司的炼油作业(这是盈利还是亏损的重要取决因素),以至于 1985 年 7000 万美元的利润增加中有 5000 万美元是由于应用这一系统所创造的。

> 线性规划最优化每项产品的供应、配送和营销。

另一个线性规划系统是供应、配送和营销模型系统(或简称 SDM 系统)。引入系统多年后直至今日,Citgo 石油公司继续在使用该系统并且从系统中得到好处。它是以一类特殊的线性规划模型为基础,应用网络对所要研究的系统进行描述,这个模型是对 Citgo 石油公司全部营销和配送网络的一个表述。由于它引入了线性规划的一些新特征,我们会在第 4 章和第 7 章对更多的背景知识进行介绍后再来回顾 SDM 系统。

SDM 系统用来协调全美国 Citgo 石油公司每项产品的供应、配送和营销。管理部门应用这一系统作出许多决策,例如产品销往何处?以什么价格?在哪儿购买或贸易?购买或贸易数量多少?库存保持多少?以及各种运输方式各运输多少?线性规划指导这些决策的作出并且确定什么时候实施这些决策使 Citgo 石油公司的总成本最低(或总利润最大)。SDM 系统还用作"what-if"分析,管理部门可以探究如果情况发生了不是模型假设的变化时结果会发生怎样的变化。

SDM 系统大大改善了 Citgo 石油公司供应、配送和营销运作的效率,在不降低服务水平的同时产品库存有了巨大的下降。引入系统不久,石油产品的库存价值下降了 11650 万美元,与保管库存相关的资金的巨大下降导致每年这些借贷资金的利息花费大约节约了 1400 万美元,因而为 Citgo 石油公司增加了 1400 万美元的年利润。据估计,在协调、定价和采购决策上的改善又为公司至少增加了 250 万美元的年利润。

### 问题回顾

1. 线性规划指导了潘得罗索工业公司哪些每月管理部门都要面临的关键问题的决策制定?
2. 线性规划在潘得罗索工业公司的应用对公司的影响是什么?
3. 线性规划在联合航空公司中所描述的应用的目标是什么?
4. 线性规划在联合航空公司的应用对公司的影响是什么?
5. 在 Citgo 石油公司 SDM 系统用于协调哪些问题?
6. 线性规划在 Citgo 石油公司的应用对公司的影响是什么?

## 2.2 案例研究:伟恩德玻璃制品公司产品组合问题

杰姆·贝克很是兴奋,这时他所领导的小组已真正获得了最大成功。过去他们已有一些显著的成功,但是这次他感到尤为特别,当他把备忘录递交给高级管理层后几乎不能等待高层的反馈意见了。

作为伟恩德(Wyndor)玻璃制品公司新产品发展部经理的 7 年里,杰姆已经有一项出色的记录。尽管是小公司,但是凭着杰姆小组开发的创新产品,公司已经取得了相当大的增长。伟恩德公司总裁约翰·希尔已公开承认过杰姆在公司近来的成功中起了关键作用。

因此,6 个月之前约翰要求杰姆小组开发下列新产品时感觉很有信心:

- 8 英尺的铝框玻璃门
- 4 英尺 ×6 英尺的双把木框窗

尽管这些规格的门窗产品其他几家公司已有生产,约翰还是认为杰姆能施展他惯用的魔法在产品中引入使人兴奋异常的新特征,而这些新特征将会建立新的工业标准。

现在杰姆真是喜不自禁,因为他们已经开发出产品了。

## 背　景

伟恩德玻璃制品公司生产高质量的玻璃制品,包括工艺精湛的窗和玻璃门。尽管这些产品昂贵,但它们是为挑剔的客户提供的行业中最高可得质量的产品。公司有三个工厂:

工厂 1:生产铝框和五金件
工厂 2:生产木框
工厂 3:生产玻璃和组装窗与门

由于某些产品销售量的下降,高层管理部门决定调整公司的产品线。如果征得管理部门的同意,不盈利的产品要停止生产并撤出生产能力来生产杰姆小组开发的两个新产品。

8 英尺玻璃门需要工厂 1 和工厂 3 的一些生产能力,但不需要工厂 2 的生产能力。4 英尺 ×6 英尺的双把窗需要工厂 2 和工厂 3 的生产能力。

现在管理部门要考虑下列两个问题:

1. 公司是否应该生产这两个新产品?
2. 如果生产,两个新产品的产品生产组合如何?——每周分别生产多少数量?

## 管理层对问题的讨论

收到杰姆·贝克所写的两个新产品的备忘录,约翰·希尔召集了一次会议来讨论当前的问题。包括约翰和杰姆,制造副总裁比尔·塔斯托和营销副总裁安·莱斯特也参加了会议。

让我们偷听一下会议。

**约翰·希尔(总裁)**:杰姆、比尔、安,谢谢你们出席会议。杰姆,谢谢你出色的备忘录,我们都收到了。所提出的这两个新产品看起来确有前景。你向我们说说它们的特性。假定其他公司也有相似的产品,这两个产品凭什么能够脱颖而出使消费者愿意掏更多的钱来购买呢?请从玻璃门开始讲起吧。

**杰姆·贝克(新产品发展部经理)**:好的,我真不知道从哪里讲起。这个玻璃门具有许多特性,但我认为特别是三个特性能够引起消费者的驻足和注意。一个是这个玻璃门的隔热价值比市场上现有的任何一个门都要高得多。

**约翰**:它是如何实现的呢?

**杰姆**:用三种方式。第一种方式是我们使用了两面上光;第二种方式是我们在两面玻璃

之间充入了一种新的惰性气体，它的效果甚至比氩还要好，它很好地发挥了作用；第三种方式是为了对太阳照射和能量进行控制，我们还使用了一些特殊涂层和色料。

**约翰：**好极了，对众多消费者来说隔热价值是很重要的，那么要特别介绍的其他两个特性是什么呢？

**杰姆：**一个是我们正在使用的玻璃比一般的玻璃有更佳的紫外线防护能力，另一个是这种玻璃实际上很难打破，用大锤都不容易打碎它，有人在玻璃上行走或者一只鸟撞向玻璃，它都不会破碎。

**约翰：**这些是很好的卖点。现在向我们说说你们新的双把窗卖点的特性。

**杰姆：**那容易。首先这个窗具有刚才我对玻璃门所描述的所有三个特性。此外，木材的精细加工使保存极为长久，而且窗还有一个专门机关，使得它比一般的窗更容易滑动。

**约翰：**哇，那些是伟大的特性，但这些特性会使我们的产品定价比市场上的定价要高吗？

**杰姆：**那是最为关键的问题，我们一直在努力设计这些产品以使它们比其他公司生产的一般产品仅仅多花大约1000美元就能生产出来。

**约翰：**了不起。安，这些在市场上会有反应吗？这些是影响消费者需求的特性类型吗？

**安·莱斯特（营销副总裁）：**几个月前我们刚刚更新了这一问题上的市场调研。事实上，我们已提供给杰姆所有关键的发现，他已经努力使产品具有了消费者所需要的所有特性。假如按杰姆暗示的那个定价，毫无疑问，这些产品会卖得很好，会特别好。

**约翰：**好极了！杰姆，看来这段时间你已尽了最大的努力，这些将会是公司杰出的产品，祝贺你！

**杰姆：**谢谢！是我的小组在这个项目上的工作特别努力。

**约翰：**比尔，一有可能我们将加快开始生产这些产品，你认为我们大约可达到多大生产量。

**比尔·塔斯托（制造副总裁）：**由于我们停掉了一些产品的生产，所以确实有一些空闲的生产能力，但不是很多。我们应该能够每周对每种产品都生产几个。

**约翰：**就这么多吗？

**比尔：**是的，这些都是需要仔细制作的复杂产品，而且就如我说过的，我们没有很多空闲的生产能力。

**约翰：**安，我们每周能卖掉这几个产品吗？

**安：**那容易。

**约翰：**好，我希望六周内确定这些产品的开工日期，比尔、安，那可行吗？

**比尔：**可以。

**安：**我们必须马上拼命为这些产品制定正确的营销计划，但我们能够做到。

**约翰：**好。现在还有一个问题有待解决，只有这些有限的生产能力，我们要决定在两种产品间如何分配这些生产能力，我们是两种产品生产相等数量呢？还是较多地生产其中一个？甚至还是只尽可能地多生产一个产品，而另一个产品延迟一段时间生产？

**杰姆：**延迟一个产品生产，给我们的竞争对手一个比我们抢先赚取利润的机会是危险的。

**安：**我同意，而且，同时开展生产，从营销的角度看有一些好处，因为两种产品具有许多相同的特性，我们能为两种产品做组合广告，这会使得效果更好。

**约翰：**好，但两种产品怎样组合生产对公司最有利润呢？

**比尔**:我有一个建议。

**约翰**:什么建议?

**比尔**:过去一段时间,我们的管理科学小组已帮助我们作出了这类产品的生产组合决策,他们做得很好,他们收集了所有相关数据然后详细分析了问题,我发现他们的加入很有帮助,而这正合他们的胃口。

**约翰**:是的,你说的对。那是个好主意。就让我们的管理科学小组对这个问题展开工作,比尔,你会和他们协调一下吗?

**比尔**:那当然。

**约翰**:并且告诉他们在一个月之内要他们向我们报告他们的发现。

**比尔**:我会做的。

会议结束。

## 管理科学小组开始工作

项目开始时,管理科学小组与比尔·塔斯托一起花了大量的时间澄清了一般问题和管理层想要研究的特定问题。一个特别的考虑是要确定从管理层的观点出发的问题适当的目标。比尔指出约翰·希尔提出的问题是要确定对公司而言盈利最大的两种产品的生产组合。

因此,在比尔的同意下,管理科学小组定义了主要问题如下:

**问题**:两种新产品的生产率(每周生产数量)的哪种组合能最大化两种产品的总利润?

小组还总结认为应该考虑在三个工厂可得生产能力允许的两种新产品生产率的所有可能组合。例如,一个方案(尽管杰姆·贝克和安·莱斯勒反对)是现在先不生产其中一种产品(因此生产率设置为零)以使另一种产品尽可能多地生产(我们不能忽略最大化两种产品利润或许是通过不生产某一种产品而尽可能多地生产另一种产品得到的可能性)。

管理科学小组接着确定要展开研究所需收集的信息:

1. 每家工厂的可得生产能力。
2. 生产每一产品各需要每家工厂多少生产能力。
3. 每一产品的单位利润。

这些数量的具体数据是得不到的,因而必须作出估计。估计这些数量需要得到公司其他部门的关键职员的帮助。

比尔·塔斯托负责的部门工作人员作出了涉及生产能力的估计。具体讲,工作人员估计生产新类型门所需工厂 1 的生产设备每周大约有 4 个小时的可得时间(其他时间工厂 1 要继续生产当前的产品)。生产新类型窗所需工厂 2 的生产设备每周大约有 12 个小时的可得时间。生产两种产品所需工厂 3 的生产设备每周大约有 18 个小时的可得时间。

每一产品实际使用的每家工厂生产能力的数量取决于产品的生产率。据估计,每扇门需要工厂 1 生产时间 1 个小时和工厂 3 生产时间 3 个小时。每扇窗需要工厂 2 和工厂 3 生产时间各为 2 个小时。

经过对成本数据和产品定价的分析,会计部门估计了生产两种产品的利润。预测门的单位利润为 300 美元、窗的单位利润为 500 美元。

表 2.1 总结了现在收集到的数据。

表 2.1 伟恩德玻璃制品公司产品组合问题的数据

| 工厂 | 单位产品的生产时间 | | 每周可得时间 |
|---|---|---|---|
| | 门 | 窗 | |
| 1 | 1 小时 | 0 | 4 小时 |
| 2 | 0 | 2 小时 | 12 小时 |
| 3 | 3 小时 | 2 小时 | 18 小时 |
| 单位利润(美元) | 300 | 500 | |

管理科学小组清楚地认识到这是一个典型的产品组合问题(Product-mix problem)(就像早先描述的潘得罗索工业公司一样)。因此,下一步要发展一个数学模型——一个线性规划模型——来对问题进行表述使得能够数学化求解。下面四节着重介绍假定表 2.1 中数据的估计是准确的状况下,怎样发展使两种产品利润最大的产品组合的模型然后,如何对其求解。

### 问题回顾

1. 伟恩德玻璃制品公司迎合的细分市场是什么?
2. 管理层提出的两个问题是什么?
3. 管理科学小组被要求分析哪些问题?
4. 这一小组对提出的关键问题是怎样定义的?
5. 为了展开研究,小组需要收集哪些信息?

## 2.3 在电子表格上建立伟恩德公司问题的模型

电子表格为展示和分析许多管理问题提供了一个功能强大而直观的工具。现在我们将着重介绍用微软 Excel 的流行电子表格软件包①是如何对伟恩德公司问题进行展示和分析的。

### 建立伟恩德公司问题电子表格模型

图 2.1 显示了把表 2.1 的数据转送到电子表格的伟恩德公司问题(E 和 F 两列是为下面所描述的后来输入数据留的)。我们把显示数据的单元格称为数据单元格(data cells)。为了将数据单元格与表格中的其他单元格区别开来,将它们标注成浅灰色。为单元格命名能使表格更容易理解。伟恩德公司问题电子表格的数据单元格作了如下命名:单位利润(C4:D4);单位产量工时(C7:D9);可用工时(G7:G9)。为单元格命名,首先选中单元格,然后从插入菜单中选择命名,再输入名字(或者可以点击数据表上公式栏左侧的名字框,输入名字)。

> 这是建立任何数据表格都要回答的三个关键问题。

在用电子表格为问题建立数学模型(这里是一个线性规划模型)的过程中有三个问题需要得到回答:

1. 要作出的决策(decisions)是什么?
2. 在作出这些决策上有哪些约束条件(constrains)?
3. 这些决策的全部绩效测度(measure of performance)是什么?

① 还有其他具有相似功能的电子表格的软件包,这里讲述的基本观点还是能够应用。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | | | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | | | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | | | 18 |

**图 2.1** 把表 2.1 的数据转送到数据单元格之后的伟恩德公司问题的初始电子表格。

前面一节描述了管理科学小组怎样与制造副总裁比尔·塔斯托一起花了大量的时间来确定管理层对问题的观点,他们的讨论提供了对问题的以下一些答案:

> 有些学生发现在建立数据表格前写下他们对三个关键问题的答案很有帮助。

1. 要作的决策是两种新产品的生产率(production rates)(每周生产量)。
2. 对决策的约束条件是两种产品在相应工厂里每周生产时间不能超过每个工厂的可得生产时间。
3. 对这些决策的全部绩效测度是这两种新产品的总利润。

> 可变单元格包含要作的决策。

图 2.2 显示上面这些答案是怎样被编入电子表格的。基于第一个回答,两种产品的生产率(每周生产数量)放在单元格 C12 和 D12,正好定位在这些产品所在列的数据单元格的下面。既然我们还不知道这些生产率会是多少,在图 2.2 中设置的都为零(实际上,任何一个试验解都可以,负的生产率应被排除在外,因为不可能)。以后在寻找生产率最佳组合时这些数值会被改变。因此,含有需要作出决策的单元格称为可变单元格(changing cells)[或可调整单元格(adjustable cells)]。为了突出可变单元格,它们以浅灰色为背景并标有边框(在管理科学课件包含的数据表格文件中,可变单元格被标以亮黄色)。可变单元格被命名为产量(C12:D12)。

运用第二个回答,两种产品在相应工厂每周使用的生产时间总数进入单元格 E7、E8 和 E9,正好在对应数据单元格的右边。生产时间的总数取决于两种产品的生产率,因此当生产率为零时生产时间的总数为零。在正的生产率情况下,一个工厂每周的生产时间总数等于每种产品每周用去的生产时间的总和。一种产品用去的生产时间等于每单位产品用去的生产时间乘以生产的产品数量。因此,当每周门和窗的正的生产数量进入单元格 C12 和 D12 时,单元格 C7:D9 中的数据就用来计算每周的总生产时间,计算如下:

工厂 1 的生产时间 =1(门的生产数量) +0(窗的生产数量)
工厂 2 的生产时间 =0(门的生产数量) +2(窗的生产数量)
工厂 3 的生产时间 =3(门的生产数量) +2(窗的生产数量)

(C7:D9 中间的冒号是指从 C7 到 D9 变化的 Excel 速记,也就是 C、D 列和 7、8、9 行组成的所有单元格。)因而,列 E 中的前三个单元格的 Excel 等式为:

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 0 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 0 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 0 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 0 | 0 | | | $0 |

图 2.2 伟恩德问题的完整的电子表格，在可变单元格(C12 和 D12)中输入了初次试算的结果(两个生产率都等于0)。

E7 = C7 * C12 + D7 * D12
E8 = C8 * C12 + D8 * D12
E9 = C9 * C12 + D9 * D12

这里的星号为乘号。由于这些单元格的每一个都给出了依赖于可变单元格(C12 和 D12)的输出结果，它们被称为输出单元格(output cells)。

输出单元格显示依赖于可变单元格的输出结果。

注意输出单元格的每个等式涉及两种产品的和，Excel 中有一个叫 SUMPRODUCT 的函数能对相等行数和相等列数的两个变化范围的单元格中的值相乘后进行加和。被加和的每个值是对第一个变化范围的一些值和对应位置的第二个变化范围的一些值的积。例如，考虑 C7:D7 和 C12:D12 这两个变化范围，每个都是一行两列，在这里，SUMPRODUCT(C7:D7,C12:D12)是把 C7:D7 变化范围的每个值与 C12:D12 变化范围中对应的每个值相乘，然后将各个积相加，就像上面第一个等式表示的那样[因为单元格(C12:D12)命名为产量，所以公式就写为 SUMPRODUCT(C7:D7,产量)]。尽管在这样短的等式中应用是具有选择性的，但这个函数在作为一种捷径输入更长的等式时尤其方便。

SUMPRODUCT 函数在线性规划的电子表格模型中被广泛使用。

接着，在单元格 F7、F8、F9 中的≤符号表示它们左边的总值不允许超过列 G 中对应的数值。电子表格仍然允许你输入违反≤符号的试验解。但是如果列 G 中的数值没有变化的话，这些≤符号作为一种提示物拒绝接受这些试验解。

最后，因为第三个问题的答案是两种新产品的总利润作为全部绩效测度，这个利润(每周)进入单元格 G12。与列 E 中的其他数值相像，它也是一些乘积的加和。因为单元格 C4 和 D4 给出了生产一扇门和一扇窗的利润，每周生产这些产品的总利润为：

利润 = 300 美元(门的生产数量) + 500 美元(窗的生产数量)

因此，单元格 G12 的等式为：

G12 = SUMPRODUCT(C4:D4,C12:D12)

运用单元格名字，总利润(G12)、单位利润(C4:D4)、产量(C12:D12)，等式可表示为：

总利润 = SUMPRODUCT(单位利润，产量)

这是一个很好的例子，表明运用单元格名字可以使等式更容易理解。

目标单元格包括了对所有可变单元格所作决策的评估。

总利润(G12)是一个特殊的输出单元格，它是在对生产率作出决策时目标值定为尽可能大的特殊单元格。所以，单元格总利润(G12)被称为目标单元格(target cell)[或目的单元格(objective cell)]。目标单元格被标以比可变单元格更深的灰色，并且以粗线条为边框(在管理科学课件包含的电子表格文件中，目标单元格被标以橙色)。

图 2.3 的底部对需要输入所用工时列和总利润单元格的所有上面的公式做了小结。同时也总结了以字母排序的单元格的名字以及相应的单元格地址。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 0 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 0 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 0 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 0 | 0 | | | $0 |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| HoursAvailable | G7:G9 |
| HoursUsed | E7:E9 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C7:D9 |
| TotalProfit | G12 |
| UnitProfit | C4:D4 |
| UnitsProduced | C12:D12 |

| | E |
|---|---|
| 5 | Hours |
| 6 | Used |
| 7 | =SUMPRODUCT(C7:D7, UnitsProduced) |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:D8, UnitsProduced) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9, UnitsProduced) |

| | G |
|---|---|
| 11 | Total Profit |
| 12 | =SUMPRODUCT(UnitProfit, UnitsProduced) |

**图 2.3　伟恩德问题的电子表格模型，包含目标单元格总利润(G12)和 E 列输出单元格的公式，其目的是使得目标单元格最大化。**

这就完成了为伟恩德公司问题建立电子表格模型的工作。

利用这个模型，分析生产率的任何一个试验解就变得容易了。每次在单元格 C12 和 D12 中输入生产率数值，Excel 就立即计算整列的数值。例如，图 2.4 显示了当生产率设置为每周 4 扇门和 3 扇窗时的电子表格，单元格 G12 显示每周产生的总利润为 2700 美元，还显示 E7 = G7，E8 < G8 和 E9 = G9，所以列 F 中的≤符号都满足了。因而，这个试验解是可行的(feasible)。但进一步增加两种产品的生产率，试验解将不再可行，因为这会导致 E7 > G7 和 E9 > G9。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 4 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 6 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 4 | 3 | | | $2,700 |

**图 2.4** 在伟恩德问题的可变单元格产量(C12:D12)中输入一个新的试算解的电子表格。

这个试验解给出了生产率的最佳组合了吗？不一定。通过一个产品生产率的增加、同时另一个产品减少可能会进一步增加总利润。然而，没有必要继续用试错法来寻找，我们会在 2.6 节中介绍 Excel 的规划求解(Solver)是怎样快速找到最优解的。

## 这个电子表格模型是一个线性规划模型

图 2.3 显示的电子表格模型是线性规划模型的一个例子，原因是它具有所有下列特征。

**电子表格上的线性规划模型的特征：**

1. 需要作出许多活动水平的决策，因此可变单元格被用来显示这些水平(伟恩德问题的两个活动是两个新产品的产量，所以可变单元格显示了每个产品的周产量)。
2. 这些活动的水平能够取满足许多约束条件的任何值(包括小数值)。(伟恩德新产品的生产率仅由 3 个工厂的可用工时限制。)
3. 每个约束条件对活动水平的决策可行值进行了限制，约束条件的左边往往是一个输出单元格，中间是一个数学符号(≤、≥或=)，右边是数据单元格(伟恩德问题的 3 个工厂可用工时的约束条件在图 2.2 至图 2.4 中显示，E 列为输出单元格，F 列为≤符号，G 列为数据单元格)。
4. 活动水平的决策是以进入目标单元格的一个完全绩效测度为基础的，目标是最大化目标单元格或最小化目标单元格，这由绩效测度的性质决定(伟恩德问题的绩效测度为两个新产品所能提供的周总利润，所以绩效测度被输入目标单元格 G12，目标是最大化目标单元格)。
5. 每个输出单元格(包括目标单元格)的 Excel 等式可以表达为一个 SUMPRODUCT 函数①，这里加和的每一项是一个数据单元格与一个可变单元格的乘积(图 2.3 的底部显示了在伟恩德问题中 SUMPRODUCT 函数是如何被运用到每个输出单元格中的)。

特征 2 和 5 是区分线性规划模型和其他可在电子表格上建模的数学模型的关键。特征 2 取消了活动水平必须是整数变量的情况。例如，这种只能是整数的情况会在伟恩

① 当对应的数据单元格中的数值都为 1 时，SUM 函数还有一些特殊的应用，第 6 章中有一些例子。

德公司问题中产生，如果要作出的决策是生产的门和窗的总数(这必须是整数)，而不是每周的生产数量(这可以是小数值，因为一扇门或窗可以在这周开始生产而在下一周完成生产)。

特征 5 禁止输出单元格的 Excel 等式不能表达为一个 SUMPRODUCT 函数的情况。为了阐明这一情况，假设由于营销规模经济，伟恩德公司的新窗的生产率增加 1 倍后每周得到的利润的增加超过 1 倍，这意味着目标单元格的 Excel 等式将要比 SUMPRODUCT 函数更加复杂。

我们会留到第 9 章和第 10 章来考虑如何为这些更复杂的情形建立模型。

### 建模步骤的小结

为伟恩德公司问题在电子表格上建立线性规划模型的程序同样可以适合许多其他问题。下面是对这一程序步骤的小结：

1. 收集问题的数据(如表 2.1 为伟恩德公司问题总结的那样)。
2. 在电子表格的数据单元格中输入数据。
3. 确定对活动水平需要作出的决策并且指定可变单元显示这些决策。
4. 确定对这些决策的约束条件并且引入需具体化这些约束条件的输出单元格。
5. 选择要输入目标单元格的完全绩效测度。
6. 使用 SUMPRODUCT 函数为每个输出单元格(包括目标单元格)输入合适的值。

这一程序没有清楚地说明如何建立电子表格的细节。通常还有其他可供选择的方法而不只是这一个“合适”的方法，电子表格的强势之一是它处理大量不同问题时所具有的柔性。

### 问题回顾

1. 开始在电子表格上建立线性规划模型时需要回答哪三个问题？
2. 建立这样一个线性规划模型时，数据单元格、可变单元格、输出单元格和目标单元格的作用是什么？
3. 建立这样一个线性规划模型时，每个输出单元格(包括目标单元格)的 Excel 等式的形式是怎样的？

## 2.4　电子表格上的数学模型

> 线性规划模型可以用电子表格表示，也可以用代数模型表示。

建立线性规划模型有两种广泛使用的方法，一个是直接在电子表格上建模，如上一节描述的那样，另一个是用代数方法来表示模型。两种形式的模型是等价的，惟一的区别在于是使用电子表格语言还是使用代数语言来描述模型。两种形式都有其优点，两种都使用是有帮助的。例如，像对伟恩德公司问题的分析一样(如下两节讨论的)，这两种形式导致不同但互补的分析问题的方法。既然本书强调电子表格方法，我们对代数方法只做简短的介绍。

### 建立伟恩德公司问题的代数模型

代数方法的逻辑与电子表格方法相似。实际上，除了要在电子表格上输入之外，代数方

法的初始步骤与前面小节对为伟恩德公司问题的描述一样。

1. 收集相关数据(2.2 节中的表 2.1)。
2. 确定要作出的决策(两种新产品的生产率)。
3. 确定对这些决策的约束条件(在相应工厂使用的生产时间不能超过可得数量)。
4. 确定为这些决策的完全绩效测度(两种产品的总利润)。
5. 把约束条件和绩效测度的口头的描述转换成用数据和决策表示的定量表达式。

表 2.1 表明,两种新产品在相应工厂每周可得生产时间为 4 小时、12 小时和 18 小时,应用表中每扇门或窗用去的生产时间的数据,就导出了约束条件的下列定量表达:

工厂 1: (门的生产率) ≤ 4
工厂 2: 2(窗的生产率) ≤12
工厂 3: 3(门的生产率) +2(窗的生产率) ≤18

此外,负生产率是不可能的,所以决策的其他两个约束条件为:

(门的生产率) ≥ 0 (窗的生产率) ≥ 0

完全绩效测度已经确定为生产两种新产品的总利润,因为表 2.1 给出了门和窗的单位利润是 300 美元和 500 美元,所以前面小节得出的生产这些产品每周获得总利润的表达式为:

利润 =300 美元(门的生产率) +500 美元(窗的生产率)

目标是要作出在满足上面确定的所有约束条件之下使得利润最大(门和窗的生产数量)的决策。

为了用简洁的代数模型表示这一目标,我们引入代数记号来表示绩效测度和决策。

$P$ = 利润(美元表示的生产两种产品的每周总利润)
$D$ = 门的生产率(每周专门新门的生产数量)
$W$ = 窗的生产率(每周专门新窗的生产数量)

用这些记号代入上述约束条件和绩效测度的表达式(在以后的表达式中略去美元符号),伟恩德公司问题的线性规划模型现在可以用代数形式描述如下:

**代数模型**

选择 $D$ 和 $W$ 的值最大化

$$P = 300D + 500W$$

满足所有下列约束条件:

$$\begin{aligned} D \quad\quad & \leq 4 \\ 2W & \leq 12 \\ 3D + 2W & \leq 18 \end{aligned}$$

和

$$D \geq 0 \qquad W \geq 0$$

## 线性规划模型的术语

许多代数模型的术语有时还使用在电子表格模型中。下面是伟恩德公司问题的关键

术语:

1. $D$ 和 $W$(或图 2.3 中的 C12 和 D12)为决策变量。
2. $300D+500W$[或 SUMPRODUCT(单位利润,产量)]为目标函数。
3. $P$(或 G12)为目标函数值(或简称目标值)。
4. $D\geq 0$ 和 $W\geq 0$(或 C12 $\geq 0$ 和 D12 $\geq 0$)称为非负约束(或非负条件)。
5. 其他约束条件称为函数约束(或结构约束)。
6. 模型的参数是代数模型中的常数(在数据单元格中的数)。
7. 决策变量的任何一个取值(不管是想要还是不想要)称为模型的一个解。
8. 可行解是指满足所有约束条件的解,反之,一个不可行解至少违反一个约束条件。
9. 最大化 $P$(或 G12)的最优可行解称为最优解。

## 比　较

> 管理科学家常常使用代数模型,而管理者更喜欢电子表格模型。

那么代数模型和电子表格模型各自相对的优点是什么呢?一个代数模型给出了问题的精练而明晰的表述,能求解大型问题的复杂的软件包一般是以代数模型为基础,因为代数模型在刻画大型问题时具有简洁和容易使用的特性。具有广泛数学背景的管理科学从业者发现代数模型非常有用。然而,对其他人来说,电子表格模型更为直观。许多具有聪明才智的人(包括许多经理和商学院学生)发现代数模型过于抽象。电子表格擦起了"代数的窗帘",经理和要成为经理的商学院学生一般都认同电子表格,而不是代数模型。因此,全书重点强调的是电子表格模型。

### 问题回顾

1. 在建立一个线性规划模型时,电子表格模型与代数模型相同的初始步骤是什么?
2. 在用代数形式建立线性规划模型时,模型中需要引入代数符号来表示哪几类数量?
3. 一个线性规划的决策变量、目标函数、非负约束条件、函数约束各是什么?
4. 模型的一个可行解是什么意思?一个最优解是什么意思?

## 2.5　求解两变量问题的图解法

> **图解法**
> 图解法提供了对线性规划的直观帮助。

像伟恩德公司问题一样只有两个决策变量的线性规划问题可以通过图解法(graphical method)来求解。

尽管这种方法不能用来求解超过两个决策变量的问题(大多数线性规划问题远远超过两个决策变量),它还是很值得学习的。图解法的程序提供了关于线性规划和它设法完成什么的几何直觉。这一直觉在对不能直接由图解法求解的大型问题进行分析时是有帮助的。

对线性规划模型的代数形式应用图解法比对电子表格更方便。我们将通过用从上面小节中伟恩德公司问题得到的代数模型来阐述图解法。为此目的,请记住:

$D$ = 专门新门的生产率(电子表格中可变单元格 C12 的数值)

$W$ = 专门新窗的生产率(电子表格中可变单元格 D12 的数值)

## 用图上的点表示解

图解法的关键是模型可能的解可以用一个两维坐标图上的点表示,这个两维坐标的横轴是 $D$ 的取值,纵轴是 $W$ 的取值。图 2.5 显示了一些样本点。

**符号注记:** $(D,W)=(2,3)$ 或 $(2,3)$ 都是指解和图中的点,这里 $D=2, W=3$,同样,$(D,W)=(4,6)$ 的意思是 $D=4$ 和 $W=6$,而原点 $(0,0)$ 意味着 $D=0$ 和 $W=0$。

为了找到最优解(最优的可行解),我们首先需要画出可行解在哪里。为了画出可行解,我们必须考虑每个约束条件,确定每个约束条件允许的图中的解,然后把这些信息组合在一起确定所有约束条件都允许的解。

开始,约束条件 $D\geq 0$ 意味着必须考虑限制在图 2.5 中 $W$ 轴的轴上或右边的点。同样,约束条件 $W\geq 0$ 必须考虑限制在 $D$ 轴的轴上或上面的点。结合这两个事实,感兴趣的区域是图 2.6 的阴影部分(这一区域还包括比在可得空间阴影部分的 $D$ 和 $W$ 更大的值)。

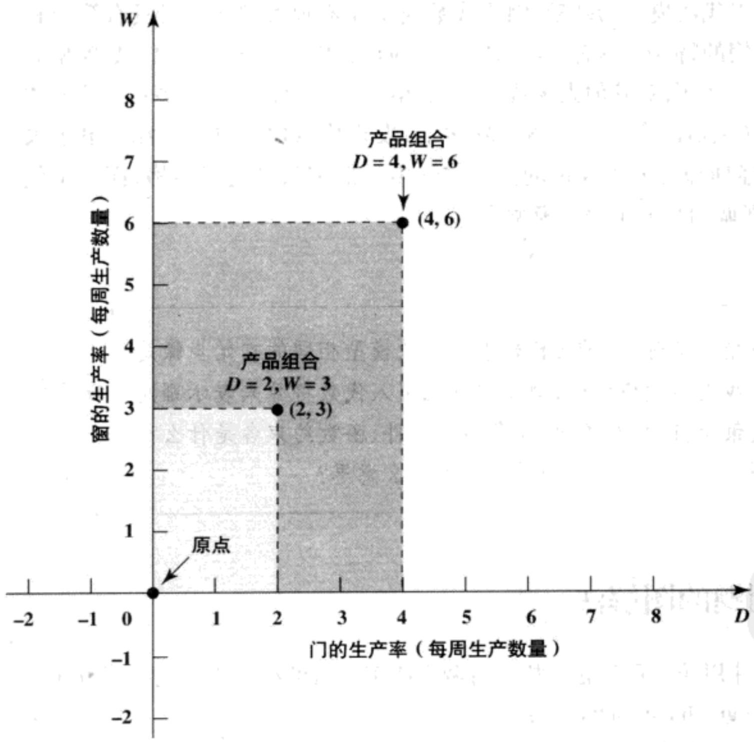



**图 2.5** 图显示了点 $(D, W)=(2,3)$ 和 $(D,W)=(4,6)$ 时伟恩德问题的点。

## 画出每个约束条件允许的非负解

现在我们要逐个地看一看每个函数约束都允许的非负解,后面我们将结合所有的约束条件。

对任一含有不等号的约束条件，它的约束边界方程将不等号换为等号即可。

让我们从第一个函数约束 $D\leq 4$ 开始，它限制了工厂 1 生产专门新门的最大使用时间为每周 4 小时，截取 $D$ 轴的直线 $D=4$ 的线上或左边的解是允许的(所以 $D=4$ 是直线的方程式)，这一允许区域与图 2.6 的阴影区域相结合产生了图 2.7 显示的阴影区域。

第二个函数约束 $2W\leq 12$ 有相似的效果，除了现在允许区域的边界是由在图 2.8 中显示的等式 $2W=12$(或 $W=6$)的水平线给出。形成一个约束条件所允许的边界的直线有时称为约束边界线(constraint boundary line)，它的方程式可称为约束边界方程(constraint boundary equation)。一条约束边界线通常由它的方程式确定。

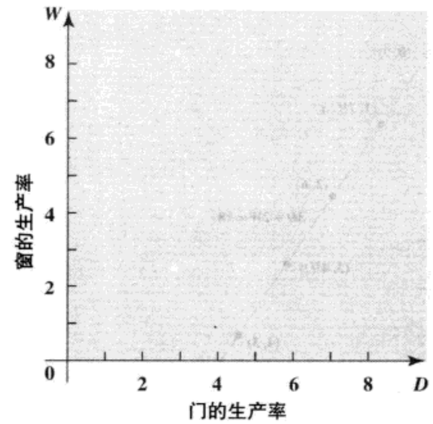



**图2.6**　图显示了在约束条件$D\geq 0$和$W\geq 0$下伟恩德问题的解，排除了位于纵轴的左边和横轴的下方的取值。

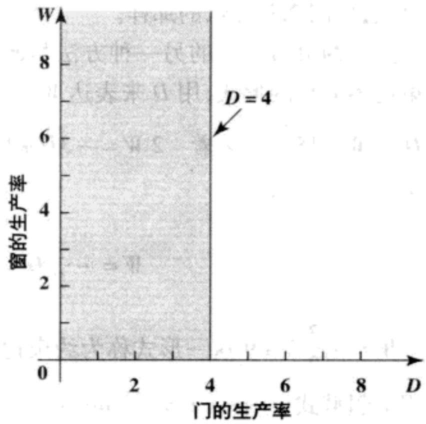



**图2.7**　图显示了约束条件位于纵轴与$D=4$之间的$D\leq 4$条件下的非负解。

对于两个函数约束 $D\leq 4$ 和 $2W\leq 12$ 的每一个，记住约束边界线(分别为 $D=4$ 和 $2W=12$)的方程是通过把不等号替换成等号而得到的。对任何一个有不等号的约束条件(不管是函数约束还是非负约束)，得到约束边界方程的一般规则是用等号替代不等号。

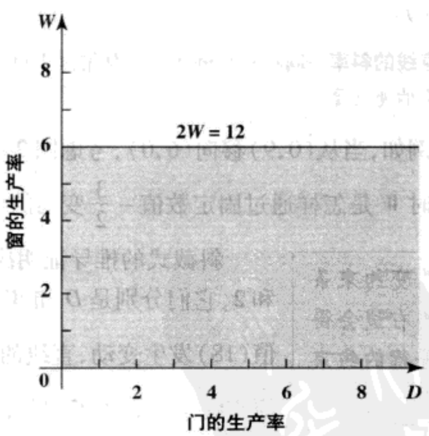



**图2.8**　图显示了约束条件位于横轴与$W=12$之间的$2W\leq 12$条件下的非负解。

现在我们要考虑另一个函数约束 $3D+2W\leq 18$，它的约束边界方程为：

$$3D+2W=18$$

含有两个变量，所以它表示的边界线既不是一条垂直线也不是一条水平线，因而，边界线一定会与两个轴的某处相截(相交)，但是在何处相交呢？

当一条约束边界线既非垂直直线也非水平直线时，约束边界线在 $W=0$ 时的点与 $D$ 轴相交，同样，约束边界线在 $D=0$ 时的点与 $W$ 轴相交。

约束边界线的位置由它与两轴相交的交点确定。

因此,约束边界线 $3D+2W=18$ 与 $D$ 轴相交于直线在 $W=0$ 的点上,

当 $W=0$, $3D+2W=18$ 变为 $3D=18$
所以与 $D$ 轴相交于点 $D=6$

同样,约束边界线与 $W$ 轴相交于直线在 $D=0$ 的点上,

当 $D=0$, $3D+2W=18$ 变为 $2W=18$
所以与 $W$ 轴相交于点 $W=9$

从而,约束边界线是一条经过这两个交点的直线,如图 2.9 显示的那样。

找到约束边界线的另一种方法是改变约束边界方程的形式,用 $D$ 来表达 $W$,

$3D+2W=18$ 意味着 $2W=-3D+18$

所以

$$W=-\frac{3}{2}D+9$$

$W=-\frac{3}{2}D+9$ 这一形式称为约束边界方程的斜截式(slope-intercept form)。

常数 9 自然是直线在 $W$ 轴的截距(因为当 $D=0$ 时 $W=9$),$-\frac{3}{2}$是直线的斜率(slope)。

**直线的斜率**(slope of a line)是当 $D$ 增加 1 时 $W$ 的变动量。

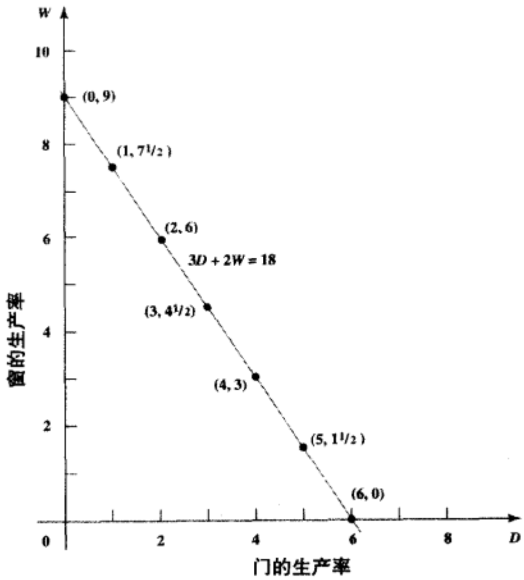



图2.9 图显示了约束条件$3D+2W\leq 18$与横轴交于$D=6$,与纵轴交于$W=9$。

例如,当从(0,9)移向(6,0),考虑图 2.9 中约束边界线表示的一系列点,注意每次 $D$ 增加 1 时 $W$ 是怎样通过固定数值 $-\frac{3}{2}$变动的。

只改变约束条件的右边会得到平行的约束边界线。

斜截式的推导证明决定直线 $3D+2W=18$ 斜率的数只有方程中的 3 和 2,它们分别是 $D$ 和 $W$ 的系数。因此,如果方程 $3D+2W=18$ 只是右端值(18)发生变动,直线的斜率还是 $-\frac{3}{2}$,换句话说,新得到方程的直线与原直线平行。为了阐明,假定新方程为 $3D+2W=12$,因为原直线在 $W$ 轴上的截距为$\frac{18}{2}=9$,新直线在 $W$ 轴上的截距为$\frac{12}{2}=6$,所以新直线更靠近原点,如图 2.10 所示,图中还显示了约束边界线的平行直线 $3D+2W=24$,它在 $W$ 轴上的截距为$\frac{24}{2}=12$,因此比原直线更远离原点。

检验(0,0)是否满足约束条件可以表明位于约束边界线的哪一边满足约束条件。

这一分析还表明约束条件 $3D+2W\leqslant 18$ 所允许的解是那些位于约束边界线 $3D+2W=18$ 靠近原点这边的点。证实这一点最简单的办法是检验原点 $(D,W)=(0,0)$ 是否满足约束条件①，如果满足，那么允许区域位于约束边界线靠近原点所在的那一边，否则，位于另一边。在这里，

$$3(0)+2(0)=0$$

所以 $(D,W)=(0,0)$ 满足

$$3D+2W\leqslant 18$$

（事实上，原点满足任何一个有≤符号和右端值为正的约束条件）。因此，这个约束条件允许的区域是图 2.11 所显示的阴影部分。

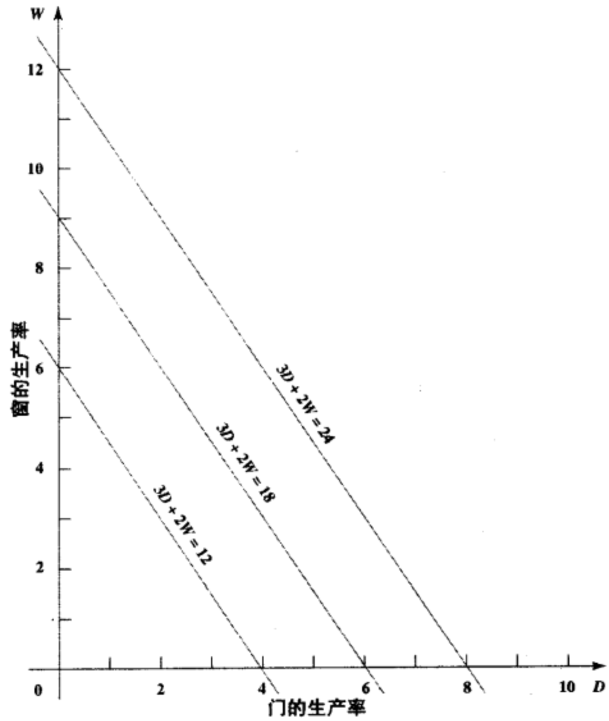



图 2.10　图显示了只改变右边的约束条件（如 $3D+2W\leqslant 18$）产生了一组平行的边界线。

## 绘制可行域

现在我们已经在图 2.6、图 2.7、图 2.8、图 2.11 中画出了单个约束条件允许的解的区域，但是线性规划问题的一个可行解必须同时满足所有约束条件。为了找出可行解位于哪里，我们要组合所有约束条件到一个图上，并且确定代表解的点都位于所有约束条件允许的区域内。

**可行域**
可行域内的点是那些符合所有约束条件的解。

图 2.12 表示了三个函数约束条件的约束边界线，我们还在每条直线上加了箭头以表示直线的哪一边是相应约束条件所允许的（就如前面图中确定的那样）。注意每一个约束条件允许的非负解位于约束边界线的靠近原点的那边（或就在约束边界线上）。因此，可行解是那些比所有三条约束边界线更靠近原点的那些点（或最接近原点的直线上）。可行解的相应区域称为可行域（feasible region），为图 2.12 中的阴影部分。

## 绘制目标函数

确定了可行域，最后一步是找出这些可行解中哪些是最好的——最优解。对于伟恩德公司问题目标是最大化两种产品生产的每周总利润（记为 $P$），因此，我们要找出可行解

① 使用原点来决定允许域不起作用的一种情况是约束边界线通过原点。在这种情况下，所有不在此约束线上的点都可以看作是原点。

($D$, $W$)，使目标函数

$$P = 300D + 500W$$

的值尽可能的大。

为了做到这点，我们要能给目标函数的一个特定值在图上定位所有的点($D$,$W$)。例如，考虑目标函数的一个值 $P = 1500$，哪些点($D$,$W$)给出了 $300D + 500W = 1500$?

这个方程是一条直线的方程，如画出约束边界线一样，定位这条直线是通过确定它在两个轴上的截距。当 $W = 0$，这条直线使得 $D = 5$，同样，当 $D = 0$ 是 $W = 3$，因此这就是两个截距，如图 2.13 所示。

$P = 1500$ 只是目标函数的一个样本值，对于其他任何一个特定的 $P$ 值，值等于 $P$ 的点($D$,$W$)还在一条直线上，这条直线称为目标函数线(objective function line)。

**目标函数线**是它上面点的都有相同目标函数值的一条直线。

对于图 2.13 中的目标函数线，位于可行域内的直线上的点给出了目标函数值为$P = 1500$ 的多种方案，我们能够得到更好的解吗？让我们试着加倍 $P$ 值使得 $P = 3000$，对应的目标函数线为：

$$300D + 500W = 3000$$

如图 2.14 中间的那条直线所示。(先忽视最上面的那条直线)直线上依然含有在可行域内的点，因此 $P = 3000$ 是可以得到的。

我们停下来，注意一下 $P = 1500$ 和 $P = 3000$ 这两条目标函数线的两个有趣的特性。第一，这两条直线是平行的；第二，$P$ 的值从 1500 到 3000 翻倍后，直线在 $W$ 轴的截距也从 $W = 3$ 变到 $W = 6$ 翻了倍。这些特性不是巧合，下面的性质说明了这一点：

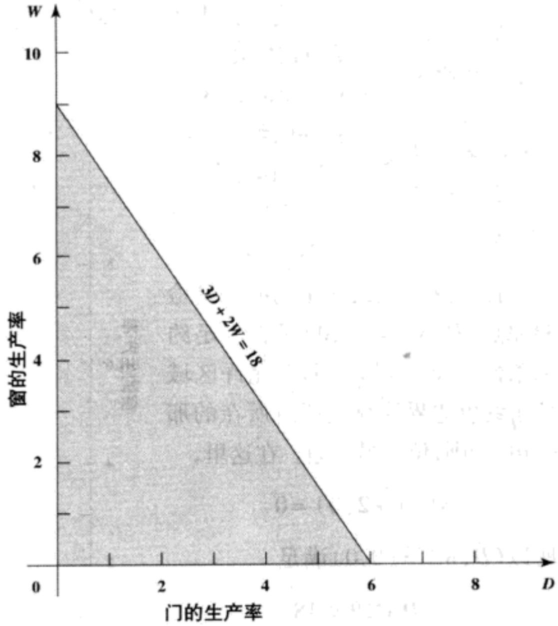



**图 2.11** 图显示了在约束条件 $3D + 2W \leq 18$ 下的非负解，它们位于两个坐标轴和约束界线 $3D + 2W = 18$ 构成的三角区内。

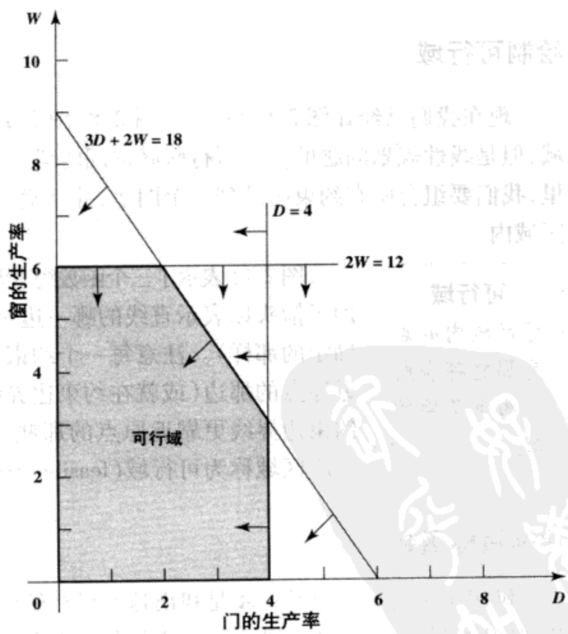



**图 2.12** 图显示了在约束界线的可行域，即在相应的约束条件允许下箭头所指向的每一条边。

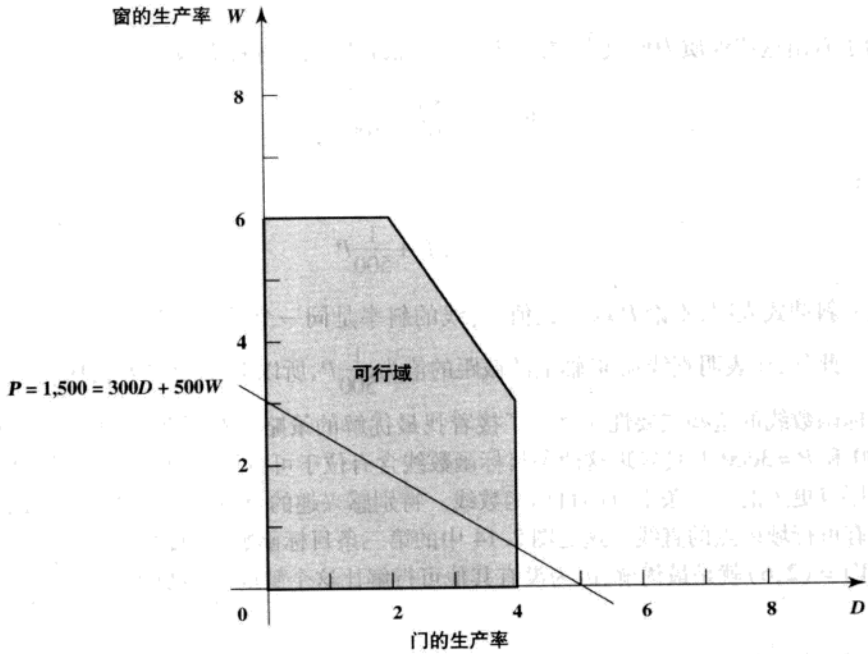



**图 2.13**　图显示了在目标方程中给定 $P=1500$ 下包含所有点 $(D,W)$ 的线。

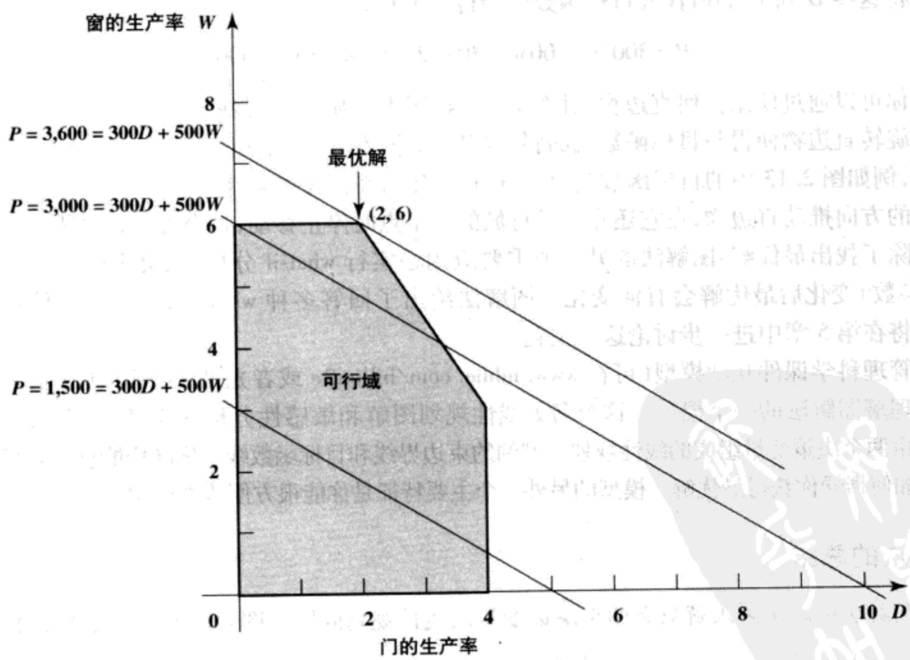



**图 2.14**　图显示了伟恩德问题的三条目标方程线,其中最上面的那一条经过了最优解。

**目标函数线**的主要性质:同一问题的所有目标函数线平行,而且目标函数线在 $W$ 轴的截距与 $P$ 值成

比例。

为了看出这些性质为何成立,看一下伟恩德公司问题目标函数线的斜截式:

$$W = -\frac{300}{500}D + \frac{1}{500}P$$

化简为:

$$W = -\frac{3}{5}D + \frac{1}{500}P$$

这一斜截式表明,不论 $P$ 取什么值,直线的斜率是同一个值为 $-3/5$,所以这些直线是平行的。此外,还表明直线在 $W$ 轴上的截距的值为$\frac{1}{500}P$,所以 $W$ 的值与 $P$ 值成比例。

目标函数线的这些主要性质暗示了接着找最优解的策略。在图 2.14 中我们已经试了 $P=1500$ 和 $P=3000$ 并且发现这两条目标函数线含有位于可行域内的点。再增加 $P$ 值就会产生离原点更远的另一条平行的目标函数线。特别感兴趣的目标函数线是那条最远离原点但还含有可行域内点的直线。这是图 2.14 中的第三条目标函数线,直线上还在可行域内的点 $(D,W)=(2,6)$ 就是最优解,因为没有其他可行解比这个解的 $P$ 值更大。

**最优解**

$D=2$ (每周生产 2 扇新门)

$W=6$ (每周生产 6 扇新窗)

将这些 $D$ 和 $W$ 的值代入目标函数就能得出 $P$ 的值:

$$P = 300D + 500W = 300(2) + 500(6) = 3600$$

你可以通过使用任何直边物(比如直尺)在图上实施这种寻找最优解的方法。在可行域内旋转直边物使得与目标函数线的斜率相同为止(你可以用任何一条目标函数线来确定斜率,例如图 2.13 中的目标函数线 $P=1500$)。然后在固定的斜率下在可行域内向着 $P$ 值增加的方向推动直边物,在它还穿过可行域的一个点时停止移动,这个点就是最优解。

除了找出最优解,图解法的另一个重要应用是实行 what-if 分析,以决定模型中某些数(或参数)变化后最优解会有何变化。图解法给出了回答多种 what-if 问题的主要洞察力。我们将在第 5 章中进一步讨论这一主题。

管理科学课件互动模型(可在 www.mhhe.com/hillier2e 或者光盘中获得)中包括了有助于你理解图解法的一个模型。这个名为线性规划图解和敏感性分析的模型,使你能够很快看到由两个决策变量组成的线性规划模型的约束边界线和目标函数线。你同样能够了解目标函数线如何指导你获得最优解。模型的另外一个主要特征是你能很方便地进行 what-if 分析。

## 图解法的总结

图解法可以用来求解只有两个决策变量的线性规划问题。图解法的应用步骤如下:

1. 画出每个函数约束的约束边界线,用原点(或其他不在约束边界线上的点)来确定直线的哪一边是约束条件所允许的。
2. 找出由所有约束条件都同时满足所决定的可行域。
3. 确定一条目标函数线的斜率,所有其他目标函数线具有与之相同的斜率。

4. 用这一斜率在可行域内向着目标函数值增加的方向移动直边物,在它还穿过可行域的一个点时停止移动,这时直边物给出的直线就是最优目标函数线。
5. 最优目标函数线上的可行点是一个最优解。

## 问题回顾

1. 图解法能用来求解带有几个决策变量的线性规划问题?
2. 在对伟恩德公司问题应用图解法时,坐标轴代表的是什么?
3. 什么是约束边界线? 什么是约束边界方程?
4. 在约束边界方程的斜截式中,方程的哪一部分给出了约束边界线的斜率? 哪一部分给出了直线与纵轴相交的点?
5. 确定约束边界线的哪一边是约束条件所允许的最简单的方法是什么?

## 2.6　应用 Excel 求解线性规划问题

图解法对于线性规划获得几何直觉很有用,但是它的实践应用却很有限,它只能求解含有两个决策变量的小问题。其他求解任何规模合理的线性规划问题的方法是必要的。幸运的是,一旦建立了如图 2.3 所述的电子表格模型,就可以利用 Excel 中的工具 Solver(规划求解)做到这一点(比 Solver 功能更强的称为 Premium Solver 的软件在管理科学课件中也能得到)。第一次用 Solver 的时候,你需要在 Excel 宏菜单下安装 Solver,然后就能在工具菜单下找到它。

2.3 节中的图 2.3 展示了伟恩德公司问题的电子表格模型,决策变量值(两种产品的生产率)在可变单元格产量(C12:D12)中,目标函数值(两种产品的每周总利润)在目标单元格总利润(G12)中。开始时,一个任意的试验解通过设定为零进入可变单元格。求解问题后,Solver 会使这个值改变为最优值。

这个求解过程通过在工具菜单中选择 Solver 开始,Solver 对话框在如图 2.15 所示。

Solver 求解开始前,需要确切知道模型的每个组成部分设置在电子表格的何处,你可以键入单元格名字,输入单元格地址或点击单元格。图 2.15 显示了用第一种方法的结果,所以输入目标单元格的是总利润(而不是 G12),输入可变单元格的是产量(而不是 C12:D12)。既然目标是要最大化目标单元格,还必须选中“最大值”(Max)。

添加约束对话框用来具体化所有的函数约束。

下一步,装有函数约束的单元格需要具体化,这通过点击 Solver 对话框中的“添加”按钮(Add)来实现,会弹出图 2.16 所示的添加约束对话框,图 2.3 单元格 F7、F8 和 F9 中的≤符号提示着单元格所用工时(E7:E9)必须小于或等于对应的单元格可用工时

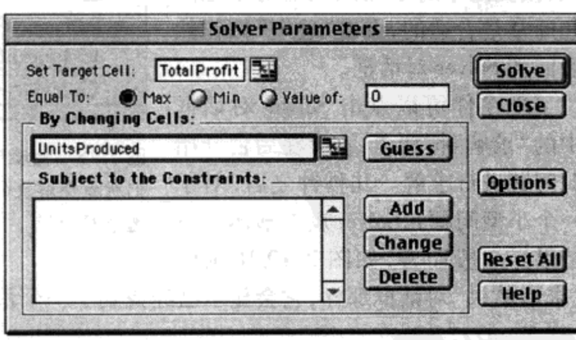



**图 2.15**　定义了图 2.3 中哪个单元格为目标单元格和可变单元格,以及表明要使得目标单元格最小化的 Solver 对话框。

(G7:G9)。通过在添加约束对话框的左端输入范围所用工时(E7:E9)和在右端输入范围可用工时(G7:G9),在 Solver 中这些约束条件就具体化了。对于两边中间的符号,有个菜单可以选择 < =、= 或 > =,所以选择了 < = 符号,由于 Solver 只应用在添加约束对话框中具体化的约束,所以尽管≤符号在电子表格的列 F 早已输入,但这一选择是必须的。

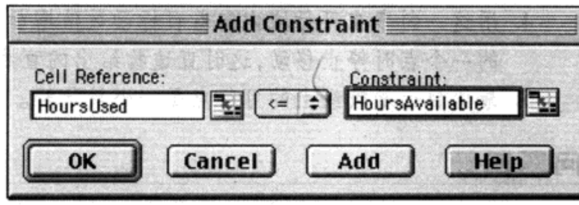



图 2.16 在定义了图 2.3 中单元格 E7,E8 和 E9 分别要小于或等于 G7,G8 和 G9 后的增添的约束对话框。

如果还要添加更多的函数约束,你就点击“添加”按钮以弹出一个新的添加约束对话框,但是,在这个例子中因为没有其他约束了,下一步只要点击“确定”按钮回到 Solver 对话框。

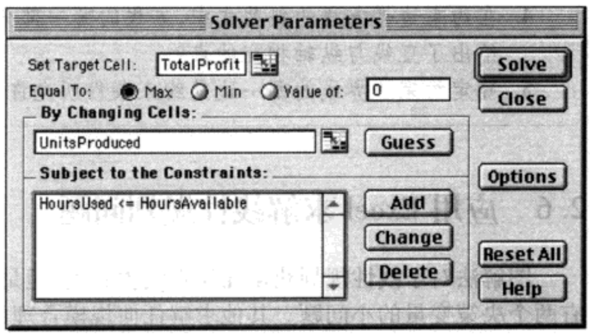



图 2.17 定义了在电子表格中的整个模型后的 Solver 对话框。

到现在为止 Solver 对话框根据图 2.3 的电子表格概述了全部的模型(见图 2.17)。但是在要求 Solver 求解模型之前还需要再做一步程序,点击“选项”按钮弹出图 2.18 所示的对话框,这个对话框允许你对如何求解问题细化几个选项,最重要的选项是“采用线性模型”和“假定非负”选项。确定这两个选项被选中,如图 2.18 所示那样,这就告诉了 Solver 要求解的问题是一个线性规划问题以及非负约束,它是可变单元格拒绝负的生产率所需要的①。关于其他选项,接受图中所示的默认值对小型问题通常是合适的,点击“确定”按钮然后回到 Solver 对话框。

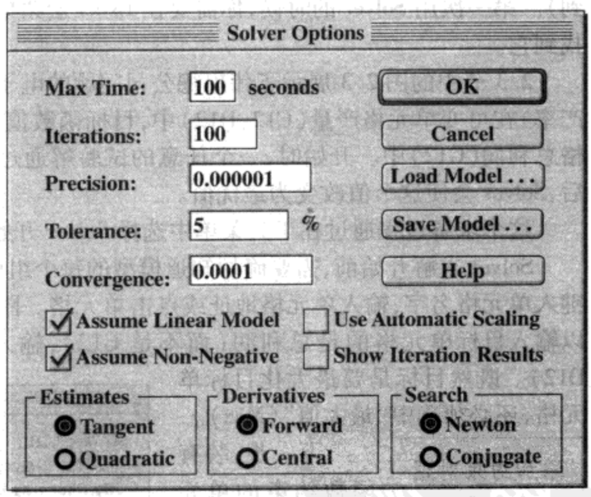



图 2.18 检验了假定线性模型和假定非负选项后,表明我们所希望解决的线性规划模型有非负的约束条件的 Solver 选择对话框。

现在你可以点击 Solver 对话框中的“求解”按钮了,它会在后台开始对问题进行求解。几秒钟之后(对于一个小型问题),Solver 就会显示运行结果。一般而言,如图 2.19 所示的“求解结果”对话框那样,它会显示已经找到了一个最优解。如果模型没有可行解或没有最

① Excel 97 以前的老版本没有假定非负选项,所以非负的约束条件必须在添加约束对话框中加入。不是所有的线性规划都有非负约束,但是基本上都是非负的。对于有些可变单元格具有非负约束,而有些没有。对一些不常见的模型,非负的约束条件必须在添加约束对话框中加入,而不是通过选择假定非负选项。

优解，对话框会显示"Solver 找不到可行解"或"设定的单元格值不能收敛"(17.1 节会介绍这些可能性是怎样发生的)。对话框还显示了产生各种报告的选项，其中一个(敏感性报告)会在第 5 章中详细讨论。

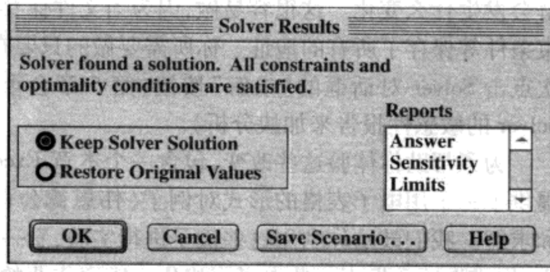
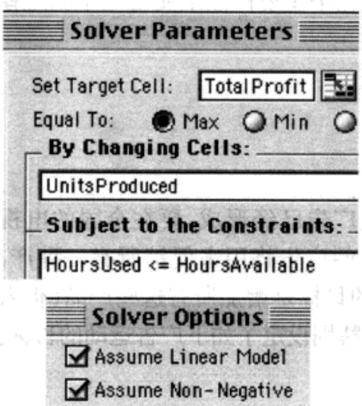



**图 2.19**　表明已经找到了一个最优解的 Solver 结果对话框。

求解模型之后，如图 2.20 所示，Solver 用最优值代替了可变单元格中的初始值。因此，最优解是每周生产两扇门和六扇窗，和前节中用图解法的结果一样。电子表格还显示了目标单元格的对应数值(每周总利润 3600 美元)，也在所用工时(E7:E9)的输出单元格中显示了这个数值。

这时，你或许想要检验一下如果数据单元格中的一些数变为其他一些可能的值后最优

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 2 | 6 | | | $3,600 |




| | E |
|---|---|
| 5 | Hours |
| 6 | Used |
| 7 | =SUMPRODUCT(C7:D7, UnitsProduced) |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:D8, UnitsProduced) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9, UnitsProduced) |

| | G |
|---|---|
| 11 | Total Profit |
| 12 | =SUMPRODUCT(UnitProfit, UnitsProduced) |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| HoursAvailable | G7:G9 |
| HoursUsed | E7:E9 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C7:D9 |
| TotalProfit | G12 |
| UnitProfit | C4:D4 |
| UnitsProduced | C12:D12 |

**图 2.20**　解决了伟恩德问题后得到的电子表格。

解会发生什么变化。这很容易做,因为当文件保存后,Solver 为目标单元格、可变单元格、约束条件等保存了所有的地址。你所需要做的只要在数据单元格中作出你想要的改变并再一次点击 Solver 对话框的"求解"按钮(第 5 章会重点介绍这类 what-if 分析,包括如何使用 Solver 的敏感性报告来加快分析)。

为了帮助你体验这些改变,包含一个本章 Excel 文件(其他章也一样)的管理科学课件提供了一个用电子表格的形式对例子(伟恩德公司问题和下一节的例子)进行的完整建模和求解。我们鼓励你利用这些例子进行实验,看一看在不同的数据、不同解等之下发生了什么,你或许还会发现这些电子表格作为家庭作业的模板很有用。

### 问题回顾

1. 用来输入目标单元格和可变单元格地址的对话框是什么?
2. 具体化模型的函数约束的对话框是什么?
3. 在 Solver 的选项对话框,哪些选项一般需要选定以求解一个线性规划模型?

## 2.7 一个最小化的例子——利博公司广告组合问题

2.3 节和 2.6 节中伟恩德玻璃公司案例研究的分析阐明了如何在电子表格上对一类线性规划模型建立模型和求解,同样通用的方法还可以应用于许多其他问题。线性规划和电子表格的柔性为改变电子表格模型的建模以适合每个新问题提供了多种选择。我们下一个例子阐明了在伟恩德玻璃公司问题中没有应用的一些选择。

### 计划一次大规模的广告运动

利博(Profit & Gambit)公司生产家用的清洁产品,这是一个高度竞争的市场,公司为了增加市场份额连续挣扎多年。管理层决定集中在下列三个主要产品上实行一个大规模的新的广告运动。

- 一种喷雾去污剂
- 一种新的液体洗涤剂
- 一种成熟的洗衣粉

这一广告运动会采用电视和印刷媒体。一个商业广告已经形成,要在全国的电视上做液体洗涤剂的广告来帮助推出这一新产品。印刷媒体的广告将用来促销所有三种产品,包括消费者可用来以低价购买产品的象征性优惠券。总的目标是增加所有这些产品(但着重是液体洗涤剂)的销售在明年有一个大的飞跃。管理部门特别设定了如下广告运动的目标:

- 喷雾去污剂必须至少增加 3% 的市场份额
- 新的液体洗涤剂必须至少增加 18% 的市场份额
- 洗衣粉占洗涤剂市场的份额必须增加 4%

表 2.2 显示了在各自的媒体上做一单位广告的相应产品市场份额的估计增加额(一个单位是指利博公司通常采用的一个广告标准批量,但其他数量也是允许的)。在电视一列中洗衣粉的增加份额为 -1% 的原因是新的液体洗涤剂的电视商业广告会带走一些洗衣粉

的销售额。表中最底行显示了两种媒体中每一种媒体上做广告的单位成本。

管理部门的目标是决定以最低的总成本下达到市场份额的目标要在每种媒体上做多少钱的广告。

**表 2.2　利博公司广告组合问题的数据**

| 产　品 | 每单位广告增加的市场份额(%) | | 需要最小的增加量(%) |
|---|---|---|---|
| | 电　视 | 印刷媒体 | |
| 去污剂 | 0 | 1 | 3 |
| 液体洗涤剂 | 3 | 2 | 18 |
| 洗衣粉 | -1 | 4 | 4 |
| 单位成本 | 100 万美元 | 200 万美元 | |

## 建立这个问题的电子表格模型

2.3 节结尾总结的程序可以用来为这一问题建立电子表格模型，根据那里描述的程序，每一步骤重复如下：

1. 为问题收集数据，这已经在表 2.2 中做了。
2. 在电子表格的数据单元格中输入数据，图 2.21 中的上半张显示了这一电子表格。数据单元格在 C 和 D 列(4 行和 8 到 10 行)，还在 G8:G10 单元格。注意一下电子表格这一特定的形式是怎样有助于对表 2.2 中数据进行直接转换的。
3. 确定要作出决策的活动程度并指定这些决策的可变单元格。在这里，活动是指在电视上做广告和印刷媒体上做广告，活动水平是指在这些媒体上投放的广告量。因此，要作的决策为：

   决策 1:TV = 电视广告的单位数量
   决策 2:PM = 印刷媒体广告的单位数量

   图 2.21 中的两个细边框的浅灰色单元格 C14 和 D14 已被指定为可变单元格来存放这两个数：

   TV→单元格 C14　　PM→单元格 D14

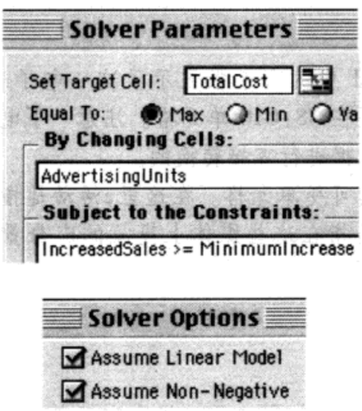
   以单位广告量作为这些单元格的名字(在图 2.21 的底部可以看到单元格名字的列表)。这些是可变单元格的自然位置，因为每一个都是在相应广告媒体的列中并且直接在单位成本的下面。开始时，一个任意的试验解(例如都取为 0)输入这些单元格中(图 2.21 显示了已经应用 Solver 求解后的最优解)。
4. 确定对这些决策的约束条件并且必要时引入输出单元格来具体化这些约束条件。如表 2.2 最右边列显示的，管理部门施加的三个约束条件为各个产品市场份额增加额的目标，这些约束条件是：

   喷雾去污剂：市场份额总增加≥3%
   液体洗涤剂：市场份额总增加≥18%
   洗衣粉：　市场份额总增加≥4%

   表 2.2 的第二和第三列指出了做两种广告导致市场份额的增加额为：

   喷雾去污剂的市场总增加额 = 1% PM

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Profit & Gambit Co. Advertising-Mix Problem** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | **Television** | **Print Media** | | | |
| 4 | | Unit Cost ($millions) | 1 | 2 | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | Increased | | Minimum |
| 7 | | | Increase in Sales per Unit of Advertising | | Sales | | Increase |
| 8 | | Stain Remover | 0% | 1% | 3% | ≥ | 3% |
| 9 | | Liquid Detergent | 3% | 2% | 18% | ≥ | 18% |
| 10 | | Powder Detergent | -1% | 4% | 8% | ≥ | 4% |
| 11 | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | **Total Cost** |
| 13 | | | **Television** | **Print Media** | | | **($millions)** |
| 14 | | Advertising Units | 4 | 3 | | | 10 |




| | E |
|---|---|
| 6 | Increased |
| 7 | Sales |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:D8, AdvertisingUnits) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9, AdvertisingUnits) |
| 10 | =SUMPRODUCT(C10:D10, AdvertisingUnits) |

| | G |
|---|---|
| 12 | Total Cost |
| 13 | ($millions) |
| 14 | =SUMPRODUCT(UnitCost, AdvertisingUnits) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| AdvertisingUnits | C14: D14 |
| IncreasedSales | E8: E10 |
| IncreasedSalesPerUnitAdvertising | C8: D10 |
| MinimumIncrease | G8: G10 |
| TotalCost | G14 |
| UnitCost | C4: D4 |

**图 2.21** 利博公司问题的电子表格模型，包含目标单元格总成本(G14)，E 列其他输出单元格的公式和需要建立 Solver 对话框的规定，可变单元格(C14 和 D14)显示了通过 Solver 得到的最优解。

液体洗涤剂的市场总增加额 = 3% TV + 2% PM
洗衣粉的市场总增加额 = −1% TV + 4% PM

因此，由于电子表格的第 8、9 和 10 行用来提供三种产品的信息，单元格 E8、E9 和 E10 作为输出单元格被引入来显示相应产品市场份额的总增加额。此外，进入列 F 中的≥符号提示我们增加的市场份额至少要与列 G 中的数值一样大(这里使用≥符号而不是≤符号是与图 2.3 中的伟恩德公司问题电子表格模型的一个主要区别)。

5. 选定完全绩效测度进入目标单元格。管理部门声明的目标是以最低的总成本下达到市场份额的目标要在每种媒体上做多少钱的广告。因此，广告的总成本进入目标

单元格总成本(G14)，G14 是这一单元格的自然位置因为它在可变单元格的同一列中。表 2.2 的最底行暗示进入这一单元格的数值为：

成本 =(100 万美元)TV +(200 万美元)PM→单元格 G14

6. 使用 SUMPRODUCT 函数为每个输出单元格输入相应的值(包括目标单元格)。以成本和市场份额总增加额的上述表达式为基础，图 2.21 中电子表格的右边直接显示了这里输出单元格需要的 SUMPRODUCT 函数。注意每个函数涉及相关的数据单元格和可变单元格单位广告量(C14，D14)。

   这个电子表格模型是一线性规划模型，因为它具有 2.3 节中所列举的线性规划模型的所有特征。

## 应用 Solver 求解这个模型

对这个模型使用 Excel Solver 得出最优解的程序与 2.6 节描述的基本相同，图 2.21 的左下角显示了 Solver 对话框的主要部分。包括为目标单元格和可变单元格设定地址，约束条件销售量的增加≥最小增加量也通过“添加约束”对话框在 Solver 对话框中具体化了。既然目标是最小化总成本，所以选择了“最小”(这与伟恩德公司问题选择的“最大”形成对比)。

图 2.21 的左下角显示了点击 Solver 对话框的“选项”按钮后所选择的选项，“采用线性模型”选项定义了这个模型是线性规划模型，“假定非负”选项定义了可变单元格必须是非负约束，因为负的广告值是不可能的。

点击 Solver 对话框的求解按钮后，得到了在图 2.21 中电子表格的可变单元格中显示的最优解。

**最优解**

C14 = 4(采用 4 单位电视广告)

D14 = 3(采用 3 单位印刷媒体广告)

目标单元格显示了这个广告计划的总成本为 1000 万美元。

## 电子表格中的数学模型

在建立电子表格模型程序的第五步中，广告的总成本由下式决定：

$$成本 = TV + 2PM(百万美元)$$

目标是确定 TV(电视广告的单位数)和 PM(印刷媒体广告的单位数)的取值使得这个成本最小。第四步确定了三个函数约束：

| | |
|---|---|
| 喷雾去污剂： | $1\%\,PM \geq 3\%$ |
| 液体洗涤剂： | $3\%\,TV + 2\%\,PM \geq 18\%$ |
| 洗衣粉： | $-1\%\,TV + 4\%\,PM \geq 4\%$ |

选择“假定非负”选项确认了 TV 和 PM 不能是负的。因此，从函数约束中去掉百分比符号后，在电子表格中完整的数学模型可以陈述为下面简洁的形式：

$$最小化 \quad 成本 = TV + 2PM\ (百万美元)$$

S. t.

喷雾去污剂的市场增加额：　　　$PM \geq 3$

液体洗涤剂的市场增加额：$3TV + 2PM \geq 18$

洗衣粉的市场增加额：　$-1TV + 4PM \geq 4$

以及

$$TV \geq 0 \qquad PM \geq 0$$

这个陈述暗示了"选择 TV 和 PM 的值使得……"，术语"S. t."是"选择受所有下列约束条件约束的 TV 和 PM 的值"。

这一模型是电子表格上线性规划模型的代数形式。注意一下这个代数模型的参数(常数)是如何直接从表 2.2 中的数据得到。实际上，整个模型可以直接从表 2.2 来建立。

这个代数模型与 2.4 节得到的伟恩德公司问题代数模型的区别产生了在图解法如何应用求解模型方面的一些有趣的变化。为进一步扩展你对线性规划的几何直觉，下面我们简要地描述一下图解法在这里的应用。

## 应用图解法

由于这个线性规划模型只有两个决策变量，它可以用 2.5 节所描述的图解法进行求解。这里有趣的特点是图解法如何调整为"最小化"以及函数约束中有"≥"符号。

图 2.22 显示了这个模型的可行域，三条约束边界线用与 2.5 节同样的方式得出。但是，现在指明每条直线的哪一边满足约束条件的箭头都朝向远离原点的方向，原因是原点不满足所有带"≥"符号和右端值为正的约束条件。

> 比较图 2.23 和 2.14，对比最大化问题和最小化问题。

为了在这个可行域中找出最优解(最小化成本 = TV + 2PM 的解)，我们首先用看来可以得到的目标函数的一个特定值构造一条样本目标函数线，比如，成本 = 15 这条直线。图 2.23 显示这条直线的大部分穿过可行域。既然这是一个"最小化"问题，我们要寻找还穿过可行域内点的目标函数线所给出的最小成本值。原点自动具有"成本 = 0"的目标函数值，所以小于 15 大于 0 的目标函数线比"成本 = 15"的目标函数线更靠近原点，因此我们要移动"成本 = 15"的目标函数线到更靠近原点的目标函数线。图 2.23 显示更小的成本为 10 的目标函数线还在可行域中穿过一点，这一点(TV，PM) = (4，3)就是最优解。

案例 5.1 将会继续运用 what-if 分析如果管理者改变产品的销售目标会对最优解和总广告成本带来什么影响。

## 问题回顾

1. 利博公司生产哪几类产品？
2. 考虑利用哪些广告媒体为三种产品做广告？
3. 对于研究的问题，管理部门的目标是什么？
4. 在电子表格中设置目标单元格和可变单元格的基本原理是什么？
5. 这一问题线性规划模型的代数形式与伟恩德玻璃公司问题代数形式的区别在哪两个主要方面？
6. 解 (0,0) 满足右端值为正的带"≥"符号的函数约束吗？
7. 对于这一最小化问题，为了达到最优解，穿过可行域的目标函数线应该向靠近原点移动还是更加远离原点移动？

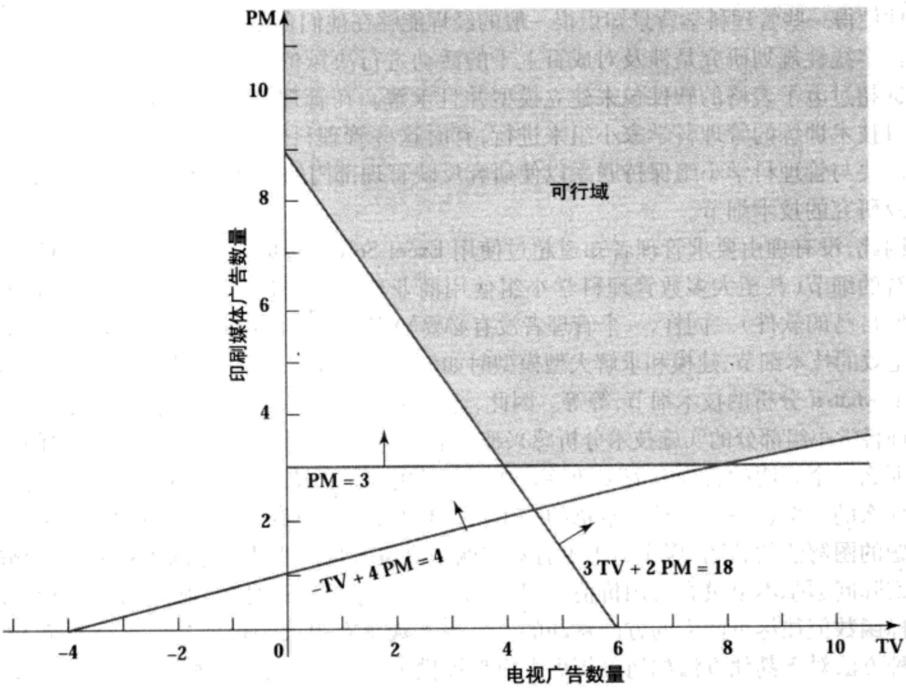



**图 2.22**　图中显示了利博公司产品组合问题的可行域,其中≥的函数约束条件使这个可行域向远离原点的上方移动。

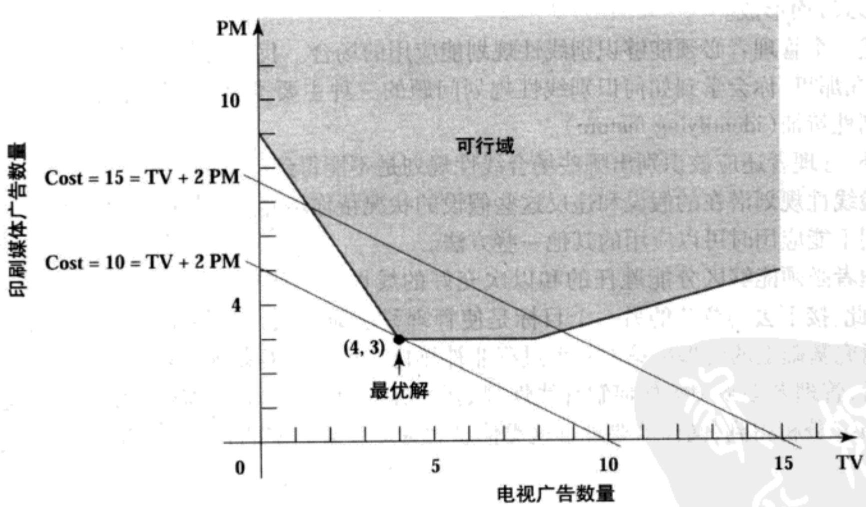



**图 2.23**　图显示了利博公司广告组合问题的两条目标方程线,其中下面的那一条经过最优解。

## 2.8　管理视角的线性规划

线性规划对于辅助全世界各类公司的管理决策制定是无价的,功能强大的电子表格软件包的出现更进一步扩展了这一技术的应用。在电子表格上对小型线性规划模型建模和求解的

易用性使得一些管理科学背景知识很一般的经理能够在他们自己的电脑上完成这一工作。

许多线性规划研究是涉及对成百上千的活动进行决策的大型项目,通常要用到复杂程度远远超过电子表格的软件包来建立模型并且求解。在管理部门的倡导下,这些研究一般由经过技术训练的管理科学家小组来进行,有时这些管理科学家称为运筹学分析师。管理部门需要与管理科学小组保持联系以使研究反映管理部门的目标的要求。但管理部门一般不涉及研究的技术细节。

因此,没有理由要求管理者知道超过使用 Excel Solver 初步知识的线性规划模型是如何被求解的细节(甚至大多数管理科学小组使用商业软件包在计算机上求解模型,而不是开发他们自己的软件)。同样,一个管理者没有必要知道如何建立复杂模型的技术细节、如何使模型生效的技术细节、建模和求解大型模型时如何与计算机交互的技术细节、如何有效地对模型实施 what-if 分析的技术细节,等等。因此,这些技术细节在本书中没有得到重点强调,对作为管理科学小组部分的实施技术分析感兴趣的学生应该学习管理科学中技术性更强的课程。

那么一个开明的管理者需要知道线性规划的哪些内容呢? 一个管理者需要具有线性规划是什么的一个良好的直觉。本章的一个目标是开始培养那种直觉,那是研究求解两个变量问题的图解法的意图,现实中很少有只有两个决策变量的线性规划问题。因此,图解法对解决实际问题基本上没有实用价值。但是,图解法对于传达线性规划涉及确定约束边界和使目标函数值往尽可能大的方向移动的这一基本观念有很大的价值。你还会在第 17 章看到这种方法对于其他方法如何分析更大模型提供了相当大的几何分析能力。

一个管理者还必须对线性规划的适用性和作用有一个正确的评价以使得在合适的时候鼓励应用。对于使用本书的未来的管理者而言,这一正确的评价正在通过描述线性规划的实际应用和产生的影响以及通过阐明线性规划能做什么的各种实际举例和案例研究(缩小的模型形式)而形成。

当然一个管理者必须能够识别线性规划能应用的场合。我们在第 4 章中重点来培养这一技能,在那里,你会学到如何识别线性规划问题的三种主要类型(以及它们的混合)每一种的区别性特征(identifying feature)。

此外,管理者还应该识别出哪些场合线性规划是不能得到应用的。第 9 章 ~ 第 11 章将通过检验线性规划潜在的假设和违反这些假设的状况帮你培养这一技能。这几章还介绍了线性规划不能应用时可以应用的其他一些方法。

管理者必须能够区分能胜任的和以次充好的线性规划研究(或任何其他管理科学技术)。因此,接下去的章节的另一个目标是使管理科学研究从一开始研究问题到最后实施建立在研究基础上的管理决策的整个过程非神秘化。这是全书案例研究的一个意图。

最后,管理者必须理解如何解释线性规划研究得出的结果,尤其需要理解哪类信息能够通过 what-if 分析得到,同样需要理解这类信息对管理决策制定的含义。第 5 章重点介绍这些主题。

## 问题回顾

1. 管理部门一般对线性规划研究的技术细节涉及很深吗?
2. 基本上所有实际的线性规划问题含有两个以上的决策变量,那么研究求解两个决策变量问题的图解法有什么意图呢?
3. 一个开明的管理者关于线性规划应该知道哪些事项?

## 2.9　本章小结

线性规划是对某几类问题的辅助管理决策制定的功能强大的技术。它的基本方法是建立一个称为线性规划模型的数学模型来表述问题然后对这个模型进行分析。任何一个线性规划模型包含有代表要作决策的决策变量、表述对这些决策变量的可行值限制的约束条件和一个代表问题完全绩效测度的目标函数。

电子表格提供了一种对线性规划问题进行建模并且进行求解的灵活且直观的方式。数据输入数据单元格，可变单元格显示决策变量的取值，目标单元格显示目标函数值，输出单元格用来具体化约束条件。在电子表格上建立模型并且用 Solver 对话框进一步具体化后，可以 Solver 快速找出一个最优解。

图解法可以用来求解只有两个决策变量的线性规划模型，这一方法提供了线性规划模型和最优解性质的相当大的洞察力。

## 专业术语

**可变单元格**(changing cells)：电子表格中表示决策变量值的单元格。(2.3 节)

**约束条件**(constraints)：对决策变量可行值的限制条件。(2.3、2.4 节)

**约束边界方程**(constraint boundary equation)：约束边界直线的方程。(2.5 节)

**约束边界线**(constraint boundary line)：对于两变量线性规划问题，约束条件允许的解的边界直线。(2.5 节)

**数据单元格**(data cells)：电子表格中显示问题数据的单元格。(2.3 节)

**决策变量**(decision variable)：代表特定活动程度决策的一个代数变量，决策变量的值显示在电子表格的可变单元格中。(2.4 节)

**可行域**(feasible region)：由所有可行解组成的几何区域。(2.5 节)

**可行解**(feasible solution)：线性规划模型中同时满足所有约束条件的解。(2.4 节)

**函数约束**(functional constraint)：含有决策变量在左端的函数的约束条件，线性规划中所有非负的约束称为函数约束。(2.4 节)

**图解法**(Graphical method)：在两维图上求解两个决策变量线性规划问题的一种方法。(2.5 和 2.7 节)

**不可行解**(infeasible solution)：线性规划模型中至少违反一个约束条件的解。(2.4 节)

**线性规划模型**(linear programming model)：表示线性规划问题的数学模型。(2.3 和 2.4 节)

**非负约束条件**(nonnegativity constraint)：表示特定决策变量必须非负(大于或等于 0)的约束条件。(2.3 和 2.4 节)

**目标函数**(objective function)：根据问题的目标，线性规划模型中表示想要最大化或最小化的部分，目标函数值显示在电子表格的目标单元格。(2.4 节)

**目标函数线**(objective function line)：对于两个决策变量的线性规划问题，具有同一目标函数值的点组成的直线。(2.5 节)

**最优解**(optimal solution)：根据目标函数求出的最优可行解。(2.4 节)

**输出单元格**(output cells)：电子表格中根据可变单元格给出结果的单元格，这些单元格通常用来帮助具体化约束条件。(2.3 节)

**参数**(parameter)：线性规划模型中的参数是函数约束和目标函数中的常数(系数或右端值)，每个参数表示一个对分析问题很重要的数量(例如，一种资源的可得数量)。(2.4 节)

**产品组合问题**(product-mix problem)：在考虑的条件下，目标为找出产品生产水平的最盈利组合的一类线性规划问题。(2.2 节)

**斜截式**(slope-intercept form)：对于两个决策变量的线性规划问题，一个约束边界方程的斜截式显示了约束边界方程的斜率和直线在垂直轴的截距。(2.5 节)

**直线斜率**(slope of a line)：对于水平轴代表变量 $x$，垂直轴代表变量 $y$ 的图，一条直线的斜率为当 $x$ 增

加 1 时 $y$ 的变化量。(2.5 节)

**解**(solution):对决策变量的任何一个分配值,不管这个分配是否好或是否可行。(2.4 节)

**规划求解软件**(Solver):在电子表格上用来具体化模型然后为模型找出最优解的电子表格工具。(2.6 节)

**目标单元格**(target cell):在电子表格中表示决策的完全绩效测度的单元格。(2.3 节)

## 本章管理科学课件的学习辅助

"Ch. 2—**线性规划:基本概念**"Excel **文件**:

伟恩德公司例子
利博公司例子

**管理科学互动模型**:

线性规划图解和敏感性分析模型

Excel **加载宏**:

Premium Solver 软件
Solver Table

## 习 题

需要用到 Excel 的习题或部分小问题我们在其左边插入了 E* 符号(表示 Excel),带星号的习题至少在书后有部分解答。

2.1. 阅读 2.1 节中脚注描述的第一个案例研究的文章:《潘得罗索工业公司的产品组合》(这篇文章能在 www.mhhe.com/hillier2e/articles 网站上下载)。

a. 根据文章,描述经常阻碍管理们应用最优化模型的两个因素。

b. 2.1 节指出在潘得罗索公司没有怎么费力就用线性规划"使公司重点生产的原木产品类型有了巨大的转变"。指出这些转变。

c. 有了这个成功的应用,管理部门就迫切希望对其他问题也应用最优化模型。指出这些其他问题。

2.2. 阅读 2.1 节中脚注描述的第二个案例研究的文章:《联合航空公司的人员排程》(这篇文章能在 www.mhhe.com/hillier2e/articles 网站上下载)。

a. 描述在管理科学研究之前联合航空公司是怎样对机场和订票处进行班次排程的。

b. 这项研究开始时,在定义问题阶段确定了 5 个具体的项目要求。指出这些项目要求。

c. 在建立排程系统时要有一定的弹性来适应每个办公处的组织文化,描述这一弹性。为什么需要这一弹性?

d. 简要描述研究产生的有形和无形的收益。

2.3. 阅读 2.1 节中脚注描述的第二个案例研究的文章:《Citgo 石油公司的供应、配送和营销规划》(这篇文章能在 www.mhhe.com/hillier2e/articles 网站上下载)。

a. 在管理科学研究进行之前的几年中发生了什么事情使得对控制与库存有关的资金数量变得特别重要。

b. Citgo 石油公司的管道、储油罐和驳船组成的配送网络跨越哪些地理区域?他们把产品销往哪里?

c. 模型包括的时间跨度多长?

d. Citgo 石油公司用来求解的计算机是什么?典型的运算时间有多长?

e. 模型有哪四类使用者?每类使用者是怎样使用模型的?

f. 列出 SDM 系统产生的主要报告类型。

g. 这项研究实施上的主要挑战是什么?

h. 列出实施这项研究所实现的直接和非直接收益。

2.4. 再考虑 2.2 介绍的伟恩德玻璃制品公司案例研究,假定两种产品的单位利润估计现在改为门是 600 美元,窗是 300 美元。

E* a. 在电子表格上为这一问题建立新的线性规划模型。

b. 建立问题的代数模型。

c. 用图解法求解新的模型。

2.5. 再考虑 2.2 介绍的伟恩德玻璃制品公司案例研究,假定比尔·塔斯托(公司的制造副总裁)已经找到了为新产品在工厂 2

额外的生产时间的方法。

a. 如果每周额外多 1 个小时,用图解法找出新的最优解及相应的总利润。

b. 如果每周额外多 2 个小时,用图解法找出新的最优解及相应的总利润。

c. 如果每周额外多 3 个小时,用图解法找出新的最优解及相应的总利润。

d. 使用上述结果确定根据两种新产品增加的总利润,为每周额外的 1 小时付多少钱是值得的。

E*2.6. 用 Excel 求解习题 2.5。

2.7. 下面的表格总结了两种产品 A 和 B 的关键信息以及生产所需的资源 Q、R、S:

| 资　源 | 每单位产品资源使用量 | | 可用资源 |
|---|---|---|---|
| | 产品 A | 产品 B | |
| Q | 2 | 1 | 2 |
| R | 1 | 2 | 2 |
| S | 3 | 3 | 4 |
| 利润/单位 | 3000 美元 | 2000 美元 | |

满足所有线性规划假设。

E* a. 在电子表格上为这一问题建立线性规划模型。

b. 用代数方法建立一个相同的模型。

c. 用图解法求解这个模型。

2.8.* 今天是幸运的一天。你得到了 10000 美元的奖金。除了将 4000 美元用于交税和请客之外,你决定将剩余的 6000 美元用于投资。两个朋友听到这个消息后邀请你成为两家不同公司的合伙人。每一个朋友介绍了一家。这两个选择每一个都将会花去你明年夏天的一些时间并且要花费一些资金。在第一个朋友的公司中成为一个独资人要求投资 5000 美元并花费 400 小时,估计利润(不考虑时间价值)是 4500 美元。第二个朋友的公司的相应数据为 4000 美元和 500 小时,估计利润为 4500 美元。然而每一个朋友都允许你根据所好以任意比例投资。如果你选择投资一定比例,上面所有给出的独资人的数据(资金投资、时间投资和利润)都将乘以一个相同的比例。

因为你正在寻找一个有意义的夏季工作(最多 600 小时),你决定以能够带来最大总估计利润的组合参与到一个或全部朋友的公司中。你需要解决这个问题,找到最佳组合。

a. 比较这个问题与 2.2 节伟恩德玻璃制品公司问题的相似之处。然后为这个问题构建并填写一个像表 2.1 一样的表,确定活动和资源。

b. 口头说明需要作出的决策、决策的限制和决策的全面绩效测度。

c. 将这些对限制和绩效测度的描述以数据和决策的形式转化为定量表述。

E* d. 为这个问题建立电子表格模型。找出数据单元格、可变单元格、目标单元格,并且用 SUMPRODUCT 函数表示每一个输出单元格中的 Excel 等式。

e. 请解释为什么这个电子表格模型是一个线性规划模型。

f. 用代数方法建立一个同样的模型。

g. 分别用模型的代数形式和电子表格形式确定决策变量、目标函数、非负约束、函数约束和参数。

h. 使用图解法求解这个模型。你的总期望利润是多少?

i. 用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型来解这个模型。

2.9. 有如下代数形式的线性规划模型,$x_1$ 和 $x_2$ 是决策变量,$Z$ 是绩效测度的值:

$$\text{Maximize} \quad Z = x_1 + 2x_2$$

受到的约束

资源约束 1: $x_1 + x_2 \leq 5$(可用数量)

资源约束 2: $x_1 + 3x_2 \leq 9$(可用数量)

和

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

a. 指出这个模型的目标函数、函数约束和非负约束。

E* b. 将这个模型用电子表格表示。

c. $(x_1, x_2) = (3,1)$ 是不是一个可行解?

d. $(x_1, x_2) = (1,3)$ 是不是一个可行解?

E* e. 使用 Excel Solver 求解这个模型。

f. 使用图解法求解这个模型。

g. 用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型来解这个模型。

2.10. 有如下代数形式的线性规划模型,$x_1$ 和 $x_2$ 是决策变量,$Z$ 是绩效测度的值:

$$\text{Maximize} \quad Z = 3x_1 + 2x_2$$

受到的约束

资源约束 1: $3x_1 + x_2 \leq 9$(可用数量)

资源约束 2: $x_1 + 2x_2 \leq 8$(可用数量)

和

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

a. 指出这个模型的目标函数、函数约束和非负约束。

E* b. 将这个模型用电子表格表示。

c. $(x_1, x_2) = (2,1)$是不是一个可行解?

d. $(x_1, x_2) = (2,3)$是不是一个可行解?

e. $(x_1, x_2) = (0,5)$是不是一个可行解?

E* f. 使用 Excel Solver 求解这个模型。

g. 使用图解法求解这个模型。

h. 用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型来解这个模型。

2.11. 伟特制窗(Whitt Window)公司是一个只有三个雇员的公司,生产两种手工窗户:木框窗户和铝框窗户。公司每生产一个木框窗户可以获利 60 美元,一个铝框窗户可以获利 30 美元。Doug 制作木框窗户,每天可以制作 6 扇。Linda 制作铝框窗户,每天可以制作 4 扇。Bob 切割玻璃,每天可以切割 48 平方英尺。每一扇木框窗户使用 6 平方英尺的玻璃,每一扇铝框窗户使用 8 平方英尺。

公司需要确定每天要制作多少窗户才能够使得总利润最大。

a. 比较这个问题与 2.2 节伟恩德玻璃制品公司问题的相似之处。然后为这个问题构建并填写一个像表 2.1 一样的表,确定活动和资源。

b. 口头说出需要作出的决策、进行决策的约束条件和决策的绩效测度。

c. 将对约束和绩效测度的口头描述转化为数据和决策形式的量化表述。

E* d. 为这个问题建立一个电子表格模型,找出数据单元格、可变单元格、目标单元格,并且用 SUMPRODUCT 函数表示每一个输出单元格中的 Excel 等式。

e. 请解释为什么这个电子表格模型是一个线性规划模型。

f. 用代数形式建立相同的模型。

g. 分别用模型的代数形式和电子表格形式确定决策变量、目标函数、非负约束、函数约束和参数。

h. 用图解法求解这个模型。

i. 这个小镇的一个新竞争者也开始制作木框窗户。这会迫使公司降低价格从而减少每一个木框窗户的利润。如果每一个木框窗户的利润从 60 美元降到 40 美元,最优解将会怎样变化(如果会发生变化)? 从 60 美元降低到 20 美元呢?

j. Doug 正在考虑减少他的工作时间,这将会降低木框窗户的日产量。如果他每天只制作 5 扇木框窗户,最优解将如何变化?

2.12. 安派司电视机(Apex Television)公司要确定公司一家工厂的 27″和 20″电视机的产量。市场调查表明,每天大约可以卖出 40 台 27″和 10 台 20″电视机。生产一台 27″电视机需要 20 个工时,20″需要 10 个工时。卖出一台 27″电视机可得利润 120 美元,卖出一台 20″电视机得到利润 80 美元。一个批发商已经同意如果产量不超过市场调查得到的最大数量,他将购买所有的电视机。

E* a. 为这个问题在电子表格上建立一个线性规划模型并求解。

b. 用代数形式建立相同的模型。

c. 用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型来解这个模型。

2.13. *有如下的直线方程:

$$2x_1 + x_2 = 4$$

a. 当 $x_2 = 0$ 时确定 $x_1$ 的值。当 $x_1 = 0$ 时确定 $x_2$ 的值。

b. 以 $x_1$ 为横轴、$x_2$ 为纵轴建立一个两维图。使用问题 a 得到的信息画出这条直线。

c. 确定直线的斜率。

d. 找出斜截式直线方程。然后使用这个方程确定直线的斜率和直线在纵轴上的截距。

2.14. 对于下面的直线方程,完成习题 2.13 的各项任务。

$$2x_1 + 5x_2 = 10$$

2.15. 对于下面的直线方程,完成习题 2.13 的各项任务。

$$2x_1 - 3x_2 = 12$$

2.16. * 对于下面决策变量 $x_1$、$x_2$ 的约束,各画一张图显示满足这个约束的非负解。

a. $x_1 + 3x_2 \leq 6$

b. $4x_1 + 3x_2 \leq 12$

c. $4x_1 + x_2 \leq 8$

d. 现在将这些约束综合在一张图上,表示出在函数约束和非负约束下的可行区域。

2.17. 对于下面决策变量 $x_1$、$x_2$ 的约束,各画一张图显示满足这个约束的非负解。

a. $10x_1 + 20x_2 \leq 40$

b. $5x_1 + 3x_2 \geq 15$

c. $5x_1 - x_2 \leq 15$

d. 现在将这些约束综合在一张图上,表示出在函数约束和非负约束下的可行区域。

2.18. 对于下面决策变量 $x_1$、$x_2$ 的约束,各画一张图显示满足这个约束的非负解。

a. $x_1 - x_2 \leq 2$

b. $-3x_1 + 6x_2 \geq 3$

c. $4x_1 - 3x_2 \geq 1$

d. 现在将这些约束综合在一张图上,表示出在函数约束和非负约束下的可行区域。

2.19. 世界灯具(WorldLight)公司生产两种需要金属框架部件和电器部件的电灯装置。管理层需要确定每一种产品要生产多少才能够使得利润最大。每一件产品 1 要 1 单位的框架部件和 2 单位的电器部件。每一件产品 2 要 3 单位的框架部件和 2 单位的电器部件。公司有 200 个单位的框架部件和 300 单位的电器部件。每单位的产品 1 可得到利润 1 美元,每单位的产品 2 可得到利润 2 美元。产品 2 最多可以生产 60 个单位。超过 60 个单位的产品不能带来利润,因此不能有超产。

a. 口头说出需要作出的决策、进行决策的约束条件和决策的绩效测度。

b. 将对约束和绩效测度的口头描述转化为数据和决策形式的量化表述。

E* c. 为这个问题在电子表格上建立一个线性规划模型并求解。

d. 用代数形式建立相同的模型。

e. 用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型来解这个模型。得到的总利润是多少?

2.20. 普里默(Primo)保险公司引入了两种新产品:特殊风险保险和抵押。每单位特殊风险保险的利润是 5 美元,每单位抵押是 2 美元。

管理层希望确定新产品的销售量使得总期望利润最大。工作的要求如下:

| 部门 | 每单位工时 | | 可使用工时 |
|---|---|---|---|
| | 特殊风险 | 抵押 | |
| 承保 | 3 | 2 | 2400 |
| 管理 | 0 | 1 | 800 |
| 索赔 | 2 | 0 | 1200 |

a. 口头说出需要作出的决策、进行决策的约束条件和决策的绩效测度。

b. 将对约束和绩效测度的口头描述转化为数据和决策形式的量化表述。

E* c. 为这个问题在电子表格上建立一个线性规划模型并求解。

d. 用代数形式建立相同的模型。

e. 用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型来解这个模型。

2.21. * 考虑下面决策变量是 $x_1$ 和 $x_2$ 的线性规划模型目标函数:

$$\text{最大化} \quad \text{利润} = 2x_1 + 3x_2$$

a. 对于利润 = 6、利润 = 12 和利润 = 18 在一张图上分别画出相应的目标函数直线。

b. 找出这三条直线方程的斜截式形式。比较三条直线的斜率以及在 $x_2$ 轴上的截距。

2.22. 有如下决策变量是 $x_1$ 和 $x_2$ 的线性规划模型目标函数,$P$ 代表总利润:

$$\text{最大化} \quad P = 2x_1 + 3x_2$$

a. 对于 $P = 100$、$P = 200$ 和 $P = 300$ 在一张图上分别画出相应的目标函数直线。

b. 找出这三条直线方程的斜截式形式。比较三条直线的斜率以及在 $x_2$ 轴上的截距。

2.23. * 考虑下面决策变量是 $x_1$ 和 $x_2$ 的线性规划模型目标函数:

$$\text{最小化} \quad \text{成本} = 2x_1 + 3x_2$$

a. 对于成本 = 300、成本 = 200 和成本 = 100 在一张图上分别画出相应的目标函数直线。

b. 找出这三条直线方程的斜截式形式。比较三条直线的斜率以及在 $x_2$ 轴上的截距。

2.24. 有如下的直线方程：

$$20x_1 + 40x_2 = 400$$

a. 找出斜截式直线方程。

b. 使用这个形式确定直线的斜率和直线在 $x_2$ 轴上的截距。

c. 用问题 b 得到的信息在图上画出这条直线。

2.25. * 找出如下直线方程的斜截式形式：

$$8x_1 + 5x_2 = 40$$

2.26. 找出下列直线方程的斜截式形式：

a. $10x_1 + 5x_2 = 20$

b. $-2x_1 + 3x_2 = 6$

c. $5x_1 - 2x_2 = 10$

2.27. 考虑下面对决策变量的约束：

$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$

a. 写出这个约束的约束边界等式。

b. 找出斜截式直线方程。

c. 使用这个形式确定约束边界直线的斜率和直线在 $x_2$ 轴上的截距。

d. 用问题 c 得到的信息在图上画出这条约束边界直线。

e. 指出直线的哪一边符合这个约束。

2.28. 有如下代数形式的线性规划模型，$x_1$ 和 $x_2$ 是决策变量，$Z$ 是绩效测度的值：

$$最大化 \quad Z = 20x_1 + 10x_2$$

约束条件

$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$3x_1 + x_2 \leq 7$$

和

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

a. 使用图解法求解这个模型。

E* b. 将这个模型用电子表格表示，然后使用 Excel Solver 求解这个模型。

2.29. * 有如下代数形式的线性规划模型，$x_1$ 和 $x_2$ 是决策变量，对四种资源的使用是约束：

$$最大化 \quad 利润 = 2x_1 + x_2$$

约束条件

$$x_2 \leq 10 \quad (资源 1)$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 60 \quad (资源 2)$$
$$x_1 + x_2 \leq 18 \quad (资源 3)$$
$$3x_1 + x_2 \leq 44 \quad (资源 4)$$

和

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

a. 使用图解法求解这个模型。

E* b. 将这个模型用电子表格表示，然后使用 Excel Solver 求解这个模型。

2.30. 由于你有管理科学的知识，所以你的老板要你分析一个涉及两种产品和两种资源的产品组合。模型的代数形式如下，$x_1$ 和 $x_2$ 是决策变量，$P$ 是总利润。

$$最大化 \quad 利润 = 3x_1 + 2x_2$$

约束条件

$$x_1 + x_2 \leq 8 \quad (资源 1)$$
$$2x_1 + x_2 \leq 10 \quad (资源 2)$$

和

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

a. 使用图解法求解这个模型。

E* b. 将这个模型用电子表格表示，然后使用 Excel Solver 求解这个模型。

2.31. 有如下代数形式的线性规划模型，目标是在三种可用资源数量的限制下选择两种活动（$x_1$ 和 $x_2$）的水平，使得总利润最大。

$$最大化 \quad 利润 = 10x_1 + 20x_2$$

约束条件

$$-x_1 + 2x_2 \leq 15 \quad (资源 1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 12 \quad (资源 2)$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 45 \quad (资源 3)$$

和

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

a. 使用图解法求解这个模型。

E* b. 将这个模型用电子表格表示，然后使用 Excel Solver 求解这个模型。

2.32. 有如下代数形式的线性规划模型，$x_1$ 和 $x_2$ 是决策变量。使用图解法求解这个模型。

$$\text{最大化}\quad \text{利润} = 400x_1 + 500x_2$$

约束条件

$$\begin{aligned} 20x_1 + 10x_2 &\leq 100 \\ 5x_1 + 10x_2 &\leq 50 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 110 \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 15 \end{aligned}$$

和

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0$$

a. 使用图解法求解这个模型。

b. 用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型来解这个模型。

2.33. W&B(Weenies and Buns)是一家食品加工厂，制作热狗和热狗面包。他们每星期最多使用 200 磅自己的面粉制作热狗面包。每一个热狗面包需要 0.1 磅的面粉。最近他们与 Pigland 公司签订协议，Piglang 公司每个星期一向公司供应 800 磅猪肉制品。每个热狗需要1/4磅的猪肉制品。其他所有的制作热狗和热狗面包的配料供应充足。W&B 有 5 名全职雇员（每星期工作 40 小时）。制作每一个热狗需要 3 分钟，一个热狗面包需要 2 分钟。一个热狗能带来 0.2 美元的利润，一个热狗面包能带来 0.1 美元的利润。

W&B 公司想知道每一个星期应当制作多少个热狗和热狗面包才能获得最大利润。

a. 口头说出需要作出的决策、进行决策的约束条件和决策的绩效测度。

b. 将对约束和绩效测度的口头描述转化为数据和决策形式的量化表述。

E* c. 为这个问题建立一个电子表格模型并求解。

d. 用代数形式建立相同的模型。

e. 用图解法求解这个模型。由你决定是人工计算还是用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型来解这个模型。

2.34. 奥克家具(Oak Works)是一家手工制作餐桌和餐椅的家庭企业。他们从当地的一个林场中获得橡木。林场每月运给它们 2500 磅的橡木。每一张餐桌要用 50 磅，一张餐椅要用 25 磅。家庭成员自己制作全部的家具，每月有 480 个工时可用。每张餐桌或餐椅要花去 6 个工时。一张餐桌可以为奥克家具带来 400 美元的利润，一张餐椅可以带来 100 美元的利润。由于椅子通常是与餐桌配套卖的，他们想要至少制作两倍于餐桌数量的椅子。

奥克家具公司需要确定制作多少餐桌和椅子以使得利润最大。

E* a. 为这个问题在电子表格上建立一个线性规划模型并求解。

b. 用代数形式建立相同的模型。

c. 用图解法求解这个模型。由你决定是人工计算还是用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型来解这个模型。

2.35. Nutri-Jenny 是一个体重控制中心。它为客户提供各种各样的冷冻主餐。这些主餐受到了严格的营养成分监控，保证客户膳食平衡。一种新的主餐称为“牛腰间肉大餐”。它包括牛腰间肉和肉汁，加上一些豌豆、胡萝卜和面包卷。Nutri-Jenny 需要确定主餐中各种配料的数量以满足营养需求，同时使成本尽可能地低。每一种配料的营养成分和成本如下表所示：

| 配　料 | 卡路里（每盎司） | 脂肪所含卡路里（每盎司） | 维生素 A（国际单位每盎司） | 维生素 C（毫克每盎司） | 蛋白质（克每盎司） | 成本（每盎司） |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 牛腰间肉 | 54 | 19 | 0 | 0 | 8 | 40 美分 |
| 肉　汁 | 20 | 15 | 0 | 1 | 0 | 35 美分 |
| 豌　豆 | 15 | 0 | 15 | 3 | 1 | 15 美分 |
| 胡萝卜 | 8 | 0 | 350 | 1 | 1 | 18 美分 |
| 面包卷 | 40 | 10 | 0 | 0 | 1 | 10 美分 |

主餐的营养要求如下：(1)必须含有 280 到 320 之间的卡路里；(2)脂肪所含卡路里不能超过总卡路里含量的 30%；(3)必须至少含有 600 国际单位的维生素 A、10 毫克的维生素 C、30 克的脂肪。而且由于实际原因，至少必须包含 2 盎司的牛肉，

每盎司牛肉至少配有半盎司的肉汁。

E* a. 为这个问题在电子表格上建立一个线性规划模型并求解。

b. 用代数形式建立相同的模型。

2.36. 有如下代数形式的线性规划模型，$c_1$ 的值还没有确定。

$$最大化 \quad Z = c_1x_1 + x_2$$

约束条件

$$x_1 + x_2 \leqslant 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 10$$

和

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

对于各种可能的 $c_1$ 值(正的或负的)，使用图形分析确定最优解(s)以及 $x_1$ 和 $x_2$ 的值。

2.37. 有如下代数形式的线性规划模型，$c_1$ 的值还没有确定。

$$最大化 \quad Z = c_1x_1 + 2x_2$$

约束条件

$$4x_1 + x_2 \leqslant 12$$
$$x_1 - x_2 \geqslant 2$$

和

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

对于各种可能的 $c_1$ 值(正的或负的)，使用图形分析确定最优解(s)以及($x_1$,$x_2$)的值。

2.38. 有如下代数形式的线性规划模型，$k$ 的值还没有确定。

$$最大化 \quad Z = x_1 + 2x_2$$

约束条件

$$-x_1 + x_2 \leqslant 2$$
$$x_2 \leqslant 3$$
$$kx_1 + x_2 \leqslant 2k + 3 \quad k \geqslant 0$$

和

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

现在的解是$(x_1,x_2) = (2,3)$，使用图形分析确定 $k$ 的值使得这个解是最优解。

2.39. 拉尔夫·艾德蒙(Ralph Edmund)喜欢吃牛排和土豆，因此他决定将这两种食品作为正餐的全部(加上一些饮料和补充维生素的食品)。拉尔夫意识到这不是最健康的膳食结构，因此他想要确定两种食品的食用量多少是合适的，以满足一些主要营养的需求。他获得了一下营养和成本的信息：

| 成　分 | 每份各种成分的克数 | | 每天需要量(克) |
|---|---|---|---|
| | 牛排 | 土豆 | |
| 碳水化合物 | 5 | 15 | ≥50 |
| 蛋白质 | 20 | 5 | ≥40 |
| 脂　肪 | 15 | 2 | ≤60 |
| 每份成本 | 4 美元 | 2 美元 | |

拉尔夫想确定每天牛排和土豆所需要的份数(可能是小数)，以最低的成本满足这些需求。

a. 口头说出需要作出的决策、进行决策的约束条件和决策的绩效测度。

b. 将对约束和绩效测度的口头描述转化为数据和决策形式的量化表述。

E* c. 为这个问题在电子表格上建立一个线性规划模型并求解。

d. 用代数形式建立相同的模型。

e. 用图解法求解这个模型。

f. 用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型来解这个模型。

2.40. * 你的老板要求你使用管理科学知识确定两种活动($x_1$ 和 $x_2$)的水平，使得满足在约束的前提下总成本最小。模型的代数形式如下所示：

$$最大化 \quad 成本 = 15x_1 + 20x_2$$

约束条件

$$约束1: \; x_1 + 2x_2 \geqslant 10$$
$$约束2: \; 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6$$
$$约束3: \; x_1 + x_2 \geqslant 6$$

和

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

a. 用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型来解这个模型。

E* b. 为这个问题建立一个电子表格模型，然后使用 Excel Solver 求解这个模型。

2.41. 德赖特(Dwight)是一个基础教育学校教师，依靠养猪获得额外的收入。他需要决定给猪喂什么饲料。他正在考虑组合使

用当地供应商提供的猪饲料。在保证每一头猪摄入足够的热量和维生素的前提下，他希望喂养每一头猪的成本最小。每一种饲料的成本、热量含量和维生素含量如下表所示：

| 成　分 | 饲料 A | 饲料 B |
|---|---|---|
| 热量（每磅） | 800 | 1000 |
| 维生素（每磅） | 140 单位 | 70 单位 |
| 成本（每磅） | 0.40 美元 | 0.80 美元 |

每头猪每天至少需要 8000 卡的热量和至少 700 单位的维生素。还有一个限制是由于饲料 A 含有一种有毒成分，摄入量过多会发生中毒，因此饲料 A 不能超过每天喂食量的1/3（重量）。

a. 口头说出需要作出的决策、进行决策的约束条件和决策的绩效测度。

b. 将对约束和绩效测度的口头描述转化为数据和决策形式的量化表述。

E* c. 为这个问题在电子表格上建立一个线性规划模型并求解。

d. 用代数形式建立相同的模型。

e. 用图解法求解这个模型。所得到的每头猪每天的成本数多少？

2.42. 重新考虑 2.7 节描述的利博公司的问题。假设表 2.2 给出的估计数据已发生了如下的变化。

| 产　品 | 单位广告量带来的市场份额的提高 | | 需要增加的最少量 |
|---|---|---|---|
| | 电视 | 印刷媒体 | |
| 喷雾去污剂 | 0% | 1.50% | 3% |
| 液体洗涤剂 | 3% | 4% | 18% |
| 洗衣粉 | -1% | 2% | 4% |
| 单位成本 | 100 万美元 | 200 万美元 | |

E* a. 为这个问题在电子表格上建立一个线性规划模型并求解。

b. 用代数形式建立相同的模型。

c. 用图解法求解这个模型。

d. 当图 2.21 和图 2.23 给出的原问题最优解发生变化时，数据中哪些变化是关键的？

e. 根据上面的结论，向利博公司的管理层提交一份关于你的结论的陈述报告，包括从上面的表中进一步提炼关键数据的潜在影响。并且指出可能向管理层提供的关于降低每一种广告媒体单位成本的谈判策略。

2.43. 有如下代数形式的线性规划模型，$x_1$ 和 $x_2$ 是决策变量：

$$\text{最小化}\quad \text{成本} = 40x_1 + 50x_2$$

约束条件：

$$\text{约束 1：} 2x_1 + 3x_2 \geq 30$$
$$\text{约束 2：} x_1 + x_2 \geq 12$$
$$\text{约束 3：} 2x_1 + x_2 \geq 20$$

和

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0$$

a. 使用图解法求解这个模型。

b. 如果目标函数变为：成本 = $40x_1 + 70x_2$，最优解将怎么变化？

c. 如果第三个函数约束变为：$2x_1 + x_2 \geq 15$，最优解将怎么变化？

E* d. 将这个模型用电子表格表示，然后使用 Excel Solver 求解这个模型。

E* e. 使用 Excel Solver 完成问题 b 和问题 c。

2.44. 对于下列线性规划模型的代数形式，目标是在满足约束的前提下，选择两种活动（$x_1$ 和 $x_2$）的水平，使得总成本最小。

$$\text{最小化}\quad \text{成本} = 3x_1 + 2x_2$$

约束条件：

$$\text{约束 1：} x_1 + 2x_2 \geq 12$$
$$\text{约束 2：} 2x_1 + 3x_2 = 12$$
$$\text{约束 3：} 2x_1 + x_2 \geq 8$$

和

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0$$

a. 使用图解法求解这个模型。

E* b. 将这个模型用电子表格表示，然后使用 Excel Solver 求解这个模型。

2.45. 学习中心（Learning Center）为 6 ~ 10 岁的儿童提供一日夏令营服务。经理伊莉莎白·利德（Elizabeth Reed）一直试图降低中心的营运成本以避免提高教育收费。伊莉莎白最近正在计划如何向孩子们提供午餐。她希望将成本保持在最低水平，但是要保证营养需求。她已经决定提供花生黄油和果酱三明治，以及一些苹果、牛奶和/或酸果蔓果汁。每一种食品的营

养成分和成本如下表所示：

| 食　品 | 脂肪所含热量 | 总热量 | 维生素 C(毫克) | 纤维素(克) | 成本(美分) |
|---|---|---|---|---|---|
| 面包(1 片) | 15 | 80 | 0 | 4 | 6 |
| 花生黄油(1 汤匙) | 80 | 100 | 0 | 0 | 5 |
| 果酱(1 汤匙) | 0 | 70 | 4 | 3 | 8 |
| 苹果 | 0 | 90 | 6 | 10 | 35 |
| 牛奶(1 杯) | 60 | 120 | 2 | 0 | 20 |
| 酸果蔓果汁(1 杯) | 0 | 110 | 80 | 1 | 40 |

接下来是营养需求。每一个儿童的热量摄入量应当在 300 ~ 500 卡之间，但是从脂肪中摄入的热量不能超过 30%。每个儿童至少要摄入 600 毫克的维生素 C 以及 10 克的纤维素。

为了保证三明治可口，伊莉莎白希望每一个儿童至少吃掉 2 片面包、1 汤匙花生黄油、1 汤匙果酱，以及一杯饮品(牛奶和/或酸果蔓果汁)

伊莉莎白需要对食品进行选择，在满足这些需求的前提下使得成本最小。

E* a. 为这个问题在电子表格上建立一个线性规划模型并求解。

b. 用代数形式建立相同的模型。

# 案例 2.1　自动装配

Automobile Alliance 是一家大型的汽车制造公司。它将产品分为三类：家用卡车、家用小型轿车以及家用中型和豪华轿车。位于底特律和密执安交界处的一家工厂装配两种中型和豪华轿车。第一种车型，Family Thrillseeker，是一种四门轿车，装有乙烯树脂座椅、塑料内饰、标准配置，省油性能出色。购买这种车对于生活不是十分富裕的中产家庭来说是一个明智的选择。每一辆 Family Trillseeker 为公司带来中等水平的 3600 美元的利润。第二种车型，Classy Cruiser，是一种双门豪华车，配有真皮座椅、选装配置、木制内饰以及导航能力。它定位于较高层次的中产阶级，每一辆 Classy Cruiser 能够为公司带来 5400 美元的可观利润。

装配厂经理 Rachel Rosencrantz 目前正在为下一个月制定生产计划。具体地说就是她要决定 Family Thrillseeder 和 Classy Cruiser 各需要生产多少能够使得公司的利润最大。她知道工厂每个月有 48000 工时的生产能力，装配一辆 Family Thrillseeker 需要 6 个工时，一辆 Classy Cruiser 需要 10.5 工时。

由于工厂只是一个装配厂，装配这两种车所需的所有零件都不在厂里制造，而从密执安附近区域的其他工厂运来。例如轮胎、转向轮、车窗、座椅以及车门都来自于不同的供应厂。Rachel 知道下一个月她只能从车门供应厂得到 20000 扇车门。最近的一场罢工迫使这家供应厂停产了几天，下个月将无法完成生产计划。Family Trillseeker 和 Classy Cruiser 都使用相同的车门。

另外根据公司新近的对各种车型的月需求预测，Classy Cruiser 的产量限制在 3500 辆。在装配厂生产能力范围内，Family Thrillseeder 的生产没有限制。

a. 建立一个线性规划模型并求解，确定 Family Trillseeker 和 Classy Cruiser 各应当装配多少？

在最终决策之前，Rachel 计划独自解决下面的问题，除非问题自身表明需要合作解决。

b. 营销部得知他们可以花费 500000 美元进行一个广告活动，使得下个月对 Classy Cruiser 的需求增加 20%。这个活动是否应当进行？

c. Rachel 知道通过让工人加班，她可以增加下个月工厂的生产能力。它可以使工厂的工时能力增加 25%。在装配厂新的工时能力的情况下，Family Trillseeker 和 Classy Cruiser 各应当装配多少？

d. Rachel 知道没有额外的成本，加班劳动是不可能出现的。除了正常工作时间外，她愿意为加班工作支付的最大费用是多少？将你的回答进行汇总。

e. Rachel 考虑了同时使用广告活动和加班劳动。广告活动使得对 Classy Cruiser 的需求增加 20%，加班工作使得工厂工时能力增长 25%。如果 Classy Cruiser 的利润继续保持比 Family Thrillseeker 高 50% 以上的水平，在同时使用广告活动

和加班劳动的情况下，Family Trillseeker 和 Classy Cruiser 各应当装配多少？

f. 在知道了广告活动费用 500000 美元以及最大限度地使用加班工作的成本 1600000 美元的情况下，e 的决策是否仍然优于 a？

g. Automobile Alliance 发现实际上分销商正在大幅度降低 Family Trillseeker 的售价，以削减库存。由于公司与分销商签订的利润分配协议，每一辆 Family Thrillseeker 的利润将不再是 3600 美元，而是 2800 美元。在这种利润下降的情况下，确定 Family Trillseeker 和 Classy Cruiser 各应当装配多少？

h. 通过在装配线末端对 Family Thrillseeker 的随机测试，公司发现了质量问题。检查人员发现在超过 60% 的情况中，Thrillseeker 四扇车门中的两扇不能完全密封。由于通过随机测试得到的缺陷率如此之高，领班决定在装配线的末端对每一辆 Thrillseeker 进行测试。由于增加了测试，装配一辆 Family Thrillseeker 的时间从 6 小时上升到了 7.5 小时。在 Family Thrillseeker 新的装配时间下，确定 Family Trillseeker 和 Classy Cruiser 各应当装配多少？

i. Automobile Alliance 的董事会希望占据更大份额的豪华轿车市场，因此要求工厂满足所有对 Classy Cruiser 的需求。他们要 Rachel 确定与 a 相比装配厂的利润将下降多少。然后他们要求在利润降低不超过 2000000 美元的情况下满足全部对 Classy Cruiser 的需求。

j. Rachel 现在通过综合考虑 f、g、h 提出的新情况作出最终决策。对于是否进行广告活动、是否使用加班工作、Family Thrillseeker 的生产数量、Classy Cruiser 的生产数量的决策是什么？

## 案例 2.2　降低咖啡屋的成本

All-State 大学的咖啡屋每个星期四的中午准时提供一道特殊的菜。这种想来十分美味的菜是一种炖菜，包含有炒过的洋葱、煮熟的土豆片、绿豆和蘑菇汤。不幸的是学生们没有能够看到这道菜的特殊质量。他们为这道菜起了一个令人讨厌的名字——杀手炖菜。学生们很不情愿吃这道菜，但是咖啡屋对星期四的午餐只提供了有限的选择（也就是炖菜）。

咖啡屋的经理 Maria Gonzalez 希望明年可以降低成本。她相信降低成本的一种当然的方法是购买较为便宜而质量可能比较低的配料。由于这种炖菜是每星期咖啡屋菜单中的重要组成部分，因此她认为如果她能够降低为制作这种炖菜所购买的配料的成本，整个咖啡屋的营运成本将大大降低。因此她决定花一些时间看看在保持营养和口味要求的情况下如何将成本降到最低。

Maria 集中研究降低这种炖菜的两种主要配料——土豆和绿豆的成本。这两种配料占据了大多数的成本和营养成分，是影响口味的主要因素。

Maria 每星期从一个批发商那里购买土豆和绿豆。土豆的成本是每磅 0.4 美元，绿豆的成本是每磅 1 美元。

All-State 大学规定了每一个咖啡屋的主菜都必须达到的营养要求。这道菜必须包含 180 克的蛋白质、80 毫克的铁、1050 毫克的维生素 C（1 磅相当于 454 克，1 克等于 1000 毫克）。为了简化计划，Maria 假设这道炖菜中只有土豆和绿豆提供了营养。

因为 Maria 在一个开放式的技术大学中工作，因此它可以从网络中获得大量的资源。她决定在网络上搜索土豆和绿豆营养成分的信息。通过搜索她得到了以下关于两种配料营养成分的信息：

| | 土　豆 | 绿　豆 |
|---|---|---|
| 蛋白质 | 1.5 克/100 克 | 5.67 克/10 盎司 |
| 铁 | 0.3 毫克/100 克 | 3.402 毫克/10 盎司 |
| 维生素 C | 12 毫克/100 克 | 28.35 毫克/10 盎司 |

（1 盎司相当于 28.35 克）

Edson Branner 是咖啡屋的厨师，非常注重于口味。她告诉 Maria 为了使得炖菜可口，土豆和绿豆的总量比至少应当是6∶5。

在得到了在咖啡屋就餐的学生数之后，Maria 得知她必须购买足够数量的土豆和绿豆，为每星期至少 10 公斤的炖菜做好准备（1 公斤等于 1000 克）。为了简化计划，她假设只有土豆和绿豆决定了能够准备的炖菜的数量。Maria 没有为需要准备的炖菜设置上限，因为所有剩下的菜可以供应好几天，或者创造性地作为其他主菜的原料。

a. 在满足营养、口味和需求量要求的前提下，确定为

了准备炖菜 Maria 所需要准备的土豆和绿豆的数量，使得配料的成本最小。

在进行最后决策之前，Maria 计划独自解决下面的问题，除非问题自身表明需要合作解决。

b. Maria 没有太多地考虑炖菜的口味。她只考虑了满足营养需求和削减成本。因此她要求 Edson 改变配方，使得土豆和绿豆最低重量比可以为1:2。在这种新的配方下，确定 Maria 每个星期需要购买的土豆和绿豆的数量。

c. 由于 Maria 认为其他配料，如洋葱和蘑菇汤，也含有铁，因此她决定将铁含量的要求降低到 65 毫克。在这种新的铁含量的要求下，确定 Maria 每个星期需要购买的土豆和绿豆的数量。

d. Maria 得知批发商有多余的绿豆，因此绿豆的价格降低到 0.5 美元每磅。使用 c 中对铁含量的要求和新的绿豆价格，确定 Maria 每个星期需要购买的土豆和绿豆的数量。

e. 由于利马豆比绿豆便宜而且含有更多的蛋白质和铁，因此 Maria 决定用利马豆代替绿豆。她使用独有的权力要求 Edson 改变配方，用利马豆取代绿豆。Maria 可以从批发商那里以每磅 0.6 美元的价格买到利马豆。每 10 盎司利马豆含有 22.68 克蛋白质和 6.804 毫克铁，但是不含有维生素 C。使用利马豆的成本和营养成分，在满足营养、口味和需求量要求的前提下确定 Maria 每个星期需要购买的土豆和利马豆的数量。营养要求包括 c 中对铁含量降低了的要求。

f. Edson 是否会对 e 的解决方案感到满意？为什么？

g. 一个 All-State 大学学生工作组在 All-State 大学"重视健康周"期间召开会议。他们认为学校对于铁含量的要求太低而对维生素 C 含量的要求有些浪费。工作组说服学校改变政策，要求每一种主菜铁的含量至少是 120 毫克，维生素 C 的含量至少是 500 毫克。使用土豆和利马豆作为配料，在新的营养要求下确定 Maria 每个星期需要购买的土豆和绿豆的数量。

## 案例2.3 为呼叫中心配备工作人员

加利福尼亚儿童医院由于混乱、分散的预约和挂号程序而收到了大量的客户投诉。当客户要预约或为一个儿童病人挂号时，他们必须与要去的门诊部或部门联系。目前的这个政策产生了一些问题。父母亲们通常不知道去哪一个门诊部或部门说明孩子的病情最合适。因此他们将大量的时间花费在给一个又一个门诊部打电话上，直到找到他们所需要的最合适的门诊部为止。医院也没有提供所有的门诊部和部门的电话，父母亲们必须花大量的时间找到正确的电话号码。最后，各个门诊部和部门互不交流。例如，当一个医生计划推荐另一个门诊部或部门的同事的时候，那个门诊部或部门得不到任何推荐信息。父母必须联系到正确的门诊部或部门才能获得所需的推荐信息。

为了进行重组以及改进预约和挂号程序，儿童医院决定通过建立一个呼叫中心专门用于处理预约和挂号，使得这些过程集中化。医院现在正处于计划建立呼叫中心的阶段。Lenny Davis，医院经理，计划呼叫中心在每个工作日的7:00 AM 到9:00 PM 开放。

几个月前，医院雇用了一个十分有雄心的管理咨询公司，Creative Chaos 咨询公司，对一天中每个小时呼叫中心接收到的电话量进行预测。由于所有于预约和挂号有关的电话都由呼叫中心接听，这个咨询公司认为他们可以将所有门诊部和部门接到的与预约和挂号有关的电话量加总来预测呼叫中心的电话量。工作组拜访了所有的门诊部和部门，记录下了所有与预约和挂号有关的电话。然后他们将电话量加总，并将这个总和根据数据搜集期间未接入的电话量进行修正，同时对一个病人由于分散处理带来的混乱而反复给医院打电话的情况进行修正。Creative Chaos 咨询公司确定了工作日中每一个小时呼叫中心将接收到的平均电话量。下面的表格提供了这个预测。

| 工作换班时间 | 平均电话量 |
|---|---|
| 7AM 到 9AM | 每小时 40 个电话 |
| 9AM 到 11AM | 每小时 85 个电话 |
| 11AM 到 1PM | 每小时 70 个电话 |
| 1PM 到 3PM | 每小时 95 个电话 |
| 3PM 到 5PM | 每小时 80 个电话 |
| 5PM 到 7PM | 每小时 35 个电话 |
| 7PM 到 9PM | 每小时 10 个电话 |

在咨询公司总结了这些预测之后，Lenny 开始对

接到说西班牙语的电话数量产生兴趣,因为医院为许多说西班牙语的病人提供服务。Lenny 知道他必须雇用一些讲西班牙语的操作员处理这些电话。咨询公司进行了进一步的数据搜集,并确定平均 20% 的电话来自于说西班牙语的人。

有了这些电话量的预测,Lenny 现在必须决策工作日的每一个换班时间呼叫中心需要多少工作人员。在预测项目期间,Creative Chaos 咨询公司仔细观察了在单独的门诊部或部门工作的操作人员的工作情况,并确定出了操作人员每小时可以处理的电话量。咨询公司告诉 Lenny 一个操作人员平均每小时可以处理 6 个电话。Lenny 还知道他有全职和兼职的员工可以配备给呼叫中心。一个全职员工每天可以工作 8 小时,但是由于要完成一些文书工作,这些员工每天只有 4 个小时可以接听电话。为了平衡计划,员工进行两小时轮换,分别接听电话和完成文书工作。全职员工每天的工作可以从接听电话开始,也可以从完成文书工作开始。全职的员工讲西班牙语或英语,但是他们中没有一个是能够进行双语工作的。在 5PM 前每一个说西班牙语和说英语的员工每小时的工资都是 10 美元,5PM 以后是 12 美元。全职员工可以在 7AM 到 9AM 时间段、9AM 到 11AM 时间段、11AM 到 1PM 时间段、1PM 到 3PM 时间段工作。兼职员工工作 4 小时,只接听电话,只说英语。他们可以在 3PM 到 5PM 时间段、5PM 到 7PM 时间段工作。与全职员工一样,他们在 5PM 前每小时工资是 10 美元,5PM 后是 12 美元。

对于下面的分析,只考虑员工花费在接听电话上的劳动成本。文书工作的成本由其他成本中心处理。

a. 为了接听所有的电话,呼叫中心工作日每两个小时工作轮换期间讲西班牙语的操作人员和讲英语的工作人员各需要多少?由于半个人是没有意义的,所以请提供一个整数。
b. Lenny 需要确定每一个工作轮换的开始需要有多少个讲西班牙语的全职操作人员、讲英语的全职工作人员和兼职人员。Creative Chaos 咨询公司建议他使用线性规划,以在接听所有电话的前提下运作成本最小的方式处理这个问题。
c. 用 b 建立的线性规划模型得到的最优解指导 Lenny 的决策。
d. 由于许多全职的操作人员不想工作到太晚,因此 Lenny 只能找到一个合格的说英语的操作人员愿意从 1PM 开始工作。根据这个新的约束,每一个工作轮换需要多少个讲西班牙语的全职操作人员、讲英语的全职工作人员和兼职人员?
e. Lenny 现在决定考虑雇用双语操作人员代替单语操作人员的选择。如果所有的操作人员都能说双语,每一个工作轮换需要多少个操作人员?与 a 一样,给出一个整数解。
f. 如果所有的操作人员都能说双语,每一个工作轮换需要多少个讲西班牙语的全职操作人员、讲英语的全职工作人员和兼职人员?与 b 一样,建立线性规划模型指导 Lenny 决策。
g. 在不增加总运作成本的前提下,Lenny 能够支付给双语操作人员的小时工资最多可以超过单语工作人员的百分比是多少?
h. 为了改进服务或使得运作成本最低,Lenny 还应当考虑呼叫中心的其他什么特征?

CHAPTER

# 3 电子表格建模的艺术

## 学习目标

完成本章学习后,你应该掌握:

1. 描述电子表格建模的一般过程。
2. 描述建立好的电子表格模型的一些指导方针。
3. 应用本章电子表格建模的一般过程和指导方针,根据描述的问题建立自己的电子表格模型。
4. 从一张粗糙的电子表格模型中找出不足。
5. 利用各种方法来调试电子表格模型。

现在几乎所有的经理都在大量使用电子表格来分析商业问题。他们正在做的就是用电子表格建模。

电子表格建模是本书的一个主要重点。第1章中的1.2节介绍了实施盈亏平衡分析的电子表格模型。第2章中的2.3节描述了如何利用电子表格来建立线性规划模型。接下来的几章中讨论了许多种电子表格模型。那些介绍主要集中于适合相应章节所涉及的管理科学技术(如线性规划)的电子表格模型的特征,而本章将专门介绍建立电子表格模型的通用艺术以适合任何应用。

电子表格建模是一门科学,更是一门艺术。不存在系统化的程序能够一贯产生惟一正确的电子表格模型。例如,两位经理被给予了完全相同的商业问题,用电子表格来分析,但他们的电子表格模型有可能很不相同。没有一种正确的方法来对任何问题建模。然而,有一些模型相对较好。

虽然没有完全系统化的程序可以适用于电子表格建模,但也存在一个可以遵从的普遍程序。这个程序有四个主要步骤:(1)计划电子表格模型;(2)建立模型;(3)测试模型;(4)分析模型和其结果。在3.1节中将引入一个案例研究。之后的3.2节中将详细地描述这个计划—建立—测试—分析的程序,并结合案例阐明这个程序。同时,在3.2节中也将对建模过程中碰到的常见问题的一些解决方法进行探讨。

然而,尽管计划—建立—测试—分析程序符合逻辑,但这并不能保证该程序就一定能产生一个"好"的电子表格模型。3.3 节中介绍了建立电子表格模型的一些指导方针,并利用 3.1 节中的案例研究来阐明合理的模型描述和不合理模型描述之间的区别。

即使是在合理的模型描述中,大型的电子表格模型的最初版本中常常会存在一些烦人的小错误,例如单元格地址的不精确引用或者是在将等式输入单元时出现的误排。这些错误往往很难发现。3.4 节将介绍一些调试电子表格模型和发现错误的有用方法。

本章最主要的目标是为成为一个成功的电子表格建模者提供一个扎实的基础。然而,仅仅靠本章并不能使你成为一个熟练的建模者。如果你想成为一个熟练的建模者,你需要学习在不同的管理科学领域中的各种优秀电子表格模型的例子,并不断自己练习建立模型。这个过程将在本书的其余部分延续下去。

## 3.1　案例研究:大沼泽地金色年代公司的现金流问题

大沼泽地(The Everglade)金色年代公司在美国佛罗里达州南部的一些地区经营高消费层次的退休社团。公司由阿尔弗雷德·李于 1946 年成立,拥有天时地利人和,佛罗里达的经济处于兴盛时期,许多富有的退休人员涌入佛罗里达,阿尔弗雷德·李在这段时期一直非常成功。

过去的几年是大沼泽地的困难时期。对退休社团的住房需求很小,大沼泽地公司没有能力去维持其所有的住宅。然而,这个市场最近又恢复了生机,前景非常看好。大沼泽地公司最近破土动工了一个新的退休社团的建设工程,并且在未来十年里计划有更多新工程。

朱莉·李是大沼泽地公司的财务总监(CFO)。过去的一周中她坐在电脑旁,试图解决公司即将出现的现金流问题。朱莉已经预测了大沼泽地公司未来十年的净现金流,如表 3.1 所示。由于近期收入小于维持其所有资产和建设新退休社团的成本这两方面的支出,大沼泽地公司的现金流在未来几年将是负的。目前仅有 100 万美元的现金余额,大沼泽地公司看来需要获得一些贷款来满足其财务负担。而且,为了预防一些不确定因素,公司政策规定现金储备在任何时候必须保持最少 50 万美元的余额。

**表 3.1　大沼泽地金色年代公司未来十年的净现金流预测**

| 年　份 | 计划的净现金流(百万美元) |
|---|---|
| 2003 | -8 |
| 2004 | -2 |
| 2005 | -4 |
| 2006 | 3 |
| 2007 | 6 |
| 2008 | 3 |
| 2009 | -4 |
| 2010 | 7 |
| 2011 | -2 |
| 2012 | 10 |

公司的银行提供了两种不同的贷款给大沼泽地公司。第一种是十年期的贷款,每年支付利息,全部的本金在十年后一次性付清。这个长期贷款的利率是优惠的每年 7%。另一种选择是一系列的一年期贷款。这些贷款可以在每年有需要时获得,但必须在下一年将本

利付清。如果有必要的话,新的贷款可以用于帮助偿还前一年的贷款。这些短期贷款的利率目前是每年 10%。

朱莉带着她的现金流预测和银行的贷款选择,安排了与首席执行官谢尔登·李的会谈。她们的讨论如下:

**朱莉:** 我们看来真的处境困难。如果不向银行贷款,将没有办法解决我们的现金流问题。

**谢尔登:** 恐怕是的。我们有什么选择吗?

**朱莉:** 我已经和银行谈过了,我们可以获得年利率为 7% 的十年期贷款,或者是一系列预计利率为 10% 的一年期贷款。

**谢尔登:** 7% 的年利率听起来不错。十年期的贷款是否能满足我们的需要?

**朱莉:** 这也是我最初的反应。不过,看了现金流预测之后,恐怕答案是不确定的。虽然我们在未来几年的现金流是负的,但是之后几年的情况会越来越好。如果选择十年期的贷款,我们必须支付十年的利息。而一年期的贷款显得更灵活。我们可以在需要的时候才借入。这样的话,我们就能省下以后的利息支出。

**谢尔登:** 好的。我意识到了一年期贷款的灵活性可以帮助我们省下一些资金。而且,如果以后几年利率下降的话,这些贷款会更加有利。

**朱莉:** 但是利率也有可能上升。没有什么方法可以预测未来的利率情况,所以我们最好还是以当前 10% 的年利率为基础来做计划。

**谢尔登:** 是的,你是对的。那么,对于选择十年期的贷款还是一系列一年期的贷款,你有什么建议吗?

**朱莉:** 其实还有另外一种选择。我们可以考虑一下结合使用两种贷款方式。我们可以借一部分长期贷款,以获得较低的利率,同时借一些短期贷款保持灵活性。

> 目标是建立一个财务计划,该计划可以保持公司的偿还能力,并使 2013 年的现金余额在支付完贷款之后最大化。

**谢尔登:** 这听起来有点复杂。我们所需要的是一个计划,这个计划能帮助我们在十年内保持偿还能力,并在十年之后支付完所有贷款后还留有尽量多的现金余额。你可否用一个电子表格来找出最好的计划?

**朱莉:** 我试试看,之后向你汇报。

**谢尔登:** 太好了。那么,下星期你准备好报告之后我们再碰头一次。

你将会在下面两节中看到朱莉是如何仔细地为这个现金流问题建立电子表格模型的。

### 问题回顾

1. 对大沼泽地公司来说,长期贷款的好处是什么?
2. 对大沼泽地公司来说,一系列短期贷款的好处是什么?
3. 需要建立的财务计划的目标是什么?

## 3.2 电子表格建模程序的概述

当与大沼泽地公司的现金流问题类似的情况出现时,人们往往会立即投入其中,打开

Excel，开始建立模型。不要如此着急。没有很好的计划就开始建立电子表格模型，这样的模型往往组织的比较差，还存在许多难以阅读的代码(spaghetti code)。

计划和建立电子表格模型的一个挑战是没有标准的程序可以参照。这是一门科学，更是一门艺术。然而，对于初学者来说，为了提供给你们一些结构，我们建议你可以参照图 3.1 给出的建模过程。

如图所示，电子表格建模过程的四个主要步骤为：(1)计划电子表格模型；(2)建立电子表格模型；(3)测试电子表格模型；(4)分析电子表格模型。建模过程主要是按照这个顺序进行。然而，在"建立"和"测试"之间的双向箭头指出了这是一个回归过程，如果在"测试"过程中发现了一些问题需要进行修正，则要重新回到"建立"这一步骤。"建立"和"测试"步骤之间的来回有可能要出现好几次，直到建模者对模型满意为止。在这种来回的同时，建模者有可能在进一步建立模型。一种策略就是从模型的小版本开始做起，建立它的基本逻辑关系，然后在检验证实其精确性后，扩展到完整的模型。即使完成了模型测试和模型分析过程，如果分析步骤显示模型存在不合理性，则这个建模的流程可能还要回到"建立"的步骤，甚至是"计划"步骤。

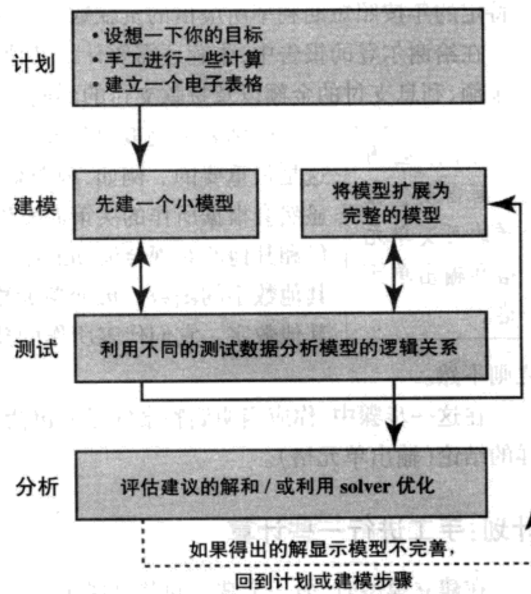


图 3.1　电子表格建模的计划—建立—测试—分析流程图。

这四个主要的步骤中有可能还包含着一些更细致的步骤。如图 3.1 所示，在"计划"步骤中还存在三个更小的步骤。最开始时，当面临一个相当复杂的问题时，花点时间一步步地手工完成这些小步骤是非常有帮助的。但当你对电子表格建模很有经验时，你会发现自己能合并处理这些小步骤，并迅速地心算完成。一个有经验的建模者通常可以心算完成一些步骤，无需在纸上进行设计。如果你发现自己被困住了，则很有可能是因为在此前的小步骤中你漏掉了一个关键条件。此时你应当回到前一步或前两步来确保你已经彻底完成了前述步骤。

我们现在将结合大沼泽地公司的现金流问题来阐述建模过程的不同组成部分。同时，我们也将指出一些在建立电子表格模型过程中经常会遇到的常见问题，以及如何解决这些问题。

## 计划：设想一下你的目标

建模过程中的一个常见问题出现在最开始的时候。假设有一个与朱莉在大沼泽地公司面临的问题一样复杂的情况，那么如何开始也将是一件非常困难的事。此时，考虑一下你所要实现的目标是非常有帮助的。例如，朱莉在报告中应提供给谢尔登以什么信息？当介绍

建议的解决方法时,答案应当是什么样的?建议中应包含哪些数字?这些问题的答案将迅速引导你进入问题的核心,帮助你开始建模的过程。

朱莉提出的问题是应当使用哪一种贷款,或者两者结合使用,而且贷款的金额是多少。长期贷款是一次性的,因此,答案应当包括一个惟一的数字,表示在长期贷款利率下现在应借多少贷款。短期贷款可以在十年的某些年或每年获得,因此答案应当包含十个数字,代表在特定的年按照短期利率所应借的贷款数额。这些是电子表格模型中的可变单元格。

在给谢尔登的报告中,朱莉还需要什么其他数字吗?关键数字主要是预测的每年的现金余额、利息支付的金额以及贷款支付的到期日。这些是电子表格模型的输出单元格。

> 此时,你应当了解需要什么样的可变单元格和输出单元格。

区别表示决策(可变单元格)和表示结果(输出单元格)的不同数字,这是很重要的。例如,现金余额很容易被作为可变单元格。这些单元格显然会根据所作的决策而发生变化。然而,现金余额是资金借入、资金支付和其他所有现金流动的结果。它不能被单独地确定,而是电子表格中其他数字的函数。可变单元格(贷款金额)的区别特征是它们不依赖于其他数字。它们代表所作的独立决定。它们会对其他数字产生影响,反之则不然。

在这一步骤中,你应当明确答案的形式包括了需要哪些和多少可变单元格、应当获得怎样的结论(输出单元格)。

## 计划:手工进行一些计算

在建立模型时,另一个常见问题出现在为一个输出单元格输入公式时。例如,朱莉如何确定大沼泽地公司现金流问题中的现金余额?应当输入什么公式?这个计算中包含了很多的因素,因此很容易不知所措。

如果此时你被困扰了,那么进行一些手工计算是非常有用的工作。为可变单元格选出一些数字,用计算器、笔和纸计算出结果。例如,为大沼泽地公司定出一些贷款金额,然后计算一下公司在前几年年末的现金余额。假设大沼泽地公司借入了600万美元的长期贷款,并于2003年借入了200万美元的短期贷款,2004年借入了500万的短期贷款。那么,在2003年和2004年年底分别应留下多少现金?

这两个数字可以按照如下方法计算。在2003年,大沼泽地公司拥有原来在银行的存款(100万美元)、业务经营的负现金流(-800万美元)、长期贷款和短期贷款的现金流入(分别是600万美元和200万美元)。因此,2003年年末的现金余额为:

| | | |
|---|---|---|
| 期末余额(2003)= | 期初余额 | 100 万美元 |
| | +现金流(2003) | -800 万美元 |
| | +长期贷款(2003) | +600 万美元 |
| | +短期贷款(2003) | +200 万美元 |
| | | 100 万美元 |

2004年现金余额的计算有点复杂。除了从2003年结转的年初余额(100万美元),2004年业务经营的负现金流(-200万美元),2004年新的短期贷款(500万美元),公司还需要支付2003年的贷款利息以及归还2003年短期贷款的本金。2004年年末现金余额为:

| | | |
|---|---|---|
| 期末余额(2004) = | 期初余额(2003 年结转) | 100 万美元 |
| | + 现金流(2004) | -200 万美元 |
| | + 短期贷款(2004) | +500 万美元 |
| | - 长期贷款利息支出 | -(7%)(600 万美元) |
| | - 短期贷款利息支出 | -(10%)(200 万美元) |
| | - 短期贷款偿还(2003) | -200 万美元 |
| | | 138 万美元 |

手工进行计算有很多好处。首先,它能帮助理清输出单元格公式的形式。例如,从以上所做的手工计算中,我们可以发现特定年的期末余额公式应当是:

期末余额 = 期初余额 + 现金流 + 贷款 - 利息支出 - 贷款偿还

此时就很容易给电子表格模型的期末余额公式输入合适的单元格参数。其次,手工计算还可以帮助检验电子表格模型。将 600 万美元的长期贷款、2003 年 200 万美元的短期贷款和 2004 年的 500 万美元输入完整的电子表格,则期末余额的数值应当与以上人工计算的结果一致。如果不一致,则说明电子报告模型存在错误(假设手工计算是正确的)。

## 计划:草拟电子表格

任何模型一般都有大量不同的要素需要包含在电子表格中。像大沼泽地公司的问题,包括了一些数据单元格(利率、年初余额、最小余额和现金流)、一些可变单元格(贷款金额),以及一些输出单元格(利息支出、贷款偿还和期末余额)。因此,一个可能的问题就会出现在试图组织和设计电子表格模型的时候。如何将所有部分放在电子表格的合适位置?你如何开始将电子表格整合在一起?

> 通过在纸上画出有关表格编排想法的草图,规划数据单元格、可变单元格和输出单元格在电子表格上的位置。

与其匆忙地打开 Excel 表格,盲目地输入各种不同的要素,不如先草拟一个电子表格,这是很有帮助的。是否存在一个合理的方法来安排这些要素呢?在这个阶段进行一些计划对建立一个安排合理的电子表格有很大帮助。此时不要被数字所困扰。只要在一张纸上画出代表各种数据单元格、可变单元格和输出单元格的方块,并将每个方块做好标签。将重点集中在位置的布置上。特定的数字方块应当是排在一行还是一列,又或者是两维的表格?是否有相同的行标或列标对应了不同的单元格方块?如果是,则将这些方块始终排在同一行或列,以便它们能使用惟一的标题。试着将电子表格安排成顶部是数据,然而合乎逻辑地向底部的目标单元格运行。这样比较容易理解。如果数据单元格、可变单元格、输出单元格和目标单元格散乱地分布在电子表格中,则不容易让人看明白。

图 3.2 显示了大沼泽地公司问题电子表格编排的草图。电子表格的顶部是利率、期初余额和最小现金余额的数据单元格。而电子表格的所有其他要素都遵从相同的结构。每一行代表不同的年份(从 2003 年到 2013 年)。每一列显示的是所有不同的现金流入和流出,从预测的业务经营现金流(包括十年中每一年的数据)开始,紧接着是贷款的现金流入、利息支出、贷款偿还,最后是期末余额(每年进行计算)。长期贷款是一次性贷款(在 2003 年发生),因此它被设计为单个的单元格。短期贷款可能在十年中的任一年发生(从 2003 年到 2012 年),因此它包含一组单元格。利息支出从贷款的下一年开始。长期贷款十年之后偿还(2013 年)。

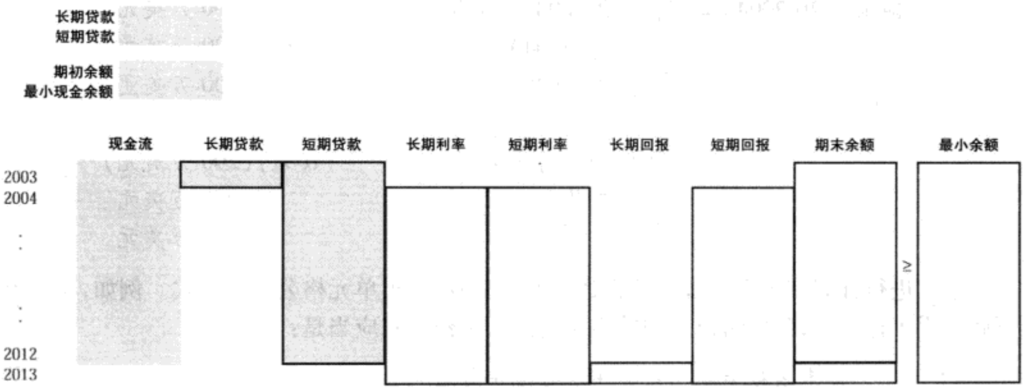



**图 3.2** 大沼泽地公司现金流问题的电子表格草图。

以一个一贯的结构来安排各要素，就如同图 3.2 所示，不仅可以避免为每个要素重新输入年份的标签，而且这使得模型更清晰明了。发生在特定一年的每一件事情安排在了同一行中。

从数据开始进行安排通常是最简单的。模型其余部分的结构应当按照数据单元格的结构。例如，一旦预测的现金流数据是竖排的（每一年的数据在每一行），那么其他现金流也应当以同样的结构编排。

> 图 3.2 的电子表格有一个逻辑进程，从左上角的数据开始，通过计算到达右下角的目标单元格。

电子表格也存在一个逻辑进程。某问题的数据位于电子表格的左上角。所有期末余额计算的组成部分，包括现金流、贷款金额、利息支出和贷款偿还，都位于期末余额的左侧。由于谢尔登已经指出目标是将 2013 年的现金期末余额最大化，因此 2013 年的期末余额单元格是目标单元格。

每一年现金余额应当大于所要求的最低现金余额（50 万美元）。这是模型的一个约束条件，因此应设计将期末余额和最低余额的方块在电子表格中相邻。你可以在草图上标记出的符号，以提醒你这是一个约束条件。

## 建立：从小规模的电子表格开始

> 在扩展到整个模型之前，获得小规模电子表格模型的逻辑推理方式。

一旦你已经考虑好电子表格的合理编排，就是时候打开一个新的 Excel 工作表，开始建立模型。如果模型比较复杂，你可以先从建立一个较小的易于管理的模型开始。这是为了保证在完成整个模型之前，你从小规模的模型中获得了模型的逻辑推理方式。

例如，在大沼泽地公司的问题中，我们首先从建立前两年（2003 年和 2004 年）的模型开始，如图 3.3 所示的电子表格。

这张电子表格是按照图 3.2 的草图所设计的编排建立的。贷款金额位于 D 列和 E 列。由于利息支出要到下一年才到期，因此 F 列和 G 列的公式与前一年的贷款有关（D11 的长期贷款和 E11 的短期贷款）。贷款的偿还在 H 列和 I 列显示。H 列是空白的，因为长期贷款要到 2013 年偿还。短期贷款需要一年之后偿还，因此单元格 I12 的公式与前一年的短期贷款（单元格 E11）有关。2003 年的期末余额是期初余额加上所有 2003 年发生的各种现金流的总和（单元格 C11:I11）。2004 年的期末余额是 2003 年的期末余额（单元格 J11）加上

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Everglade Cash Flow Management Problem (Years 2003 and 2004) | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | LT Rate | 7% | | | | | | | | | |
| 4 | | ST Rate | 10% | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | (all cash figures in millions of dollars) | | | | | | | |
| 6 | | Start Balance | 1 | | | | | | | | | |
| 7 | | Minimum Cash | 0.5 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | Cash | LT | ST | LT | ST | LT | ST | Ending | | Minimum |
| 10 | | Year | Flow | Loan | Loan | Interest | Interest | Payback | Payback | Balance | | Balance |
| 11 | | 2003 | −8 | 6 | 2 | | | | | 1.00 | ≥ | 0.50 |
| 12 | | 2004 | −2 | | 5 | −0.42 | −0.20 | | −2.00 | 1.38 | ≥ | 0.50 |

| | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | LT | ST | LT | ST | Ending | | Minimum |
| 10 | Interest | Interest | Payback | Payback | Balance | | Balance |
| 11 | | | | | =StartBalance+SUM(C11:I11) | ≥ | =MinimumCash |
| 12 | = −LTRate*LTLoan | = −STRate*E11 | | = −E11 | =J11+SUM(C12:I12) | ≥ | =MinimumCash |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| LTLoan | D11 |
| LTRate | C3 |
| MinimumCash | C7 |
| StartBalance | C6 |
| STRate | C4 |

**图 3.3　大沼泽地公司现金流管理问题的小规模电子表格(仅包含了 2003 年和 2004 年)。**

2004 年发生的各种现金流的总和(单元格 C12:I12)。所有这些公式都总结在了图 3.3 电子表格下面。

建立一个小规模的电子表格对于有时间维数的电子表格来说是很有效的。例如,对一个十年计划的问题,我们可以先从前几年的简单问题开始,而不是马上进行十年的计划问题。一旦小规模的模型运行正确,你就可以将模型扩展到十年的完整模型。

即使电子表格模型没有时间维数,从小规模模型开始的方法也可以应用。例如,如果某些约束条件使问题变得相当复杂,那么可以先从不包括这些复杂约束条件的简单问题开始。简单模型运行正确之后,再开始解决复杂的约束条件。如果一个模型有很多组输出单元格,你可以一次为一组输出单元格建立一个模型,并且要确保在开始为新的输出单元格建立模型之前,前面的输出单元格都是正确的。

## 测试:测试小规模的模型

如果你从建立一个小规模的模型开始,那么一定要先充分测试这个模型来确定所有的逻辑推理是正确的。与其当错误扩展到一个大规模的完整电子表格中才发现,还不如在电子表格还是易管理的小模型时就尽早修正存在的问题。

> 试着在可变单元格中输入一些你知道输出单元格结果的数值。

测试电子表格时,在可变单元格中输入一些数值,然后看电子表格给出的结果是否与你所知道的输出单元格的数值相一致。例如,在图 3.3 中,如果贷款金额设为 0,那么利息支出和贷款偿还的数值都应当为 0。如果长期贷款和短期贷款都是 100 万美元,

那么下一年的利息支出分别是 7 万美元和 10 万美元(长期贷款利率是 7%,短期贷款利率是 10%)。如果大沼泽地公司 2003 年借入长期贷款 600 万美元、短期贷款 200 万美元,2004 年借入短期贷款 500 万美元,那么 2003 年的期末余额应当是 100 万美元、2004 年的期末余额应当是 138 万美元(根据之前所做的手工计算)。对图 3.3 的电子表格进行这些数值的测试,结果都是正确的,因此我们可以非常肯定电子表格是正确无误的。

如果输出单元格给出的结果与你预期的不一致,你就需要仔细检查公式,看是否能发现和修正存在的问题。3.4 节会进一步对电子表格模型的调试给出一些指导方法。

## 建立:将模型扩展完整

一旦小规模的电子表格测试表明所有的公式都是正确的且运行正常,那么就可以将模型扩展完整。Excel 的填充命令经常可以用来迅速将公式复制到模型的其余部分。对图 3.3 来说,列 F、G、I、J、L 的公式可以通过编辑菜单中的"向下填充"(Fill Down)的命令进行复制,以获得图 3.4 所示的所有公式。例如,选中单元格 G12:G21,然后选择"向下填充"(Fill Down),则单元格 G12 中的公式(公式中列 E 的单元格地址被调整后)将被复制到单元格 G13 到 G21。

当你使用填充命令时,区分相对坐标和绝对坐标的差异是非常重要的。考虑单元格 G12 的公式(= -STRate × E11)。公式中单元格或范围的坐标(如 E11)通常是基于它们相对于含有公式的单元格的位置。因此,E11 位于 G12 左边两个单元格和向上一个单元格。这就是所谓的相对坐标。如果这个公式被复制到新的单元格,这个坐标会自动相对于新的单元格进行调整,也就是相同的相对位置(向左两格、向上一格)。例如,复制到 G13 的公式对应单元格 E12,G14 的公式对应单元格 E13,以此类推。这正是我们所需要的,因为利息支出是根据前一年借入的短期贷款计算的(也就是位于向左两格、向上一格的位置)。

相反,单元格 G12 公式中的 STRate(C4)的坐标是绝对坐标。当被填入其他单元格时,这些坐标不会改变。就是说,无论公式被复制到哪里,公式始终对应于单元格 STRate(C4)。

获得一个相对坐标,只需输入单元格地址(如 E11)。而获得一个绝对坐标,可以使用单元格的区域名称(range name)(如 STRate),或者在单元格坐标的字母和数字之前加上符号 $(如 $E$11)。同样,你也可以使列变成绝对的而行是相对的(反之亦然),只要你在单元格坐标字母(或数字)前加符号 $。例如,如果公式中 $E11 的坐标被复制到新的位置,那么 $E 保持不变,但行的数字将会变化。在图 3.4 中单元格 G12 的公式中,$E11 可以作为单元格的坐标,因为列 E 是不变的,但在沿着列 G 复制的时候,符号 $ 并不是必须的(因此并没有被使用),理由是列 E 的相对位置一直保持一致(在列 G 的左边两列)。

当利用向下填充命令复制列 F、G、I、J 和 L 的公式,并将长期贷款偿还输入单元格 H21 后,完整的模型如图 3.4 所示。

## 测试:测试完整的模型

就如同测试小规模模型非常重要一样,当模型被扩展完整之后也需要被再次测试。测试的过程与测试小规模模型的过程一致,包括了 3.4 节中有关调试电子表格模型的方法。

## 分析:分析模型

在利用 Solver 对话框准备应用 Solver 之前,图 3.4 中的电子表格仅仅是大沼泽地公司

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Everglade Cash Flow Management Problem | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | LT Rate | 7% | | | | | | | | | |
| 4 | | ST Rate | 10% | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | (all cash figures in millions of dollars) | | | | | | |
| 6 | | Start Balance | 1 | | | | | | | | | |
| 7 | | Minimum Cash | 0.5 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | Cash | LT | ST | LT | ST | LT | ST | Ending | | Minimum |
| 10 | | Year | Flow | Loan | Loan | Interest | Interest | Payback | Payback | Balance | | Balance |
| 11 | | 2003 | -8 | 6 | 2 | | | | | 1.00 | ≥ | 0.5 |
| 12 | | 2004 | -2 | | 5 | -0.42 | -0.20 | | -2 | 1.38 | ≥ | 0.5 |
| 13 | | 2005 | -4 | | 0 | -0.42 | -0.50 | | -5 | -8.54 | ≥ | 0.5 |
| 14 | | 2006 | 3 | | 0 | -0.42 | 0 | | 0 | -5.96 | ≥ | 0.5 |
| 15 | | 2007 | 6 | | 0 | -0.42 | 0 | | 0 | -0.38 | ≥ | 0.5 |
| 16 | | 2008 | 3 | | 0 | -0.42 | 0 | | 0 | 2.20 | ≥ | 0.5 |
| 17 | | 2009 | -4 | | 0 | -0.42 | 0 | | 0 | -2.22 | ≥ | 0.5 |
| 18 | | 2010 | 7 | | 0 | -0.42 | 0 | | 0 | 4.36 | ≥ | 0.5 |
| 19 | | 2011 | -2 | | 0 | -0.42 | 0 | | 0 | 1.94 | ≥ | 0.5 |
| 20 | | 2012 | 10 | | 0 | -0.42 | 0 | | 0 | 11.52 | ≥ | 0.5 |
| 21 | | 2013 | | | | -0.42 | 0 | -6 | 0 | 5.10 | ≥ | 0.5 |

| | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | LT | ST | LT | ST | Ending | | Minimum |
| 10 | Interest | Interest | Payback | Payback | Balance | | Balance |
| 11 | | | | | =StartBalance+SUM(C11:I11) | ≥ | =MinimumCash |
| 12 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E11 | | =-E11 | =J11+SUM(C12:I12) | ≥ | =MinimumCash |
| 13 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E12 | | =-E12 | =J12+SUM(C13:I13) | ≥ | =MinimumCash |
| 14 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E13 | | =-E13 | =J13+SUM(C14:I14) | ≥ | =MinimumCash |
| 15 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E14 | | =-E14 | =J14+SUM(C15:I15) | ≥ | =MinimumCash |
| 16 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E15 | | =-E15 | =J15+SUM(C16:I16) | ≥ | =MinimumCash |
| 17 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E16 | | =-E16 | =J16+SUM(C17:I17) | ≥ | =MinimumCash |
| 18 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E17 | | =-E17 | =J17+SUM(C18:I18) | ≥ | =MinimumCash |
| 19 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E18 | | =-E18 | =J18+SUM(C19:I19) | ≥ | =MinimumCash |
| 20 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E19 | | =-E19 | =J19+SUM(C20:I20) | ≥ | =MinimumCash |
| 21 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E20 | =-LTLoan | =-E20 | =J20+SUM(C21:I21) | ≥ | =MinimumCash |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| CashFlow | C11:C20 |
| EndBalance | J21 |
| EndingBalance | J11:J21 |
| LTLoan | D11 |
| LTRate | C3 |
| MinimumBalance | L11:L21 |
| MinimumCash | C7 |
| StartBalance | C6 |
| STLoan | E11:E20 |
| STRate | C4 |

**图 3.4**　大沼泽地公司现金流管理问题的完整电子表格模型，包括未使用 Excel Solver 之前的目标单元格 EndBalance(J21)的等式和所有其他输出单元格。可变单元格 LTLoan(D11)和 STLoan(E11:E20)中输入的数值仅仅是测试解。

的评估模型。它可以用来评估各种提议的结果，包括迅速决定需要多少利息支出和贷款偿还以及由此导致的每一年期末余额。例如，图 3.4 中 LTLoan(D11)和 STLoan(E11:E20)表

示了一种可能的计划,但最终证明是不可行的,因为期末余额(J11:J12)显示有四年的现金期末余额是负的。

为了最优化模型,如图 3.5 所示,Solver 对话框被用来指定目标单元格、可变单元格和约束条件。大沼泽地公司的管理层希望找到一种贷款的组合方式,使得公司在未来十年(2003～2012 年)具有偿付能力,并且在 2013 年归还完所有贷款之后尽可能使现金余额最大化。因此,最大化的目标单元格是期末余额 EndBalance(J21),可变单元格是贷款金额 LTLoan(D11)和 STLoan(E11:E20)。为了保证大沼泽地公司每年年末的现金余额大于 50 万美元,模型的约束条件是期末余额 EndingBalance 最小余额 MinimumBalance(L11:L21)。

在运行完 Solver 之后,最优解如图 3.5 所示。可变单元格 LTLoan(D11)和 STLoan(E11:E20)显示了各年的贷款金额。目标单元格 EndBalance(J21)显示了 2013 年的期末余额为 292 万美元。

## 案例研究的结论

大沼泽地公司财务总监朱莉建立的电子表格模型如图 3.5 所示。她的下一步骤是向她的首席执行官谢尔登·李递交一份报告,该份报告推荐了模型中所获得的计划。

之后不久,谢尔登和朱莉会面讨论了她的报告。

**谢尔登:**朱莉,谢谢你的报告,做得很出色。你的电子表格把所有的事情都列的非常清楚明了。

**朱莉:** 谢谢。花了一点时间在合理组织电子表格和确保其正确运行上,不过我想这些时间是值得的。

**谢尔登:**是的。这些事不能急。现在请你仔细向我解释一下为什么你推荐电子表格所示的计划。

**朱莉:** 好的。该计划的一个要求是它可以保证我们在十年内具有偿付能力。而且,你也多次提醒我,公司的政策要求现金储备在任何时候都要保持最低 50 万美元的余额。

**谢尔登:**是的,从你的电子表格中我看到这个计划满足了这两点。但是,如果仅仅使用长期贷款或只使用一系列的短期贷款,是否也能得到同样的结果?

**朱莉:** 是的,这是可以的。有很多种贷款方式可以满足公司的政策。

**谢尔登:**那为什么选中这个计划?

**朱莉:** 这就是 Excel Solver 所起的作用。你是否记得说过,希望计划可以使 2013 年还清所有贷款之后的现金期末余额尽可能最大化。

**谢尔登:**是的,我记得。

**朱莉:** 把 2013 年的期末余额作为目标单元格之后,Excel Solver 考虑了每一种满足每一年的期末余额最少 50 万美元的计划,最终选择了目标单元格最大化的计划。这正是我的电子表格所显示的这个计划。

**谢尔登:**好的。这正是我所需要的计划。但 Excel Solver 是怎么做到的呢?

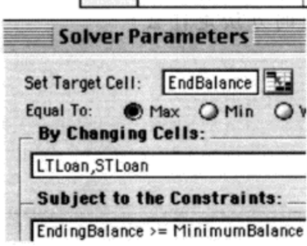
**朱莉:** 它使用了一个管理科学技术,称为线性规划。

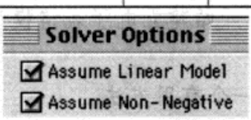
**谢尔登:**嗯,这个线性规划总是能给出最佳的计划吗?

**朱莉:** 是的,只要电子表格设计正确,它就能给出最佳计划。线性规划已经使用很久了,非常可靠。这也是为什么它是 Excel Solver 的一个关键部分。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Everglade Cash Flow Management Problem** | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | LT Rate | 7% | | | | | | | | | |
| 4 | | ST Rate | 10% | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | (all cash figures in millions of dollars) | | | | | | |
| 6 | | Start Balance | 1 | | | | | | | | | |
| 7 | | Minimum Cash | 0.5 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | Cash | LT | ST | LT | ST | LT | ST | Ending | | Minimum |
| 10 | | Year | Flow | Loan | Loan | Interest | Interest | Payback | Payback | Balance | | Balance |
| 11 | | 2003 | -8 | 6.65 | 0.85 | | | | | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 12 | | 2004 | -2 | | 3.40 | -0.47 | -0.09 | | -0.85 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 13 | | 2005 | -4 | | 8.21 | -0.47 | -0.34 | | -3.40 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 14 | | 2006 | 3 | | 6.49 | -0.47 | -0.82 | | -8.21 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 15 | | 2007 | 6 | | 1.61 | -0.47 | -0.65 | | -6.49 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 16 | | 2008 | 3 | | 0 | -0.47 | -0.16 | | -1.61 | 1.27 | ≥ | 0.50 |
| 17 | | 2009 | -4 | | 3.70 | -0.47 | 0 | | 0 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 18 | | 2010 | 7 | | 0 | -0.47 | -0.37 | | -3.70 | 2.97 | ≥ | 0.50 |
| 19 | | 2011 | -2 | | 0 | -0.47 | 0 | | 0 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 20 | | 2012 | 10 | | 0 | -0.47 | 0 | | 0 | 10.03 | ≥ | 0.50 |
| 21 | | 2013 | | | | -0.47 | 0 | -6.65 | 0 | 2.92 | ≥ | 0.50 |

| | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | LT | ST | LT | ST | Ending | | Minimum |
| 10 | Interest | Interest | Payback | Payback | Balance | | Balance |
| 11 | | | | | = StartBalance+SUM(C11:I11) | ≥ | =MinimumCash |
| 12 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E11 | | =-E11 | =J11+SUM(C12:I12) | ≥ | =MinimumCash |
| 13 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E12 | | =-E12 | =J12+SUM(C13:I13) | ≥ | =MinimumCash |
| 14 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E13 | | =-E13 | =J13+SUM(C14:I14) | ≥ | =MinimumCash |
| 15 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E14 | | =-E14 | =J14+SUM(C15:I15) | ≥ | =MinimumCash |
| 16 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E15 | | =-E15 | =J15+SUM(C16:I16) | ≥ | =MinimumCash |
| 17 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E16 | | =-E16 | =J16+SUM(C17:I17) | ≥ | =MinimumCash |
| 18 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E17 | | =-E17 | =J17+SUM(C18:I18) | ≥ | =MinimumCash |
| 19 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E18 | | =-E18 | =J18+SUM(C19:I19) | ≥ | =MinimumCash |
| 20 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E19 | | =-E19 | =J19+SUM(C20:I20) | ≥ | =MinimumCash |
| 21 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E20 | =-LTLoan | =-E20 | =J20+SUM(C21:I21) | ≥ | =MinimumCash |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| CashFlow | C11:C20 |
| EndBalance | J21 |
| EndingBalance | J11:J21 |
| LTLoan | D11 |
| LTRate | C3 |
| MinimumBalance | L11:L21 |
| MinimumCash | C7 |
| StartBalance | C6 |
| STLoan | E11:E20 |
| STRate | C4 |

**图 3.5** 大沼泽地公司现金流管理问题的完整电子表格模型，该模型经过了 Excel Solver 测算获得了最优解，如可变单元格 LTLoan(D11)和 STLoan(E11:E20)所示。目标单元格 EndBalance(J21)显示 2013 年的期末余额为 292 万美元，假设所有数据单元格是正确的。

**谢尔登：**听起来挺不错。但有一件事我还是很困扰。

**朱莉：** 什么事？

**谢尔登**：是有关我们公司未来现金流预测的问题。我们假设公司未来的现金流如你的电子表格中C列所示。这些是很好的估计，但我们也知道这只是估计而已。许多我们现在无法预测的变化会在未来的十年中发生。当经济发生波动，或者出现影响公司的其他无法预期的事件，这些现金流将变化很大。我们怎么才能知道你所推荐的计划在这些变化发生时仍然是合理有效的？

**朱莉**：很好的问题。要回答这个问题，我们先来做一些 what-if 的分析，看一下当变化发生时会发生什么。既然这个电子表格是正确建立的，那么仅仅只需要改变一下C列中现金流的数值，观察一下当前这个计划会有什么变化，你就很容易得到答案。你可以尝试任何一种变化，马上就可以看到结果。每次改变未来现金流的同时，也可以选择试着改变短期贷款的金额，看看需要什么样的调整才能保持每年的最低现金余额达到50万美元。

你准备好了吗？我们现在可以做一些 what-if 分析了吗？

**谢尔登**：开始吧。

> 为每一个数据提供一个单元格，可以很容易地检查当一个数据的真实数值与原始估计不同时会出现的情况。

很幸运，电子表格建立的很合理（为未来十年的每一年现金流都提供了一个数据单元格），只要简单地在数据单元格中尝试不同的数字，就能马上运行 what-if 分析。谢尔登和朱莉花了半个小时的时间尝试不同的数字，结果是：即使未来的现金流偏离目前的预测，图3.5所示的计划仍然是未来十年的合理的财务计划。如果偏离真的发生，短期贷款金额的调整也是必然的。而且，朱莉也会选择去公司的银行，为剩下的几年尝试获得另一份利率低于短期贷款的长期贷款。如果成功，同样可以使用与图3.5所示基本相同的电子表格和 Excel Solver，获得剩下这几年调整过的最优计划。

一项被称为“计算机仿真”的管理科学技术提供了另一种有效的方法将未来现金流的不确定性考虑在内。第15章和第16章将介绍这种技术，16.4节将继续这个案例研究的分析。

### 问题回顾

1. 当你不知道从哪里开始时，帮助你开始建立电子表格模型的方法是什么？
2. 手工计算可以从哪两方面帮助你？
3. 描述一下组织和编排电子表格的一个有用方法。
4. 哪些数值应被输入数据单元格以测试模型？
5. 单元格绝对坐标和相对坐标的区别。

## 3.3 建立一个好的电子表格模型的几个原则

> 在建立电子表格模型其余部分之前应当先安排好所有数据的电子表格的位置。

电子表格建模的方法有许多。电子表格的一个好处是具有很大的灵活性，然而这种灵活性有时会变得很危险。虽然 Excel 提供了许多功能（如区域名称、阴影、边框）可以帮助你建立一个好的电子表格模型，易于理解、易于调试、易于修改，但同时也非常容易就会建立起一个难于理解、难于调试、难于修改的失败

的电子表格模型。这一节的目标就是提供一些原则来帮助你建立一个好的电子表格模型。

## 首先输入数据

所有的电子表格模型是受到电子表格中的数据驱动的。整个模型的形式是围绕着数据结构建立的。因此,一个好方法是,在你开始建立模型的其余部分之前,先输入和仔细编排所有数据。然后尽量使模型的结构符合数据的编排。

通常来说,当电子表格上已经有数据了,那么建立模型的其余部分也比较容易。在大沼泽地公司的问题中(见图 3.5),现金流的数据安排在了电子表格的最前面两列(B 和 C),年份在 B 列,现金流数据从单元格 C11 到 C20。一旦数据在合适的位置,模型的其余部分就能迅速依序排列在数据结构的周围。将可变单元格和输出单元格按照与对应列 B 相同行标的现金流一样的结构进行布置。

现在回顾一下 2.3 节中建立的有关伟恩德制品玻璃公司产品组合问题的电子表格模型。图 3.6 所示为该电子表格。每单位产品耗用小时的数据布置在了电子表格的中间单元格C7:D9。输出单元格“使用时间”(E7:E9)紧接着布置在这些数据的右侧,“可使用时间”(G7:G9)的左侧,所有输出单元格的行标与数据的行标都是对应一致的。这样比较容易说明电子表格第 7 行到第 9 行展示的约束条件。然后,可变单元格和目标单元格都放在数据下面的第 12 行,而可变单元格的列标与上面的数据列标是相同的。

数据的位置有时需要进行一些变动,以更好地适应整个模型。总之,模型的结构通常应当尽可能紧密地符合数据结构。

## 组织和清楚地标识数据

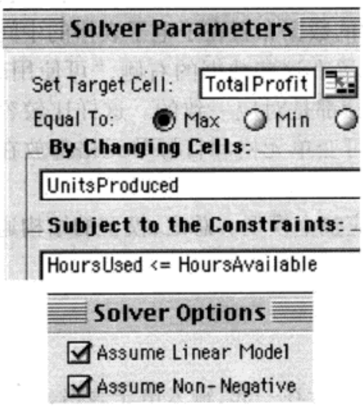
> 在电子表格中给出标注,清楚地标识所有数据。

相关的数据应当用方便的格式组合在一起,输入电子表格,并且用标注确定这些数据。以表格形式展示的数据,应当给表格一个标题,综合描述数据,然后每一行和每一列都应当有一个标注,以标识表格的每一个条目。数据的单位也应当注明。不同的数据应当在电子表格中合理区分。不过,如果两个表格需要使用行或列的相同标注,那么在两个表格中保持行一致或列一致。

在伟恩德玻璃制品公司的产品组合问题中(图 3.6),三组数据被组合成表格,并清楚地标识为单位利润、每单位产品耗用小时和可使用时间。数据的单位也清楚地注明了(单位利润的数据中包含了美元符号,时间数据的标识中已经指明了是小时)。最后,所有三个数据表格对行和列使用保持一贯性。单位利润数据在 C 列和 D 列有产品标注(门和窗),而每单位产品耗用小时也使用了相同的结构。可变单元格(生产的产品数)也同样沿用了这个结构。类似地,每个车间的数据(第 7 行到第 9 行)位于每单位产品耗用小时数据和可使用小时数据所属的行中。保持数据相同的指向,不仅可以避免混乱,而且也便于使用 SUMPRODUCT 函数。SUMPRODUCT 函数假设两个区域大小是完全相同的(即相同的行数和列数)。如果单位利润数据和生产的产品数没有相同的指向(如一个在行,一个在列),在总利润计算中就不能使用 SUMPRODUCT 函数。

类似地,在大沼泽地公司的现金流问题中(图 3.5),五组数据组成了表格,并且清楚地标识为短期利率(ST Rate)、长期利率(LT Rate)、期初余额(Start Balance)、现金流(Cash Flow)和最小现金(Minimum Cash)。数据的单位也被注明了(单元格 F5:I5 说明所有的现金

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 2 | 6 | | | $3,600 |




| | E |
|---|---|
| 5 | Hours |
| 6 | Used |
| 7 | =SUMPRODUCT(C7:D7,UnitsProduced) |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:D8,UnitsProduced) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9,UnitsProduced) |

| | G |
|---|---|
| 11 | Total Profit |
| 12 | =SUMPRODUCT(Unit Profit,UnitsProduced) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| HoursAvailable | G7:G9 |
| HoursUsed | E7:E9 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C7:D9 |
| TotalProfit | G12 |
| UnitProfit | C4:D4 |
| UnitsProduced | C12:D12 |

**图 3.6** 2.3 节中建立的有关伟恩德玻璃公司产品组合问题的电子表格模型。

数值以百万美元计)，而且所有的表格对行和列的使用保持一贯性(年份始终是以行表示)。

## 每个数据输入惟一的一个单元格

> 每个使用同一个数据的公式应指向同一个惟一的数据单元格。

如果一个数据需要在多个公式中使用，那么都指向最初的数据单元格，而不要在另外的地方重复这个数据。这样做可以使模型更容易修改。如果该数据的数值发生了变化，只需要对一处地方进行改动。你不需要搜索整个模型来找出该数据所在的所有位置。

例如，在大沼泽地公司的现金流问题中(图 3.5)，公司有一个政策，要求现金余额无论何时都要保持最低 50 万美元。这就是一个约束条件，即每年年末最小余额 50 万美元。与其将最低余额 0.5(百万美元)输入 L 列的所有单元格，不如只用一次将 0.5(百万美元)输入最小现金 C7，然后将最小余额(L11:L21)的所有单元格指向最小现金 C7。于是，当公司的这项政策变化时，比方说，最小保持 20 万美元的现金，

整个数值只需要在一个位置变动一下。

## 将数据与公式分离

对于任何需要的数值，公式应当指向数据单元格。

避免在公式中直接使用数字。应当将所有需要的数字输入数据单元格，然后在公式中代入所需要的数据单元格。例如，在大沼泽地公司问题中(图 3.5)，所有数据(利率、期初余额、最小现金和预测的现金流)输入了电子表格中单独的数据单元格中。当这些数字需要用来计算支付的利息(F 列和 G 列)、贷款偿还(H 列和 I 列)、期末余额(J 列)和最小余额(L 列)时，数据单元格被代入公式而不是直接将这些数字输入公式。

将数据与公式分离有两个好处。首先，所有数据是可以从电子表格中看到的，而不是藏在公式中。数据的可见性使得模型易于说明。其次，模型易于修改，因为改变数据只需要修改相应的数据单元格。你不需要修改任何公式。当使用 what-if 分析来观察数据单元格的一些估计采用其他可能的数值会产生的结果时，这显得尤为重要。

## 保持简单化

尽量使电子表格易于说明。

避免在可以使用简单函数的情况下，采用 Excel 的功能强大的函数。使用简单函数更加容易说明问题。尽可能坚持使用 SUMPRODUCT 或 SUM 函数。这样可以使得模型更易理解，而且有助于确保模型是线性的(线性模型比其他模型更容易求解)。试着保持公式短而简单。如果公式比较复杂，那么将它分成几段进行计算，再求各部分的和。例如，在大沼泽地公司现金流问题的电子表格中，贷款支出的每一部分都被明确地区分：长期贷款利息、短期贷款利息、长期贷款偿还和短期贷款偿还。其中一些列本来可以合并(如将长期贷款支出和短期贷款支出合并，或者将所有贷款支出合并成一列)，但这样就会使公式变得很复杂，也使模型难于测试和调试。如图 3.5 所示，贷款支出的单个公式非常简单，它们的数值即使不看公式也能算出来。这简化了模型的测试和调试。

## 使用区域名称

区域名称使得公式更易解释。

在电子表格公式中指向一块相关单元格(或仅仅是一个单元格)的一个方法是使用单元格地址(如 L11:L21 或 C3)。然而，这样的方法在读公式时需要找到电子表格中那个位置的内容来了解所提供的信息。一个更好的选择是为单元格方块指定一个描述性的区域名称，可以立即识别该位置的内容(选中单元格方块，选择“插入”菜单中“名称\定义”，然后输入一个名称，就可以获得区域名称)。在为输出单元格写公式时，这显得特别有帮助。用区域名称取代单元格地址写入公式中，使得公式更容易说明。区域名称也使得模型在 Solver 对话框中的描述更易理解。

图 3.5 举例说明了在大沼泽地公司电子表格模型中区域名称的使用。例如，单元格 F12 长期贷款利息的公式。由于单元格 C3 已经给出了长期贷款的利率，单元格 D11 给出了长期贷款的金额，所以长期贷款利息的公式本应当 = − C3 × D11。然而，使用区域名称 LTRate 取代单元格 C3，使用 LTLoan 取代单元格 D11 之后，公式变为 = − LTRate × LTLoan，这样就更容易说明问题。

另一方面,要意识到人很容易就会沉迷于定义区域名称中。定义太多的区域名称会产生更多的麻烦。例如,当相关数据被组合在一个表格中,我们推荐仅仅为整个表格定义一个区域名称,而无需为每列、每行定义区域名称。通常,我们建议仅为数据单元格组、可变单元格、目标单元格,以及两边的约束条件(左侧和右侧)定义区域名称。

> 区域名称中不允许使用空格。如果区域名称包含几个词,则将每个词的首字母大写以便于区分不同词的开始(如 MinimumBalance)。另一个方法就是使用下划线标记(如 Minimum_Balance)。

同时也要注意保证能够很容易地迅速识别一个特定的区域名称所涉及的单元格。使用与电子表格标注确切对应的名称。例如,在图 3.5 中,J 列和 L 列在电子表格中被标注为期末余额和最小余额,因此我们将期末余额和最小余额作为区域名称。使用电子表格上的标注作为区域名称易于快速找到区域名称所指向的单元格。

如果需要,可以将所有区域名称和其相应单元格地址的列表直接贴在电子表格中,你可以通过选择"插入"菜单中"名称\粘贴",然后选中"粘贴清单"来实现。这样一份清单(在重新格式化之后)将位于所显示的所有电子表格下方。

当修改一个使用了区域名称的模型时,要注意确保区域名称仍然指向正确的单元格范围。当在电子表格模型中插入行或列时,最好将该列或该行插在区域的中间,而不要插在最后。例如,在一个有四种产品的产品组合模型中再加入另一种产品,则在产品 2 和产品 3 中加入一列,而不要加在产品 4 后面。这样,相关的区域名称会自动扩展涵盖所有五列内容,因为区域名称会继续指向位于产品 1 和产品 4 之间的所有东西,包括新插入的第五种产品的那一列。同样,在区域的中间删除一列或一行,会自动缩小相关区域名称所涵盖的区域。你可以通过选中名称框(位于 Excel 工具栏的左边,就在工作表的上方)中的区域名称来仔细检查区域名称所指向的单元格,被选中的区域名称所指向的单元格会被标示出来。

## 使用相对和绝对坐标简化公式的复制

当需要重复公式时,试着只输入一次公式,然后利用 Excel 的填充命令复制公式。这不仅比重新输入公式节约时间,还能减少出错的可能。

在之前小节中讨论过的模型扩展完整的过程,是公式复制的一个好例子。图 3.3 显示了前两年的电子表格,而在图 3.4 中,利用填充命令将公式复制到了 F、G、I、J 和 L 列的其余几年,完成了完整的十年的电子表格。

在相关的公式中使用相对和绝对坐标不仅有助于建立模型,而且也便于修改已存在的模型或模板。例如,假设你已经建立了一个有关产品组合问题的电子表格模型,但现在你希望修改模型加入另一个的资料。这需要在电子表格中插入一行。如果输出单元格合理使用了相对坐标和绝对坐标,那么只需复制原有的公式到新插入的一行就可以了。

## 使用边框、阴影和颜色来区分单元格类型

> Excel 的填充命令提供了一个快速、可靠的方法来复制公式到多个单元格。

能够容易地区分电子表格的数据单元格、可变单元格、输出单元格和目标单元格是十分重要的。一种方法就是对不同类型的单元格使用不同的边框、单元格阴影。在本文中,数据单元格用一种淡灰色的淡淡阴影表示,可变单元格用带浅色边框的淡灰色阴影表示,输出单元格没有打上阴影,而目标单元格用带深色边框的深灰色表示。

在管理科学课件的电子表格中,数据单元格显示为淡蓝色,可变单元格为黄色,而目标

单元格是橙色。显然，你也可以使用其他你喜欢的方案。最重要的是要保持一致性，这样你就能迅速识别出单元格的类型。当你想要检查某个类型的单元格时，不同的颜色将立即帮助你找到该种单元格。

## 在电子表格中显示整个模型

> 在电子表格中显示模型的所有内容，而不要依赖 Solver 对话框去包括某些要素。

Solver 结合使用了电子表格和 Solver 对话框来说明需要解决的模型。因此，可以在 Solver 对话框中包含一些模型的要素（如符号，或右侧的约束条件），而无需在电子表格中列出来。但是我们强烈建议模型的每一个要素都要列在电子表格中。任何一个使用、调整或者将来查阅模型的人都要能理解模型。从电子表格上观察模型比通过 Solver 对话框来解读模型更容易。而且，打印出来的电子表格不会包含 Solver 对话框的内容。

特别地，约束条件的所有内容应当列在电子表格上。对每一个约束条件而言，需要使用三个相邻的单元格，包括左侧一个、中间一个表示符号，以及右侧一个（如图 3.5 大沼泽地公司问题中的 J、K 和 L 列）。正如之前所讲过的，可变单元格和目标单元格应当用一些方法标识出来（如用边框和单元格阴影）。一个很好的测试方法就是看你是否需要进入 Solver 对话框才能确定模型的一些要素。你应当可以仅仅通过观察电子表格就能识别模型的可变单元格、目标单元格和所有的约束条件。

## 一个糟糕的电子表格模型

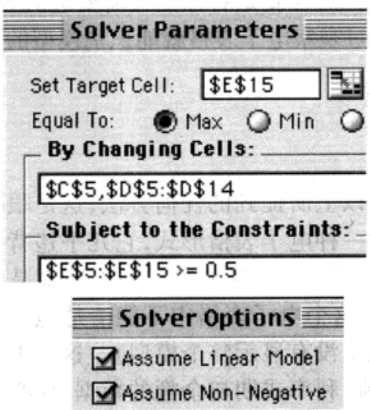
建立了一个线性规划的电子表格模型却没有利用以上所提到的任何方法，这是很有可能发生的。图 3.7 显示了大沼泽地公司现金流问题的一种电子表格形式，它几乎违背了所有原则。但是这种设计仍然可以通过 Solver 来求得答案，并且事实上获得结果也是如图 3.5 所示的最优解。然而，这种设计存在许多问题。在这个电子表格中不能清楚地发现有哪些单元格的话，就无法了解模型的约束条件（电子表格没有显示整个模型）。这个电子表格也没有显示大部分的数据。例如，要确定预测现金流、利率或期初余额的数据，你必须仔细察看 E 列的公式（数据没有与公式分离）。如果当中任何一个数据改变，目前的公式需要修改，而不是仅仅改变电子表格上的一个数值就可以了。而且，Solver 对话框中的公式和模型非常难以理解（没有使用区域名称）。

比较一下图 3.5 和图 3.7。在建模过程中应用了各种原则，就建立了一个易于理解、易于测试、易于修改的电子表格模型。这对那些有较长使用寿命的模型尤为重要。如果模型在一个月之后还要使用，如图 3.5 一样的好模型就可以立即被理解、修改和按需要重新应用，然而再次解读像图 3.7 所示的模型将是一个巨大的挑战。

## 问题回顾

1. 模型的哪个部分应当最先输入电子表格？
2. 数值应当被包括在公式中，还是应被单独输入数据单元格？
3. 区域名称是如何使公式和模型在 Solver 对话框中更易于理解？如何选择区域名称？
4. 区分电子表格的数据单元格、可变单元格、输出单元格和目标单元格有哪些方法？
5. 在电子表格中完整地表达一个约束条件需要多少单元格？

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A Poor Formulation of the Everglade Cash Flow Problem | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | LT | ST | Ending | |
| 4 | | Year | Loan | Loan | Balance | |
| 5 | | 2003 | 6.65 | 0.85 | 0.50 | |
| 6 | | 2004 | | 3.40 | 0.50 | |
| 7 | | 2005 | | 8.21 | 0.50 | |
| 8 | | 2006 | | 6.49 | 0.50 | |
| 9 | | 2007 | | 1.61 | 0.50 | |
| 10 | | 2008 | | 0 | 1.27 | |
| 11 | | 2009 | | 3.70 | 0.50 | |
| 12 | | 2010 | | 0 | 2.97 | |
| 13 | | 2011 | | 0 | 0.50 | |
| 14 | | 2012 | | 0 | 10.03 | |
| 15 | | 2013 | | | 2.92 | |




| | E |
|---|---|
| 3 | Ending |
| 4 | Balance |
| 5 | =1-8+C5+D5 |
| 6 | =E5-2+D6-$C$5*(0.07)-D5*(1.1) |
| 7 | =E6-4+D7-$C$5*(0.07)-D6*(1.1) |
| 8 | =E7+3+D8-$C$5*(0.07)-D7*(1.1) |
| 9 | =E8+6+D9-$C$5*(0.07)-D8*(1.1) |
| 10 | =E9+3+D10-$C$5*(0.07)-D9*(1.1) |
| 11 | =E10-4+D11-$C$5*(0.07)-D10*(1.1) |
| 12 | =E11+7+D12-$C$5*(0.07)-D11*(1.1) |
| 13 | =E12-2+D13-$C$5*(0.07)-D12*(1.1) |
| 14 | =E13+10+D14-$C$5*(0.07)-D13*(1.1) |
| 15 | =E14+D15-$C$5*(1.07)-D14*(1.1) |

图 3.7 大沼泽地公司现金流管理问题的一个糟糕的电子表格模型形式。

## 3.4 调试电子表格模型

不论如何仔细地进行计划和建立，即便是一个中等复杂的模型在第一次运行时通常也不可能没有错误。一般来说，这些错误是非常显而易见的，可以迅速纠正。然而有时错误却又是非常难以发现。遵从 3.3 节所述的有关建立一个好的电子表格模型的原则，会有助于使模型更易调试。即使如此，调试一个电子表格模型就如同调试一个计算机程序一样，是一项困难的任务。本节将介绍使调试变得简单的一些技巧和各种 Excel 功能。

调试电子表格模型的第一个步骤是使用 3.2 节有关测试的第一部分中所讨论的原则来测试模型。具体地说，就是在你可以预知输出单元格正确结果的情况下，将不同的数值输入可变单元格，然后观察模型的计算结果是否和预期一致。0 是一个非常合适的数值用来最

先进行测试,因为很容易预测输出单元格的结果。还可以尝试其他简单的数值,如所有都输入 1,输出单元格的结果也会是显而易见的。如果再尝试一些复杂的数值,就需要准备好计算器,做一些手工计算来检验不同的输出。最好还要用一些非常大的数值输入可变单元格来进行测试,以此来保证在极端的情况下,计算也能正常运行。

> 如果你在电子表格中加入了行或列,那么确保每个区域名称仍然对应正确的单元格。

如果你定义了区域名称,那么确保它们对应了正确的单元格。有时当在电子表格中加入行或列之后,区域名称会变得杂乱。想要测试区域名称,你可以通过选中名称框中的不同区域名称,此时电子表格会突出被选中的区域;或者你也可以将整个区域名称和其对应坐标的清单粘贴到电子表格上(在“插入”菜单中选择“名称\粘贴”,然后选中“粘贴清单”)。

仔细研究每一个公式,确保正确无误。Excel 中有一个十分有效的检查公式的功能,称为“切换”(toggle),它会来回地在电子表格的公式和输出单元格的输出值之间转换。在默认的情况下,Excel 会显示模型中输出单元格计算的数值。在 PC 机上同时按 control 和 ~ 键(在 Mac 上同时按 command 和 ~ 键),就可以使原来的电子表格转换到显示输出单元格的公式,如图 3.8 所示。再次同时按住 control 和 ~ 键就会回到原来标准的状态,输出单元格显示数值(如图 3.5 所示)。

> Excel 中切换(toggle)的功能是检查输出单元格的一个好方法。

Excel 中另一组有效的功能是“审核”工具。在“工具”菜单的“审核”项目中选择“显示审核工具栏”,就可以显示如图 3.9 所示的“审核”工具栏。

“审核”工具栏可以用图形显示与一个既定的单元格直接相关的单元格。例如,选中图 3.5 中的 LTLoan(D11),再点击“审核”工具栏的“追踪从属单元格”键(左起第三个),或者从“工具”菜单中选择“审核\追踪从属单元格”,都可以产生图 3.10 的电子表格中所示的箭头。

你现在可以马上发现长期贷款 LTLoan(D11)在 F 列中每年长期贷款利息 LTInterest 的计算中、长期贷款偿还 LTPayback(H21)的计算中,以及 2003 年的期末余额(J11)的计算中都被使用到了。这是非常能说明问题的。当考虑直接受到长期贷款 LTLoan 影响的单元格时,箭头将指向所有这些单元格。如果 F 列的任何一个公式中少了 LTLoan,缺失的箭头将立即说明有错误存在。同样,如果 LTLoan 被错误地输入了任何短期贷款的输出单元格,那么就会出现多余的箭头。

> Excel 的“审核”工具栏可以帮助你前向和反向追踪,来观察单元格之间的联系。

你也可以进行反追踪,看看对于一个给定的单元格是由哪些单元格给出数据。点击“审核”工具栏的“追踪引用单元格”键(最左面一个键),或者从“工具”菜单中选择“审核\追踪引用单元格”,就可以用箭头显示那些被引用单元格。例如,选中 2004 年短期贷款利息单元格(G12),点击追踪引用单元格,就可以获得图 3.11 所示的箭头。这些箭头说明 2004 年短期贷款利息单元格与 2003 年短期贷款(E11)和短期贷款利率(C4)有关。

当你观察完了单元格之间的联系后,可以点击“取消所有追踪箭头”(左起第五个键),或者从“工具”菜单中选择“审核”下的“取消所有追踪箭头”。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Everglade Cash Flow Management Problem** | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | LT Rate | 0.07 | | | | | | | | | |
| 4 | | ST Rate | 0.1 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | (all cash figures in millions of dollars) | | | | | | |
| 6 | | Start Balance | 1 | | | | | | | | | |
| 7 | | Minimum Cash | 0.5 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | Cash | LT | ST | LT | ST | LT | ST | Ending | | Minimum |
| 10 | | Year | Flow | Loan | Loan | Interest | Interest | Payback | Payback | Balance | | Balance |
| 11 | | 2003 | -8 | 6.64945 | 0.85054 | | | | | =StartBalance+SUM(C11:I11) | ≥ | =MinimumCash |
| 12 | | 2004 | -2 | | 3.40105 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E11 | | =-E11 | =J11+SUM(C12:I12) | ≥ | =MinimumCash |
| 13 | | 2005 | -4 | | 8.20662 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E12 | | =-E12 | =J12+SUM(C13:I13) | ≥ | =MinimumCash |
| 14 | | 2006 | 3 | | 6.49274 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E13 | | =-E13 | =J13+SUM(C14:I14) | ≥ | =MinimumCash |
| 15 | | 2007 | 6 | | 1.60748 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E14 | | =-E14 | =J14+SUM(C15:I15) | ≥ | =MinimumCash |
| 16 | | 2008 | 3 | | 0 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E15 | | =-E15 | =J15+SUM(C16:I16) | ≥ | =MinimumCash |
| 17 | | 2009 | -4 | | 3.69915 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E16 | | =-E16 | =J16+SUM(C17:I17) | ≥ | =MinimumCash |
| 18 | | 2010 | 7 | | 0 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E17 | | =-E17 | =J17+SUM(C18:I18) | ≥ | =MinimumCash |
| 19 | | 2011 | -2 | | 0 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E18 | | =-E18 | =J18+SUM(C19:I19) | ≥ | =MinimumCash |
| 20 | | 2012 | 10 | | 0 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E19 | | =-E19 | =J19+SUM(C20:I20) | ≥ | =MinimumCash |
| 21 | | 2013 | | | | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E20 | =-LTLoan | =-E20 | =J20+SUM(C21:I21) | ≥ | =MinimumCash |

**图3.8** 图3.5使用一次“切换”(toggle)功能之后获得的电子表格，输出单元格中的数值都被原先输入的公式所取代。再一次使用Excel的“切换”功能将恢复到图3.5所示的电子表格。

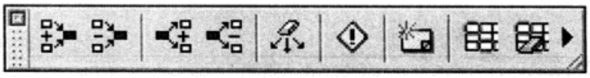


图 3.9　Excel 的“审核”工具栏。使用左起第三个按键和最左面一个按键将分别得到图 3.10 和图 3.11。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Everglade Cash Flow Management Problem | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | LT Rate | 7% | | | | | | | | | |
| 4 | | ST Rate | 10% | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | (all cash figures in millions of dollars) | | | | | | |
| 6 | | Start Balance | 1 | | | | | | | | | |
| 7 | | Minimum Cash | 0.5 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | Cash | LT | ST | LT | ST | LT | ST | Ending | | Minimum |
| 10 | | Year | Flow | Loan | Loan | Interest | Interest | Payback | Payback | Balance | | Balance |
| 11 | | 2003 | -8 | 6.65 | 0.85 | | | | | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 12 | | 2004 | -2 | | 3.40 | -0.47 | -0.09 | | -0.85 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 13 | | 2005 | -4 | | 8.21 | -0.47 | -0.34 | | -3.40 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 14 | | 2006 | 3 | | 6.49 | -0.47 | -0.82 | | -8.21 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 15 | | 2007 | 6 | | 1.61 | -0.47 | -0.65 | | -6.49 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 16 | | 2008 | 3 | | 0 | -0.47 | -0.16 | | -1.61 | 1.27 | ≥ | 0.5 |
| 17 | | 2009 | -4 | | 3.70 | -0.47 | 0 | | 0 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 18 | | 2010 | 7 | | 0 | -0.47 | -0.37 | | -3.70 | 2.97 | ≥ | 0.5 |
| 19 | | 2011 | -2 | | 0 | -0.47 | 0 | | 0 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 20 | | 2012 | 10 | | 0 | -0.47 | 0 | | 0 | 10.03 | ≥ | 0.5 |
| 21 | | 2013 | | | | -0.47 | 0 | -6.65 | 0 | 2.92 | ≥ | 0.5 |

图 3.10　利用 Excel“审核”工具追踪图 3.5 电子表格中与 D11 长期贷款数值有关的单元格而获得的电子表格。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Everglade Cash Flow Management Problem | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | LT Rate | 7% | | | | | | | | | |
| 4 | | ST Rate | 10% | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | (all cash figures in millions of dollars) | | | | | | |
| 6 | | Start Balance | 1 | | | | | | | | | |
| 7 | | Minimum Cash | 0.5 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | Cash | LT | ST | LT | ST | LT | ST | Ending | | Minimum |
| 10 | | Year | Flow | Loan | Loan | Interest | Interest | Payback | Payback | Balance | | Balance |
| 11 | | 2003 | -8 | 6.65 | 0.85 | | | | | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 12 | | 2004 | -2 | | 3.40 | -0.47 | -0.09 | | -0.85 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 13 | | 2005 | -4 | | 8.21 | -0.47 | -0.34 | | -3.40 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 14 | | 2006 | 3 | | 6.49 | -0.47 | -0.82 | | -8.21 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 15 | | 2007 | 6 | | 1.61 | -0.47 | -0.65 | | -6.49 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 16 | | 2008 | 3 | | 0 | -0.47 | -0.16 | | -1.61 | 1.27 | ≥ | 0.5 |
| 17 | | 2009 | -4 | | 3.70 | -0.47 | 0 | | 0 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 18 | | 2010 | 7 | | 0 | -0.47 | -0.37 | | -3.70 | 2.97 | ≥ | 0.5 |
| 19 | | 2011 | -2 | | 0 | -0.47 | 0 | | 0 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 20 | | 2012 | 10 | | 0 | -0.47 | 0 | | 0 | 10.03 | ≥ | 0.5 |
| 21 | | 2013 | | | | -0.47 | 0 | -6.65 | 0 | 2.92 | ≥ | 0.5 |

图 3.11　利用 Excel“审核”工具，追踪图 3.5 中 G12 单元格 2004 年短期贷款利息计算所引用的单元格而获得的电子表格。

## 问题回顾

1. 调试电子表格模型的第一个步骤是什么?
2. 如何使输出单元格在数值和公式中切换?
3. 对于一个给定的单元格,哪一个 Excel 工具可以用来追踪其从属单元格或引用单元格?

## 3.5 本章小结

电子表格建模是一门艺术。本章提供了学习这门艺术的基础知识。

电子表格建模的一般过程包括了四个步骤:(1)计划电子表格模型;(2)建立模型;(3)测试模型;(4)分析模型和其结果。在计划这一步骤中,首先设想一下你所要实现的目标,接着进行一些手工计算来明确需要的计算方法,之后可以开始草拟电子表格。当你准备好进行第二步建立电子表格模型时,最好先从建立一个小规模的、易管理的模型开始,然后再将模型扩展完整。这可以使你在模型扩展完整和最终测试之前,先对小规模的模型进行测试,以保证所有的逻辑关系都已理顺。完成这些步骤之后,你可以进入分析步骤,运用模型来评价建议的结果,使用 Solver 将模型最优化。

利用计划—建立—测试—分析过程可以获得一个电子表格模型,但这并不能保证你可以获得一个好的电子表格模型。3.3 节详细介绍了建立一个好的电子表格模型所需的原则,如下所示:

- 首先输入数据
- 组织和清楚标识数据
- 每个数据输入惟一的一个单元格
- 将数据与公式分离
- 保持简单化
- 使用区域名称
- 使用相对和绝对坐标简化公式的复制
- 使用边框、阴影和颜色来区分单元格类型
- 在电子表格中显示整个模型

即使遵守了以上所有的原则,还是需要进行一次彻底的调试以消除潜伏在最初模型中的错误。检查输出单元格对于给出的不同可变单元格数值是否能够得出正确答案,这是很重要的。还需要检查其他项目,包括:区域名称是否对应合适的单元格、公式有没有正确无误地输入到输出单元格。Excel 提供许多有效的功能来帮助进行模型调试。其中一个功能是电子表格的输出单元格在数值和公式之间切换。Excel 的“审核”工具栏也提供了几个有帮助的功能。

## 专业术语

**绝对坐标**(absolute reference):具有固定地址的单元 格坐标(或是列、行),用区域名称表示,或者在单元

格坐标的字母和数字之前加上 $ 符号。(3.2 节)

**相对坐标**(relative reference):地址根据与含有公式的单元格的相对位置确定的单元格坐标。(3.2 节)

**切换**(toggle):输出单元格在数值和输入的公式之间来回转换的功能。(3.4 节)

**审核工具**(auditing tools):Excel 提供的一组工具,可以帮助对模型进行调试。(3.4 节)

**区域名称**(range name):对单元格方块给出的描述性的名称,可以立即识别其内容。(3.3 节)

## 本章管理科学课件的学习辅助

**"Ch. 3—电子表格建模的艺术"Excel 文件:**

大沼泽地公司的案例研究

伟恩德玻璃制品公司的例子

**Excel 加载宏:**

Premium Solver

## 习　题

在必须使用 Excel 的每道题(或题的部分)的左边都加入了 E* 的标志。打星号的问题至少有一部分的答案会在书后给出。

E*3.1. 考虑本章中所讨论的大沼泽地公司的现金流问题。假设多余的现金被存入带息的存款账户。假设每年年末剩下的现金可以在下一年获得 3% 的利息。对电子表格进行一些必要的修改并且重新求解。

3.2.* 松树家具公司生产优质的田园式家具。公司目前的产品线包括茶几、矮茶几和餐桌。这些产品的生产分别需要 8、15 和 80 磅的松树。这些产品是手工制作的,分别需要 1、2 和 4 小时。每种产品的利润分别是 50、100 和 220 英镑。公司下星期有 3000 磅的松树和 200 小时可用的人工。首席运营官(COO)要求根据这些数据做一个电子表格模型来分析下个星期应采用的产品组合,并提出建议。

a. 设想一下你所要实现的目标。COO 需要什么样的数字?需要作出什么样的决定?目标是什么?

b. 假设松树家具公司生产了 3 张茶几、3 张餐桌。手工计算一下松树的用量和需要的人工时间以及所产生的利润。

c. 草拟一张电子表格模型的草图,列出数据单元格、可变单元格、输出单元格和目标单元格的方块。

E* d. 建立一个电子表格模型,并求解。

3.3. Reboot 公司是一家生产旅行用靴子的制造商。靴子的需求具有很强的季节性。具体地讲,明年的需求预期,一季度 3000 双,二季度 4000 双,三季度 8000 双,四季度 7000 双。按照公司目前的生产设施,公司每季度最多可以生产 6000 双靴子。公司想要满足所有预期的需求,因此需要留有一定的库存以满足后两个季度的需求。每双靴子可以产生 20 美元的利润。每双库存靴子每季度将产生 8 美元的成本,包括了储存成本和资金回收成本。在一季度开始前公司已有 1000 双的库存。公司最高管理层委派你做一些电子表格模型来分析下四个季度应采用的生产进度,并给出建议。

a. 设想一下你所要实现的目标。公司最高管理层需要什么样的数字?需要作出什么样的决定?目标是什么?

b. 假设 Reboot 公司在前两个季度每季度生产 5000 双靴子。手工计算一下一季度和二季度的期末存货、销售利润和存货成本。

c. 草拟一张电子表格模型的草图,列出数据单元格、可变单元格、输出单元格和目标单元格的方块。

E* d. 为一季度和二季度建立一个电子表格

模型,并彻底地测试模型。

E* e. 将模型扩展完整,并求解。

E*3.4.* 和风发展公司正在考虑参与A、B、C三个不同开发项目中的一个或更多,这三个项目马上就要启动。每个项目在未来几年都需要大量的投资,然后在完成后卖掉。每个项目有关的预期现金流如下表所示(单位:百万美元):

| 年份 | 项目 A | 项目 B | 项目 C |
|---|---|---|---|
| 1 | -4 | -8 | -10 |
| 2 | -6 | -8 | -7 |
| 3 | -6 | -4 | -7 |
| 4 | 24 | -4 | -5 |
| 5 | 0 | 30 | -3 |
| 6 | 0 | 0 | 44 |

和风公司目前拥有1000万美元,并且每年年末(1~6)预期可从其他项目中收到600万美元,可以用于项目A、B、C在未来几年的后续投资。对于每个项目,公司可以完全参与,也可以部分参与(与其他发展商合作),或者根本不参与。如果和风公司不是百分之百参与,那么关于该项目的所有现金流成相应比例减少。公司的政策要求每年的现金余额不低于100万美元。

a. 设想一下你所要实现的目标。需要什么样的数字?需要作出什么样的决定?目标是什么?

b. 假设和风公司将完全参与项目A,而投资50%到项目C。手工计算一下一年和两年之后的现金期末余额。

c. 草拟一张电子表格模型的草图,列出数据单元格、可变单元格、输出单元格和目标单元格的方块。

E* d. 为第一年和第二年建立一个电子表格模型,并彻底地测试模型。

E* e. 将模型扩展完整,并求解。

3.5. 参阅第4章问题4.12所描述的情况,但是忽略其给出的指示。通过以下步骤,采用电子表格模型来解决Web Mercantile的问题。

a. 设想一下你所要实现的目标。Web Mercantile需要什么样的数字?需要作出什么样的决定?目标是什么?

b. 假设Web Mercantile在5个月内将出租30000平方英尺,并且在最后3个月额外再出租20000平方英尺。手工计算一下总成本。

c. 草拟一张电子表格模型的草图,列出数据单元格、可变单元格、输出单元格和目标单元格的方块。

E* d. 为第一个月和第二个月建立一个电子表格模型,并彻底地测试模型。

E* e. 将模型扩展完整,并求解。

3.6.* 参阅第4章问题4.14所描述的情况,但是忽略其给出的指示。通过以下步骤,采用电子表格模型来解决拉里·爱迪生的问题。

a. 设想一下你所要实现的目标。拉里·爱迪生需要什么样的数字?需要作出什么样的决定?目标是什么?

b. 假设拉里·爱迪生将雇用3个全职的早班员工、2个下午、4个晚班,另外4个轮班每个再雇3个兼职员工。手工计算一下每天每个班次有多少员工在工作,每天的总成本是多少。

c. 草拟一张电子表格模型的草图,列出数据单元格、可变单元格、输出单元格和目标单元格的方块。

E* d. 建立一个电子表格模型,并求解。

3.7. 参阅第4章问题4.17所描述的情况,但是忽略其给出的指示。通过以下步骤,采用电子表格模型来解决Al Ferris的问题。

a. 设想一下你所要实现的目标。Al Ferris需要什么样的数字?需要作出什么样的决定?目标是什么?

b. 假设Al Ferris将分别在投资A(第一年)、投资B(第二年)、投资C(第二年)上投资2万美元。手工计算一下每年的期末现金头寸。

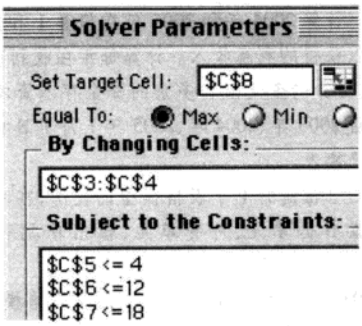
c. 草拟一张电子表格模型的草图,列出数据单元格、可变单元格、输出单元格和目标单元格的方块。

E* d. 为第一年到第三年建立一个电子表格模型,并彻底地测试模型。

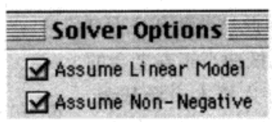
E* e. 将模型扩展完整,并求解。

3.8. 与图3.6所示的伟恩德玻璃制品公司产品组合的电子表格模型不同,下面给出的是针对同一个问题的糟糕的电子表格模型的例子。根据3.3节,指出该模型所违背的建模原则。然后,解释该模型是如何违背原则的,为什么图3.6的模型更好?

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **Wyndor Glass Co. (Poor Formulation)** | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | Doors Produced | 2 | |
| 4 | | Windows Produced | 6 | |
| 5 | | Hours Used (Plant 1) | 2 | |
| 6 | | Hours Used (Plant 2) | 12 | |
| 7 | | Hours Used (Plant 3) | 18 | |
| 8 | | Total Profit | $3,600 | |



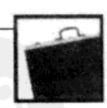

| | B | C |
|---|---|---|
| 5 | Hours Used (Plant 1) | =1*C3+0*C4 |
| 6 | Hours Used (Plant 2) | =0*C3+2*C4 |
| 7 | Hours Used (Plant 3) | =3*C3+2*C4 |
| 8 | Total Profit | =300*C3+500*C4 |




E*3.9.　参考光盘中的电子表格名为“Everglade Problem 3.9”的文件，这个文件包含了一个本章考虑的大沼泽地问题的公式。但是，这个公式中有三个错误，用 3.4 节介绍的调试电子表格模型的方法找出这些错误。特别地，用能够预测的正确结果来尝试不同的试验值，使用“切换”功能来检验所有的公式，然后使用审核工具栏来检验前后不同的可变单元格、数据单元格和输出单元格之间的关联和依赖关系。描述你找到的错误以及你是如何找到的。

E*3.10.　参考光盘中的电子表格名为“Everglade Problem 3.10”的文件，这个文件包含了一个本章考虑的大沼泽地问题的公式。但是，这个公式中有三个错误，用 3.4 节介绍的调试电子表格模型的方法找出这些错误。特别地，用能够预测的正确结果来尝试不同的试验值，使用“切换”功能来检验所有的公式，然后使用审核工具栏来检验前后不同的可变单元格、数据单元格和输出单元格之间的关联和依赖关系。描述你找到的错误以及你是如何找到的。

## 案例 3.1　养老金的谨慎供应



普鲁登金融服务公司(PFS)管理的许多金融产品中有一只很受赞誉的养老基金，这些养老基金是很多公司用来为其雇员提供养老金的。PFS 的管理层以其在基金运作中严格的专业标准而自豪。自从 2001 年下半年安然破产事件和随之而来的联邦政府和州政府对养老基金运作的紧缩规制，PFS 已经加倍努力来谨慎地管理基金。

现在是 2002 年的 12 月了，在接下去的 10 年中需要支付的总的养老基金如下表所示：

| 年 | 养老金支付(百万美元) |
|---|---|
| 2003 | 8 |
| 2004 | 12 |
| 2005 | 13 |
| 2006 | 14 |
| 2007 | 16 |
| 2008 | 17 |
| 2009 | 20 |
| 2010 | 21 |
| 2011 | 22 |
| 2012 | 24 |

同样通过使用利息计算，PFS 当前具备足够的流动资产来满足所有的养老金支付。因此，为了使养老基金有安全保证，PFS 希望投资在能够与未来10 年中的养老金支付相匹配的项目。养老基金授权 PFS 的投资项目只能是资本市场基金和债券。资本市场基金获得每年固定的 5% 的利息收入，公司所考虑投资的四个债券的特征如下表所示：

| | 当前价格 | 息票率 | 到期日 | 面　值 |
|---|---|---|---|---|
| 债券 1 | $980 | 4% | 2004. 1. 1 | $1000 |
| 债券 2 | 920 | 2 | 2006. 1. 1 | 1000 |
| 债券 3 | 750 | 0 | 2008. 1. 1 | 1000 |
| 债券 4 | 800 | 3 | 2011. 1. 1 | 1000 |

所有的债券将可在 2003 年 1 月 1 日购买，可以购买任意数量单位。息票率是面值的一个比例，将在每年的 1 月 1 日付息，支付期为购买后的第一年到到期日为止（包括到期日）。因此这些每年 1 月 1 日的利息支付获得正好能够用来抵冲当年养老金的支付。所有多余的利息收入将存入资本市场基金。为了金融计划的保守起见，PFS 假定所有的养老金支付在每年的年初，正好在利息收入（包括资本市场基金的利息收入）获得之后。债券的面值也将在到期日获得。既然当前的债券价格低于面值，真正的债权的收益比息票率要高，债券 3 是一个零息票率的债券，所以每年得到的利息为 0，但是到到期日获得的面值要远大于当年债券的购得价格。

PFS 希望在 2003 年 1 月 1 日使用最小可能的投资（包括资本市场基金的存款）来应付到 2012 年为止的所有所需的养老金的支付。需要建立一些电子表格模型来实施分析。

a. 形象化你所要完成的分析，哪些数值是 PFS 管理层所需要的？决策变量是什么？目标是什么？
b. 假设 PFS 2003 年 1 月 1 日将在资本市场基金投资 2800 万美元以及购买债券 1 和债券 2 各 10000 单位。计算 2004 年和 2005 年在债券 1 和债券 2 上可以获得的利息收入。计算每年在收到这些收入、支付养老金支出和多余的资金存入资本市场基金后 2003 年、2004 年、2005 年 1 月 1 日相应的资金平衡表。
c. 制作一个粗糙的电子表格模型的轮廓，在单元格中放置数据单元、可变单元、输出单元和目标单元。
d. 为 2003 年到 2005 年建立一个电子表格模型，然后彻底地测试该模型。
e. 扩展模型考虑到 2012 年为止的所有年份，求解该问题。

CHAPTER

# 4 线性规划:建模与应用

## 学习目标

完成本章学习后,你应该掌握:

1. 认知能用线性规划解决的各类管理问题。
2. 能描述线性规划问题的四种主要类型,知道他们各自的特点。
3. 能为四类线性规划问题建立模型。
4. 知道资源约束和收益约束的区别,以及产生差异的原因。
5. 知道确定的约束条件并且知道它们如何产生。
6. 了解在线性规划电子表格模型中的输出单元格,包括目标单元格中使用的各种函数。
7. 了解在线性规划模型中的四个基本组成部分,并且知道各自对应的单元格。
8. 认知可以用线性规划描述与分析的管理问题。
9. 理解管理者在考虑线性规划模型所包含的重要事项时的灵活性。

线性规划问题种类繁多,形式各异,使得线性规划的学习者与管理者在面对实际的管理问题时,往往会困惑而不知在何种情况下采用线性规划较为合适。由于管理科学方面的研究是由管理者发起的,因此判断线性规划在特定的情况下是否适用就成为一项重要的管理技能。这一章将主要阐述如何开发这一技能。

以前的教科书往往给出一系列不同的线性规划应用例子,来解释这一技能。这种方法的不足之处在于强调各种应用之间的差别而非共同的思路。而本文强调的是线性规划应用的共同思路,正是这些共同的特性将内容各异的线性规划问题联系在一起。本章首先介绍线性规划问题的主要类型及其共性,然后给出不同的例子来解释与强调各种线性规划问题的共同思路。

本章重点介绍三类线性规划问题:资源分配(resource-allocation)问题、成本收益平衡(cost-benefit-trade-off)问题以及网络配送

(distribution-network)问题。对于每一类线性规划问题,最重要的共同特征是决策所基于的约束条件的性质,也就是线性规划模型中相应的函数约束(functional constraints)的性质。具体的来说,三类线性规划问题的函数约束分别为资源(resource)约束、收益(benefit)约束与确定需求的(fixed-requirement)约束。在每一类问题中,读者都可以看到问题中的基本数据是如何通过一些特定的形式直接生成线性规划的模型。从这个意义上说,建模就成为了问题描述的副产品。

尽管许多线性规划问题因仅包含一种函数约束,并归属于三类线性规划问题中的相应的一种,实际上,更多的问题包含至少两种甚至三种函数约束,因而不能绝对地归于三类中的某一类。这类问题于是便归入第四类线性规划问题,称为混合问题。

本章以案例分析的形式,引入一个资源分配(resource-allocation)问题,并在后面的4.5节中进一步讨论该问题,增加管理方面的考虑事项,使之转变为混合问题。

4.2节、4.3节、4.4节及4.6节依次着重介绍了四类线性规划问题,4.7节从管理的角度在更大的范围内阐述线性规划模型的建立过程,这一节(结合4.5节)将强调模型从管理角度反映问题的准确性的重要性。同时,这些章节也将讨论管理者在建立模型时所拥有的灵活性,这种灵活性体现在管理者可以使模型最好地适用于他们所考虑的重要管理事项。

最后,4.8节将回顾2.1节中线性规划经典应用的三个案例,并讨论这些应用之所以如此成功的一些决定因素。

## 4.1 案例研究:超级食品公司的广告混合问题

超级食品公司的营销部副总裁克莱略·希文生正面临着一个棘手的挑战:如何才能大规模地进入已有许多供应商的早点谷类食品市场。值得庆幸的是,该公司的早点谷类食品“脆始”(Crunchy Start)有许多受欢迎的优点:口味佳、营养、松脆。克莱略·希文生对这一切都如数家珍,她知道这一食品是能够赢得这次促销活动的。

然而,克莱略清楚她必须避免上一次产品促销活动中所犯的错误。那是她晋升以后第一项重大任务,结果简直是个悲剧!她本以为已经大功告成,却没想到那次活动并没有触及至关重要的目标市场——幼年儿童以及幼年儿童的父母。同时,她还领悟到未将优惠券包含在杂志与报纸的广告中是另一大失误。哎,学习是永无止境的。

这一次,必须吸取上次的教训。公司的总裁大卫·斯隆已经向她表示脆始这一产品成功与否对公司前途有着重要影响。她清楚地记得大卫在结束与她的谈话时说:“公司的股东对公司的现状极为不满,我们必须再次纠正方向,增加公司收入。”克莱略以前也曾听到过这样的语调,但这一次,她从大卫极为严肃的目光中意识到了问题的严重性。

克莱略经常使用电子表格来帮助自己进行计划。她在商学院所学习的管理科学课程让她知道电子表格模型是多么的有用。她很遗憾上次的活动中她没有使用这一工具。她决定这次不会再犯同样的错误。

现在是时候让克莱略仔细地考虑一下问题并准备如何建立数据表格。

### 问　题

克莱略已经雇用了一家一流的广告公司G&J公司来帮助设计全国性的促销活动,以使脆始取得尽可能多的消费者的认可。超级食品公司将根据该广告公司所提供的服务付给一定的酬金(不超过100万美元)并已经预留了另外的400万美元作为广告费用。

G&J 公司已经确定了这一产品最有效的三种广告媒介。

媒介 1:星期六上午儿童节目的电视广告。
媒介 2:食品与家庭导向的杂志上的广告。
媒介 3:主要报纸星期天增刊上的广告。

现在,要解决的问题是如何确定各广告活动的使用水平(levels)以取得最有效的广告组合(advertising mix)。

为了确定这一广告投放问题的最佳活动水平组合(the best mix of activity levels),首先必须明确该问题的总绩效测度(overall measure of performance)以及每一活动对该测度的贡献。超级食品公司的最终目标是利润最大化,但是利润与广告所影响的范围间的直接关系很难确定。因此,克莱略决定以广告受众的期望数量代替利润作为问题的总绩效测度。用广告的浏览量来衡量广告的受众数量。

G&J 公司已经为三种媒介广告进行了初步的计划,并且估计了每种媒介广告的每次广告的受众数量,如表 4.1 的最底行所示。

**表 4.1 超级食品公司广告组合问题的成本和广告受众数据**

| 成本分类 | 成本(美元) | | |
|---|---|---|---|
| | 每次电视广告 | 每份杂志广告 | 每份星期天增刊广告 |
| 1. 广告预算 | 300000 | 150000 | 100000 |
| 2. 规划预算 | 90000 | 30000 | 40000 |
| 广告受众期望量 | 1300000 | 600000 | 500000 |

每种媒介上可投放的广告数目受广告预算(400 万美元)与计划预算(给 G&J 公司的酬金 100 万美元)的限制。另一限制条件是:在促销活动期间,媒介 1,即星期六上午的儿童节目上的广告已所剩无几,很难买到,只有五个广告时段的长度适合(另外两种广告媒介上有足够的选择余地)。

因此,该问题的三种有限资源分别为:

资源 1:广告预算(400 万美元)。
资源 2:计划预算(100 万美元)。
资源 3:可获得的电视广告时段 (5)。

表 4.1 显示了每一种广告媒介上的每一次广告投放相应的广告预算和计划预算。

- 第一行的数值表示每种广告媒介上每一次广告投放的成本
- 第二行表示 G&J 公司用于设计与开发各种媒介广告的估计费用(包括管理费用与收益①,这一费用列入了超级食品公司的费用支出清单)
- 最后一行表示单位广告可获得的广告受众期望量

## 问题分析

克莱略决定在电子表格上建立线性规划模型来解决这一问题。2.3 节最后总结的线性

① 在确定这些估计值时,公司做了两个简单假设:假设一为同种广告媒介的广告设计和开发的成本不会随着广告数量的增加而变化;假设二为一种广告媒介的成本不受其他广告媒介上广告投放数量的影响。

规划建模程序可以指导整个建模过程,与其他的线性规划模型一样,该模型也包含四部分:

1. 数据。
2. 决策。
3. 约束。
4. 绩效测度。

这一电子表格模型的四个部分需要四种类型的单元格。

首先必须格式化电子表格以便为下面的各部分提供各种类型的单元格:

数据→数据单元格
决策→可变单元格
约束→输出单元格
绩效测度→目标单元格

图4.1显示了克莱略建立的电子表格模型。从中可以看出她是如何考虑模型的各个部分,从而建立该模型的。

**数　据**

一类重要的数据是前面已经给出的三类资源(广告预算、计划预算、可获得的电视广告时段)的数量限制。表4.1中列举了该问题的其他主要数据,以1000美元为单位,这些数据直接输入电子表格的数据单元格并命名单元格为每次广告的受众(C4:E4)、每个广告的支出(C8:E9)、可用预算(H8:H9)和最多电视广告时段(C15)。

**决　策**

G&J公司定义该问题为在三种媒介中确定最有效的广告组合,因此,有三种决策:

决策1:TV = 电视上的广告时段数目
决策2: M = 杂志上的广告数目
决策3: SS = 星期天增刊上的广告数目

存放这些数据的可变单元格处于表中第13行各种媒介的相应位置。

TV→单元格C13　　M→单元格D13　　SS→单元格E13

这些可变单元格被命名为广告量(C13:E13)。

**约　束**

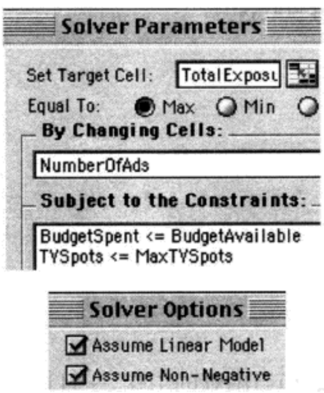
这些可变单元格必须是非负的,此外,三种资源也是有限的。前两种资源是广告预算和计划预算。这两种预算的数值显示在预算约束栏(H8:H9)中。如G栏所示的≤符号,相应的约束为:

广告总费用≤4000 (广告预算4000)(以千美元为单位)
计划总成本≤1000 (计划预算1000)(以千美元为单位)

利用C、D与E栏中的数据,这些总量分别可表示为

广告总费用 = 300TV + 150M + 100SS
计划总成本 = 90TV + 30M + 40SS

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Super Grain Corp. Advertising-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | TV Spots | Magazine Ads | SS Ads | | | |
| 4 | | Exposures per Ad | 1,300 | 600 | 500 | | | |
| 5 | | (thousands) | | | | | | |
| 6 | | | | | | Budget | | Budget |
| 7 | | | | Cost per Ad ($thousands) | | Spent | | Available |
| 8 | | Ad Budget | 300 | 150 | 100 | 4,000 | ≤ | 4,000 |
| 9 | | Planning Budget | 90 | 30 | 40 | 1,000 | ≤ | 1,000 |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | Total Exposures |
| 12 | | | TV Spots | Magazine Ads | SS Ads | | | (thousands) |
| 13 | | Number of Ads | 0 | 20 | 10 | | | 17,000 |
| 14 | | | ≤ | | | | | |
| 15 | | Max TV Spots | 5 | | | | | |




| | F |
|---|---|
| 6 | Budget |
| 7 | Spent |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:E8,NumberOfAds) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:E9,NumberOfAds) |

| | H |
|---|---|
| 11 | Total Exposures |
| 12 | (thousands) |
| 13 | =SUMPRODUCT(ExposuresPerAd,NumberOfAds) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| BudgetAvailable | H8: H9 |
| BudgetSpent | F8: F9 |
| CostPerAd | C8: E9 |
| ExposuresPerAd | C4: E4 |
| MaxTVSpots | C15 |
| NumberOfAds | C13: E13 |
| TotalExposures | H13 |
| TVSpots | C13 |

**图 4.1** 超级食品公司的电子表格模型(4.1 节)，包括目标单元格总广告受众(H13)和其他输出单元格预算支出(F8:F9)以及建立规划求解的规定，可变单元格广告数量（C13:E13）给出了通过规划求解所获得的最优解。

> 区域名可能会重复。比如，我们用广告投放量来代表从 C13 到 E13 的全部可变单元格，而用电视广告时段数目来表示单一的数据格 C13。

右式的和项通过使用图 4.1 右下角所示的 SUMPRODUCT 函数输入预算支出输出单元格(F8:F9)。尽管 G 列右边的≤符号没有实际作用(可输入不符合这一不等式的值进行试验)，但它们可提示用户在 Solver 软件对话框中输入限制条件时使用同样的≤符号。

第三个资源是不同电视广告的可用时段。有 5 个时段可以购买。可变单元格之一(C13)就是购买的时段数量。因为这个单元格会作为一个约束条件，我们命名它为电视时段(C13)。在最多电视时段数据单元格(C15)中是可以购买的电视时段的最大数量。因此，约束条件是电视时段≤最多电视时段。

**绩效测度**

克莱略·希文生用广告受众期望数量作为总的绩效测度。所以：

广告受众 = 所有广告的期望受众数量(以千为单位)

单元格每一次广告受众数量(C4:E4)给出了各广告媒介每一次广告投放的受众期望数量(以千为单位),可变单元格广告数量(C13:E13)给出了各种广告投放的数量。因此广告受众的期望总量为：

$$\text{广告受众量} = 1300TV + 600M + 500SS$$
$$= \text{SUMPRODUCT}(\text{每一次广告受众数量},\text{广告数量})$$

以上公式将得出目标单元格广告受众总量(H13)的数值。

**建模总结**

上述在电子表格上对该模型四部分的分析,描述了如下代数形式的线性规划模型：

$$\text{最大化} \quad \text{广告受众量} = 1300TV + 600M + 500SS$$

约束条件

| | |
|---|---|
| 广告费用： | $300TV + 150M + 100SS \leqslant 4000$ |
| 计划成本： | $90TV + 30M + 40SS \leqslant 1000$ |
| 电视广告时段的数目： | $TV \leqslant 5$ |

且

$$TV \geqslant 0 \qquad M \geqslant 0 \qquad SS \geqslant 0$$

从上面可以看出,问题的定义与表 4.1 中相关数据的收集是相当困难的工作,一旦这两项工作完成,就可以直接建立模型。

**模型求解**

为了求解上面电子表格模型中所描述的模型,必须在 Solver 对话框中输入一些重要的信息。图 4.1 的左下角显示了这些信息:目标单元格(广告受众总量)、可变单元格(广告量)、目标为最大化目标单元格,以及预算支出≤可用预算、电视时段≤最多电视时段的限制条件。此外,图左下角显示的两个 Solver 选项必须选定:成线性关系(因为这是一个线性规划模型)以及采用非负的条件(因为不可能有负数的广告水平)。点击求解按钮,让 Solver 为该模型寻找最优解,并显示在可变单元格中。

电子表格第 13 行给出的最优解为本次促销活动作出了如下的规划：

不采用任何电视广告
在杂志上刊登 20 处广告
在星期天增刊上刊登 10 处广告

单元格广告受众总量(H13)显示了以千为单位的广告受众期望总量,显示该广告投放组合规划可达到 17000000 人次的广告受众量。

**模型准确性评价**

在用线性规划模型描述这一广告投放组合问题时,克莱略认识到模型与实际问题并不

是完全吻合的。数学模型只能是实际问题的抽象表示,而为了将实际问题抽象出来,就必须进行一些近似或简化的假设。值得庆幸的是,我们所要求的也只是数学模型与实际问题具有较高的关联性。团队现在面临的工作是确定上述模型是否符合这一标准。

线性规划模型允许有分数解。

线性规划的假设之一是允许有分数解,在这一例子中,就意味着电视广告投放(或者杂志以及星期天增刊上的广告)数目可能是分数形式的,如 $3\frac{1}{2}$。这一点在技术上是可以实现的,例如,广告的时间可以比标准时间短一些,而杂志和星期天增刊上的广告可以只在部分刊物上刊出。但是,该模型的不足之处是它进行了如下假设:如果广告仅部分播出(或刊出),公司支付给 G&J 公司的酬金也会成比例减少,而实际上所需支付的酬金是不会因此减少的。值得庆幸的是,上述模型的最优解均为整数(不采用任何电视广告,在杂志上刊登 20 处广告,在星期天增刊上刊登 10 处广告),这样分数的假设条件也就不需要了。

线性规划模型用 SUM 函数或 SUMPRODUCT 函数表示包括目标单元格在内的所有输出单元格。

线性规划的另一个假设是包括目标单元格在内的所有输出单元格都可以用 SUMPRODUCT 函数以数据单元格和可变单元格表示(有时候只是可变单元格的加总)。图 4.1 中的目标单元格(H13)表明,每一广告媒介的广告受众数量与在这一媒介上投放的广告数成正比。这一正比关系大致正确,因为受众再次观看广告可以认为是增加一单位的广告受众。使用 SUMPRODUCT 函数包含的另一个假设是一种媒介上的广告效果不会受其他媒介广告的影响,同样,这也是大致正确的,因为每种媒介的广告受众的计算都被认为是独立的。

虽然 SUMPRODUCT 函数适合于计算广告受众数量,但用这一数字作为绩效评估却存在一定的问题。管理者的真正目标是通过广告宣传使利润最大化,但由于利润很难估算,所以选择广告受众量作为利润的替代品。如果利润与广告受众量成正比,那么这一选择是正确的。但是,在本案例中,正比关系只是近似的。因为随着同一受众观看公司广告次数的增加,并达到饱和水平时,再增加观看广告次数所能带来的影响与第一次看到广告带来的影响相比,肯定会有所减少。

为了判断用广告受众量代替利润是否合理,克莱略与 G&J 公司的一位高层人士斯德会谈。斯德表示目前这一广告(在杂志上刊登 20 处广告,在星期天增刊上刊登 10 处广告)还远没有达到饱和水平。大多数的读者最多只会看到该广告一次或两次,能够两次看到广告已经是相当不错了。此外,杂志与星期天增刊的读者是很不相同的,因此,两种媒体之间的影响也很小。这样,克莱略就得出结论,在图 4.1 中的目标单元格中运用广告受众量是合理的近似(这个案例的后续案例即案例 10.1 会进行更深入的分析,会直接在目标单元格中用利润作为绩效评估,而不是使用近似替代)。

接下来,克莱略询问斯德这一广告的设计与开发的成本问题。某一媒介广告的开发成本是否与该媒介广告的投放数量成比例?某一媒介广告的开发费用不会因为公司最近在另一媒介上作过相同主题的广告而大大减少的假设是否合理呢?斯德承认不同媒介广告的设计有互相重叠的部分,特别是当同为印刷媒介时(如杂志与报纸增刊),但是,由于不同媒介截然不同的特色,这种重叠是极为有限的。此外,他认为比例性的假设是很合理的,因为在同一媒介设计与开发广告的工作量大致相等,均等同于在该媒介第一次设计与开发该种广

告的工作量。超级食品公司付给 G&J 公司的酬金，是通过仔细计算其实际工作量来最终决定的。斯德觉得公司开始估计的成本(输入在 C9、D9 和 E9 单元格中的数据，以千美元为单位)给这次促销活动的广告投放组合规划(输入在可变单元格中) 提供了一个大致合理的基础。

在这些信息的基础上，克莱略认为在目标单元格 F9，以及单元格 F8 中使用 SUMPRODUCT 函数的近似是合理。图 4.1 所包含的线性规划模型(更详细的规划需要对模型加以扩展)是实际广告组合问题的正确描述，前面模型所得出的结论是合理的，不需要再将该模型复杂化，以求得更精确的解(如第 10 章中所示)。

因此，克莱略决定以线性规划模型所产生的最优解(不采用任何电视广告，在杂志上刊登 20 处广告，在星期天增刊上刊登 10 处广告)为结论写出报告，建议此次促销活动应该如何规划，并将报告交给大卫·斯隆。她同时召开会议评价此方案并且讨论是否需要进行进一步改进。

## 管理者的反应

小组提交了报告之后不久，克莱略·希文生与大卫·斯隆碰头，就报告展开讨论：

**大卫·斯隆(总裁)**：克莱略，谢谢你的这份报告，这好像是一个不错的建议。但我很吃惊，居然没有采用任何的电视广告，为什么呢？

**克莱略·希文生（市场部的副总裁）**：就像我在报告中说的，我用电子表格模型来分析如何使广告受众最大化，而这就是最后的结果。我对于不采用任何电视广告这一点也很惊讶。但是模型显示电视广告的受众不如杂志和周末报纸特刊的受众多。难道你不觉得我们应该采用能够使广告受众数量最大的计划吗?

**大卫：** 并不完全这样。有些广告受众不如另一些重要。比如我们知道中年人不是我们麦片食品的主要消费者，所以我们并不很在意有多少中年人看到了我们的广告。在星期六上午儿童节目中的广告是我们接触儿童的主要途径。大家都知道，能使得儿童向他们的父母要脆始食品是极为重要的，这将是我们产品初次销售的最佳途径，而那些广告时段通常也是由家长陪同小孩一起看的。因此，我们所需要的是能同时迎合儿童与家长的广告时段，能让儿童立刻要求父母去买脆始。我认为，这才是这次促销活动成功与否的关键。

**克莱略：** 是的，很有道理。事实上，我已经确定了一些目标以确保看到我们广告的儿童与家长的数字达到一定的标准。

**大卫：** 很好，那你有没有把这些目标放入电子表格模型中呢?

**克莱略：** 不，还没有。

**大卫：** 那我建议你把这些目标放入模型中。我觉得放入这些目标后的模型的结论会有所不同，可能会要求做一些电视广告。

**克莱略：** 这是个好主意。我会考虑。

**大卫：** 在你的报告中是不是还有其他一些因素没有考虑到?

**克莱略：** 哦，是的，还有一点，这一提议并没有考虑杂志与报纸上的优惠券的预算。

**大卫：** 我肯定你能够处理这一点。你最好将这些考虑因素都放进模型中然后看结果。

**克莱略：** 太好了，现在，我马上回去做。你看起来对电子表格模型很有经验。

**大卫：** 是的，只要你对模型得出的结论保持一定的怀疑性，这就会是一个很好的工具。当我们作管理决策时，没有一个工具能够对问题进行非常周全的考虑。特别是在你第一次用模型的时候。你需要不断思考还有什么因素是我需要加入模型

的。最后，当你使模型已经尽可能完整并得出结论时，你仍然要用你的判断力思考还有哪些因素不能放入模型中。这是我做市场部副主管的时候学会的。我相信你会比我更快地掌握这些。你现在的方向是正确的。

**克莱略：**谢谢你的建议。我会回去做好再向你汇报。

这个案例将在 4.5 中继续讨论。

**问题回顾**

1. 这个案例的主要问题是什么？
2. 所采用的总的绩效测度是什么？
3. 为什么大卫·斯隆对线性规划电子表格模型得出的结论有异议？
4. 在评价使用线性规划来表示该实际问题的准确性时，要作出的假设条件有哪些？

## 4.2 资源分配问题

在第 2 章的开始部分，曾讨论过在组织中将有限的资源分配给不同的生产性活动的管理问题，那些都是资源分配(resource-allocation)问题。

**资源分配**问题是将有限的资源分配到各种活动中去的线性规划问题。这一类问题的共性是在线性规划模型中每一个函数限制均为资源限制(resource constraint)，并且，每一种资源都可以表现为如下的形式：

使用的资源数量≤可用的资源数量

使用的资源数量由是什么活动、活动水平以及活动需要用多少资源决定。所以资源的限制约束了活动水平。所以目标就是在满足资源限制的条件下使活动水平能够最大化所选择的绩效测度(诸如总利润等)。

通过上面的案例分析，以及我们所熟悉的伟恩德玻璃制品公司的产品组合(product-mix)问题，我们先浏览一下阐明资源分配问题特点的三个例子。这些例子说明了在不同的背景下此类问题是如何产生的。

### 超级食品公司的广告组合问题

4.1 节中超级食品公司案例中的线性规划模型是资源分配问题的一个例子。所考虑的三种活动是由 G&J 公司所选择的三种媒体上的广告。

活动 1：电视广告
活动 2：杂志广告
活动 3：星期天增刊上的广告

解决资源分配问题的第一步是明确活动和资源。

要制定的决策是这些活动的水平，也就是应该投放多少广告在电视、杂志、星期天增刊这三种媒体上。

可分配给各种活动的有限资源分别为：

资源 1：广告预算(400 美元)

资源 2：计划预算(400 美元)
资源 3：可获得的电视广告时段(5)

资源的限制数量在括号中表示出来。所以，这个问题有三个资源约束：

| | |
|---|---|
| 使用的广告预算 | ≤400 万美元 |
| 使用的计划预算 | ≤100 万美元 |
| 使用的电视广告时段 | ≤5 |

图 4.1 中的 8～9 行和 C13:C15 表示了这些约束条件。单元格 C8:E9 给出了每种活动每一单位的广告预算量和计划预算量，也就是电视广告、杂志广告和星期天增刊各自的使用量。

表格中的单元格 C4、D4、E4 给出了每一活动每一单位对总绩效评估的贡献(广告受众期望量)。

## 资源分配问题的特点

对每一个活动，需要作出活动数量的决策，也就是要确定活动水平。

其他资源分配问题有着与超级食品公司问题同样的特点。在每个例子中都有需要对活动水平作出决策的活动。每个活动对总绩效评估的贡献与活动水平成正比例关系。通常，用总利润作为绩效评估，有时也可以是其他指标(比如超级食品公司问题)。

这三类数据对任何一个资源分配问题都是必需的。

每一个这样的问题都对资源有资源限制。资源使用量取决于活动水平。对每一种资源，使用量与活动水平成正比。

经理或管理团队在研究资源分配问题时，需要借助于外部力量来收集以下三类数据：

1. 每种资源的可供量。
2. 每一种活动所需要的各种资源的数量，对于每一种资源与活动的组合，单位活动所消耗的资源量必须首先估计出来。
3. 每一种活动对总的绩效测度的单位贡献。

收集数据实际上需要很大的工作量。为了获得最准确且及时的数据需要进行一系列的数据挖掘与调研活动，这一步是至关重要的，因为，参数的估计准确与否将直接影响指导管理决策的线性规划模型是否有效。而在参数估计可能不准的情况下，what-if 分析(第 5 章)就显得尤为重要。这就是 what-if 分析之所以成为线性规划一个重要部分的原因。

## 伟恩德玻璃公司产品组合问题

在 2.2 节中，伟恩德玻璃制品公司的管理层所面临的产品组合问题是，如何为两种新产品制定生产率，以使得产品组合可获得最大的利润，同时，必须考虑公司三个工厂有限的剩余生产能力。这是一个资源分配问题。

所考虑的活动为：

活动 1：生产新型专用门
活动 2：生产新型专用窗

所制定的决策是决定活动水平,也就是生产门窗的生产率。生产率通过每周生产的门窗数量来测量。管理者的目标是使两种新产品带来的利润最大化,因此总绩效评估即是以总利润来测量的。每种产品对利润的贡献与产品的生产率成正比。

分配给这些活动的有限资源为:

资源 1:工厂 1 的生产能力
资源 2:工厂 2 的生产能力
资源 3:工厂 3 的生产能力

在 2.3 节建立线性规划模型的函数约束均为资源约束(见图 2.3 或 2.4 的表格的 7 ~ 9 行)。E 列表示每个工厂使用的生产能力,G 列给出可使用的数量。

2.2 节中的表 2.1 给出了该问题所需的数据。读者在前面已经看到表 2.1 的数据如何转换成电子表格形式(2.3 节)和代数形式(2.4 节)线性规划问题的参数。

## 资金预算

财务规划(financial planning)是资源分配线性规划问题最重要的应用领域之一。这一领域中所分配的资源完全不同于那些生产规划(production planning)领域的生产设备等资源(如伟恩德玻璃制品公司的产品组合问题)。在财务规划问题中,所分配的资源通常为财务资产(financial assets),如现金、证券、应收账款,银行存款等等。此处所举的资金预算例子所包含的有限资源为在各个时点上可用于投资的资金。

**问　题**

梦大(Think-Big)发展公司是商务房地产开发项目的主要投资商。目前,该公司有机会在三个建设项目中投资:

项目 1:建造高层办公楼
项目 2:建造宾馆
项目 3:建造购物中心

每一个项目都要求投资者在四个不同的时期投资:在当前预付定金,以及一年、二年、三年后分别追加投资。表 4.2 显示了四个时期每个项目可以从所有的投资者那里获得的总的投资资金。因此,按投资者投资项目的一定百分比,投资者必须支付表中所示资金的对应百分比的数目。

**表 4.2　梦大发展公司部分投资项目的财务数据**

| 年　份 | 所需投资资金(百万美元) | | |
|---|---|---|---|
| | 办公楼项目 | 宾馆项目 | 购物中心项目 |
| 0 | 40 | 80 | 90 |
| 1 | 60 | 80 | 50 |
| 2 | 90 | 80 | 20 |
| 3 | 10 | 70 | 60 |
| 净现值 | 45 | 70 | 50 |

从长期来看,这三个项目都是极为有利可图的,因此,梦大公司的管理层希望能尽量多地在几个或所有的项目中投资。公司希望能在目前阶段就明确公司未来的投资数量,以及

未来三年预期实现的追加投资。关键是在目前预测的回报率的基础上确定最有利可图的投资组合。

因为每一个项目都要在几年以后才能产生利润,并且盈利过程会持续多年,在评价项目的盈利性时,就不得不考虑货币的时间价值。这可以通过将未来的现金流出(投资资金)与现金流入(收入)折现,并将现金流相加,计算出项目的净现值(net present value)。

基于未来现金流的估计值,每一个项目的净现值估计值如表 4.2 的最底行所示。所有的投资者,包括梦大公司,将以其各自的投资比例来分配这一净现值。

主要的投资者,如梦大公司,将在各期对每一项目投资一定的百分比,成为项目的投资伙伴。假如梦大公司投资项目建造办公楼的 10%,那就意味着他必须现在提供 400 万美元,且在今后的三年中分别投入 600 万美元、900 万美元、100 万美元。

公司目前有 2500 万美元资金可供投资,预计一年后,又可获得 2000 万美元,两年后获得另外的 2000 万美元,三年后 1500 万美元以供投资。那么,梦大公司要在每个项目中投资多少百分比,才能使其投资组合获得最大的总净现值呢?

**建　模**

这是一个资源分配问题,所考虑的活动为:

活动 1:投资建造办公楼项目
活动 2:投资建造宾馆项目
活动 3:投资建造购物中心项目

因此所要制定的活动水平决策是确定每一个项目的投资百分比。每一项投资都可以用分数或百分比形式表示,所以一个项目被视为一个活动单位。

分配给这些活动的有限资源是公司在各期可获得的资金。前一期尚未使用的资金,可以在下一期使用(为了简化问题,不考虑资金可获得的利息)。因此,每一时点的资源限制都必须表现为累计的资金。

资源 1:现在可获得的总投资资金
资源 2:一年后可获得的累计的投资资金
资源 3:两年后可获得的累计的投资资金
资源 4:三年后可获得的累计的投资资金

因为现在可用的资金数量是 2500 万美元,一年后又有 2000 万美元,两年后又有 2000 万美元,三年后再有 1500 万美元,所以可用资源数量如下所示:

资源 1:可用数量 = 2500 万美元
资源 2:可用数量 = (2500 万 + 2000 万)美元 = 4500 万美元
资源 3:可用数量 = (2500 万 + 2000 万 + 2000 万)美元 = 6500 万美元
资源 4:可用数量 = (2500 万 + 2000 万 + 2000 万 + 1500 万)美元 = 8000 万美元

表 4.3 显示了与这些资源有关的数据。最右列给出了上面计算得到的可用资源量。中间列显示了在表 4.2 中列出的累计投资资金需要量。比如在表 4.3 中的办公楼一列第二个数字(1 亿美元)是通过加总表 4.2 中办公楼列的第一和第二个数字(4000 万美元和 6000 万美元)获得的。

PDG

**表 4.3　梦大公司发展公司的投资组合问题资源数据表**

| 资　源 | 每种活动累计资金需求量（百万美元） | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 办公楼项目 | 宾馆项目 | 购物中心项目 | 可获得资源数 |
| 1（现在） | 40 | 80 | 90 | 25 |
| 2（1 年后） | 100 | 160 | 140 | 45 |
| 3（2 年后） | 190 | 240 | 160 | 65 |
| 4（3 年后） | 200 | 310 | 220 | 80 |

**数　据**

对任何资源分配问题，有三种数据必须收集。第一是可用资源的数量，正如表 4.3 中最右列给出的。第二是每一个工程需要的资源数量，这在表格的中间列给出。第三是每一个工程对绩效评估的贡献（净现值），如表 4.2 中最后一行给出的。

建模的第一步就是要在数据单元格中输入数据。在图 4.2 中，数据单元格分别是净现值（C5:E5）、需要资金（C9:E12）、可用资金（H9:H12）。为了节省电子表格上的空间，这些数据以百万美元为单位。

**决　策**

考虑到有三种活动，必须有三个决策量：

决策 1：OB = 办公楼项目中的投资比例
决策 2：H = 宾馆项目中的投资比例
决策 3：SC = 购物中心项目中的投资比例

比如如果梦大管理者决定在每个项目中的投资比例为 10%，那么：

OB = 0.1 = 10%
H = 0.1 = 10%
SC = 0.1 = 10%

但是，在每个项目中投入一样的投资比例（无论用分数或百分比表示）不是最明智的选择，所以我们要选择最佳的 OB、H、SC 的组合。在图 4.2 中，投资比例数据（用百分比表示）将放在数据单元格（第 16 行）相应的三个项目栏下的可变单元格中，如下所示：

OB →单元格 C16　　H →单元格 D16　　SC →单元格 E16

这些单元格总和起来命名为投资比例（C16:E16）。

**限制条件**

可变单元格中的数必须为非负才有意义，因此在 Solver 对话框中要有非负的约束条件。此外，还有四种资源的限制条件（可获得的资金，百万美元）：

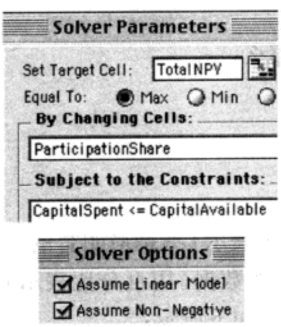
现期的总投资 ≤25
一年后的总投资 ≤45
二年后的总投资 ≤65
三年后的总投资 ≤80

C、D 和 E 栏的数据（以百万美元为单位）表示为：

现期的总投资　= 40 OB + 80 H + 90 SC
一年后的总投资 = 100 OB + 160 H + 140 SC
二年后的总投资 = 190 OB + 240 H + 160 SC
三年后的总投资 = 200 OB + 310 H + 220 SC

图 4.2 右下角表示输出单元格使用资金(F9:F12)要使用 SUMPRODUCT 函数。最后，G 栏的≤符号表示输入 Solver 对话框中的资源限制条件。

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Think-Big Development Co. Capital Budgeting Program | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | Office | | Shopping | | | |
| 4 | | | Building | Hotel | Center | | | |
| 5 | | Net Present Value | 45 | 70 | 50 | | | |
| 6 | | ($millions) | | | | Cumulative | | Cumulative |
| 7 | | | | | | Capital | | Capital |
| 8 | | | Cumulative Capital Required ($millions) | | | Spent | | Available |
| 9 | | Now | 40 | 80 | 90 | 25 | ≤ | 25 |
| 10 | | End of Year 1 | 100 | 160 | 140 | 44.76 | ≤ | 45 |
| 11 | | End of Year 2 | 190 | 240 | 160 | 60.58 | ≤ | 65 |
| 12 | | End of Year 3 | 200 | 310 | 220 | 80 | ≤ | 80 |
| 13 | | | | | | | | |
| 14 | | | Office | | Shopping | | | Total NPV |
| 15 | | | Building | Hotel | Center | | | ($millions) |
| 16 | | Participation Share | 0.00% | 16.50% | 13.11% | | | 18.11 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| CapitalAvailable | H9:H12 |
| CapitalRequired | C9:E12 |
| CapitalSpent | F9:F12 |
| ParticipationShare | C16:E16 |
| NetPresentValue | C5:E5 |
| TotalNPV | H16 |

| | F |
|---|---|
| 6 | Cumulative |
| 7 | Capital |
| 8 | Spent |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:E9,ParticipationShare) |
| 10 | =SUMPRODUCT(C10:E10,ParticipationShare) |
| 11 | =SUMPRODUCT(C11:E11,ParticipationShare) |
| 12 | =SUMPRODUCT C12:E12,ParticipationShare) |

| | H |
|---|---|
| 14 | Total NPV |
| 15 | ($millions) |
| 16 | =SUMPRODUCT(NetPresentValue,ParticipationShare) |

**图 4.2　梦大公司问题的电子表格模型，包括目标单元格总净现值(H16)和其他输出单元格使用资金(F9:F12)的公式，以及其他关于求解需要的详细说明。可变单元格投资比例(C16:E16)显示了规划求解软件求出的最优解。**

### 绩效的测度

该问题的目标是：

$$\text{最大化} \quad NPV = \text{总投资净现值}$$

净现值(C5:E5)显示了每个项目的净现值，而投资比例(C16:E16)显示了各投资每 1 百分比的净现值，因此三个项目的总的净现值为(以百万美元为单位)

$$NPV = 45\ OB + 70\ H + 50\ SC$$

=SUMPRODUCT(净现值,投资比例)
→单元格 H16

**建模的总结**

上面完成的线性规划建模,可归纳为如下代数形式的线性规划模型:

$$\text{最大化} \quad NPV = 45\ OB + 70\ H + 50\ SC$$

约束条件

现期的总投资：　40 OB + 80 H + 90 SC≤25
一年后的总投资:100 OB + 160 H + 140 SC≤45
二年后的总投资:190 OB + 240 H + 160 SC≤65
三年后的总投资:200 OB + 310 H + 220 SC≤80

且

$$OB \geq 0 \qquad H \geq 0 \qquad SC \geq 0$$

所有数据均以百万美元为单位。

注意,该模型显示了所有资源分配问题的共性,即所有的函数约束均为资源约束,并具有如下的形式:

使用的资源的数量≤可获得的资源的数量

**求解模型**

图 4.2 左下角显示了描述模型必须输入 Solver 中的说明以及两个必须选择的选项。模型的最优解在电子表格的第 16 行给出,最优解如下所示:

不投资办公楼项目
在宾馆项目中投资 16.50% 份额
在购物中心项目中投资 13.11% 份额

总净现值单元格(H16)表明该投资计划可产生 1811 万美元的总净现值。

这个数值只是对总净现值的一个估计,它取决于表 4.2 中的数据正确与否。对建造三个项目的费用并不十分确定,因此各年所需的投资资金也许会与表中显示的数据有出入。因为项目中的风险因素,各个项目的净现值也可能与表格底部给出的不同。下一章中我们介绍一种方法来分析这些偏差。第 15 章和第 16 章会介绍另一种方法,称为计算机模拟,来系统地将未来不确定性纳入考虑范围。16.5 节会对该案例进行进一步分析。

## 资源约束的扩展

以上资源分配案例中使用了一系列的资源:用于广告和规划的资金分配,可购买的电视广告时段,不同工厂可使用的生产能力,一定时期累计的投资资金。然而,这些资源与资源分配活动所有可能涉及的资源种类相比,简直是冰山的一角。从广义的资源角度来说,对决策的任何限制条件,如果是以下面的形式出现:

使用的数量≤可获得的数量

都可以认为是资源约束,所对应的数量有限的事物,即为“资源”。因此,既然任何包含≤的

函数约束的线性规划都可以用这种形式表示,那么,任何这种形式的限制,都可认为是资源限制。

今后,凡是线性规划模型中出现带有≤符号的约束函数,我们均认为是资源约束问题。方程式右边的常数为可利用的资源数量,左边代表该资源的使用量。在约束问题的代数形式中,每一种决策变量的系数(正或负)是指相应活动的每单位资源使用量。

### 资源分配问题的建模步骤总结

上面的三个例子都表明资源分配问题的解决必须要经过以下步骤来定义问题、收集数据以及建立线性规划模型。

1. 因为任何线性规划问题都是要寻找各种活动水平的最佳组合,因此,首先必须确认问题的活动类型,问题的决策也就是决定各种活动的水平。
2. 从管理的角度,明确合适的绩效测度以求解问题(通常为利润或利润的替代测度)。
3. 估计每一种活动对于总绩效测度的单位贡献。
4. 明确分配给各种活动的有限资源。
5. 对于每一种资源,明确可获得的数量以及各种活动的单位使用量。
6. 将在第3步与第5步所收集的数据输入电子表格的数据单元格,为了方便使用,可以在活动栏与可获得的资源栏之间要保留两个空栏的参数表。
7. 指定可变单元格来显示活动水平的决策量。
8. 在第6步中产生了两个空栏,左边一栏作为输出单元格的总数栏,右边一栏为所有的资源输入≤符号。在表示资源的每一行中,使用 SUMPRODUCT 函数,在总数栏中输入使用的总量。
9. 指派目标单元格以显示总的绩效测度。使用 SUMPRODUCT 函数来输入总的绩效测度。

电子表格里线性规划模型的所有函数约束均为资源限制,即包含≤符号的限制条件,这就是资源分配问题的共性。

### 问题回顾

1. 资源分配问题的共性是什么?
2. 资源限制的形式如何?
3. 为解决资源分配问题,必须收集哪三类数据 ?
4. 比较三个资源分配例子中活动的类型。
5. 比较三个资源分配例子中资源的类型。

## 4.3 成本收益平衡问题

成本收益平衡问题与资源分配问题的形式完全不同,这种差异主要是因为两种问题的管理目标(managerial objectives)不同而造成的。

在资源分配问题中,各种资源是受限制的因素(包括财务资源),问题的目标是(根据特

定的总绩效测度）最有效地利用各种资源。

而对于成本收益平衡问题，管理层采取更为主动的姿态，他们指明哪些收益必须实现（不管如何使用资源），并且要以最低的成本实现所指明的收益。这样，通过指明每种收益的最低可接受水平（minimum acceptable level），以及实现这些收益的最小成本，管理层期望获得成本与收益之间的适度的平衡（trade-off）（在第 5 章中读者还可以看到，what-if 分析在管理层选择成本与收益的最佳平衡时提供的附加信息发挥了至关重要的作用）。

**成本收益平衡问题**是一类线性规划问题，这类问题中，通过选择各种活动水平的组合，从而以最小的成本来实现最低可接受的各种收益水平。这类问题的共性是，所有的函数约束均为收益约束，并具有如下的形式：

完成的水平≥最低可接受的水平

如果将收益的含义扩大，所有以≥表示的函数约束均为收益约束。在多数情况下，最低可接受的收益水平是作为一项政策由管理层制定的，但有时这一数据也可能是由其他条件决定。

对于任何的成本收益平衡问题，大部分的工作将放在识别所有的活动和收益以及收集相关的数据上。

需要的三种数据：

> 对任何成本收益平衡问题都需要的三种数据。

1. 每种收益的最低可接受水平（管理决策）。
2. 每一种活动对每一种收益的贡献（单位活动的贡献）。
3. 每种活动的单位成本。

下面给出成本收益平衡问题的三个例子。

## 利博公司广告组合问题

如 2.7 节所述，利博公司将为三种清洁产品开展一次产品促销活动。可使用的两种广告为电视与印刷媒体。管理层已经明确了本次活动的最低的目标——每一产品销售增长的最低可接受量。

问题就是决定在每一媒体上广告的投入量，从而能以最小的成本实现所有的销售目标。

这一成本收益平衡问题所包含的活动为：

> 解决任何成本收益平衡问题的第一步是明确活动和收益。

活动 1：电视上的广告
活动 2：印刷媒体上的广告

通过这些活动要实现的收益为：

收益 1：喷雾去污剂的销售增加
收益 2：新的液体洗涤剂的销售增加
收益 3：传统洗衣粉的销售增加

管理者希望这些销售增长率分别至少达到 3%、18% 和 4%。如 2.7 节中所述，每一种收益都将有下限，因为管理层为每一种产品的销售增加都设置了最低可接受的增加水平。也就是：

收益 1 达到水平≥3%
收益 2 达到水平≥18%

收益 3 达到水平≥4%

这一问题的数据如 2.7 节中的表 2.2 所示，2.7 节描述了如何从这张表的数据出发直接建立线性规划模型。

这个例子与 4.1 节中作为资源分配问题的超级食品公司的案例形成了鲜明的对比，虽然两个都是广告组合问题，但它们的线性规划模型截然不同。这些差异主要是因为管理者对该问题重点的把握不同引起的。

- 作为超级食品公司的市场部副总裁，克莱略・希文生首先关注广告活动花费，然后设定形成资源限制的预算（广告预算 400 万美元，规划预算 100 万美元）
- 相反，利博公司的管理层，将重点放在通过这次广告活动必须收获多少，然后设定了形成收益限制的目标（销售增长最低量）

从这些比较可以看出，线性规划建模的类型并不是由应用决定，而是由作出决策的各种限制条件的性质所决定的。如果限制条件是针对资源的，那么这就是一个资源分配问题；如果限制是针对收益的目标水平，这个问题就是成本收益平衡问题。限制条件的性质往往是由管理层来确定的。

然而，我们并不能要求每一问题都正好是两种类型中的一种。在前面一节和本节中，我们可看到纯资源分配问题与纯成本收益平衡问题。尽管许多实际问题是这两种问题当中的一种，但更多的是既包含资源限制又有收益限制的问题，虽然其中的一种可能占主要地位。此外，我们在下一节还需考虑另一种线性规划问题（网络配送问题），这种类型所特有的限制条件在一些问题中也会经常出现。包含三种类型的混合问题将在第 4.6 节中介绍。

现在，我们看一个纯成本收益平衡问题。

## 工作人员排程

在 2.1 节中介绍的线性规划的一大应用是用于联合航空公司的工作人员排程。通过排程，公司每年节省开支超过 600 万美元。排程的一部分是为主要机场的客户服务代理商安排每周工作时间表，因为在主要机场，一天之中不同时间的航班数有很大的偏差，这些偏差会使得在前半个小时所需的代理商与后半小时的有很大的波动。

这里，我们将提供同种应用的一个大大简化了的"教学案例"。在我们的简化例子中，仅考虑每日(daily)的工作进度表，包括两小时或更长时间的间隔。不过，这个例子还是可以让你大致了解到联合航空公司是如何解决这一问题的。该例子向你展示收益限制在这一类问题中的主要作用。

**问　题**

联邦航空公司正准备增加其中心机场的往来航班，因此需要雇用更多的客户服务代理商，但是不知道到底要雇用多少数量的代理商。管理层意识到在向公司的客户提供令人满意的服务水平的同时必须进行成本控制，因此，必须寻找成本与收益之间合意的平衡。于是，要求管理团队研究如何规划人员才能以最小的成本提供令人满意的服务。

分析研究新的航班时间表，以确定一天之中不同时段为实现客户满意水平必须工作的代理商数目。在表 4.4 的最后一栏显示了这些数目，其中第一列给出对应的时段。表中的其他数据反应了公司与客户服务代理商协会所定协议上的一项规定，这一规定要求每一代理商工作 8 小时为一班，各班的时间安排如下：

轮班 1:6:00 AM ~ 2:00 PM
轮班 2:8:00 AM ~ 4:00 PM
轮班 3:中午 ~ 8:00 PM
轮班 4:4:00 PM ~ 午夜
轮班 5:10:00 PM ~ 6:00 AM

**表 4.4　联邦航空公司人员排程问题的数据**

| | 轮班的时段 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 时　段 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 最少需要代理商的数量 |
| 6:00AM ~ 8:00AM | ✓ | | | | | 48 |
| 8:00AM ~ 10:00AM | ✓ | ✓ | | | | 79 |
| 10:00AM ~ 中午 | ✓ | ✓ | | | | 65 |
| 中午 ~ 2:00PM | ✓ | ✓ | ✓ | | | 87 |
| 2:00PM ~ 4:00PM | | ✓ | ✓ | | | 64 |
| 4:00PM ~ 6:00PM | | | ✓ | ✓ | | 73 |
| 6:00PM ~ 8:00PM | | | ✓ | ✓ | | 82 |
| 8:00PM ~ 10:00PM | | | | ✓ | | 43 |
| 10:00PM ~ 午夜 | | | | ✓ | ✓ | 52 |
| 午夜 ~ 6:00AM | | | | | ✓ | 15 |
| 每个代理商的每日成本(美元) | 170 | 160 | 175 | 180 | 195 | |

表 4.4 中打钩的部分表示这段时间是有相应轮班的。因为轮班之间的重要程度有差异,所以协议中工资也因轮班所处的时间而不同。每一轮班对代理商的补偿(包括收益)如最底行所示。问题就是,在最底行数据的基础上,确定将多少代理商分派到一天之中的各个轮班中去,以使得人员费用最小,同时,必须保证最后一栏中所要求的服务水平的实现。

**建　模**

这个问题实际上是一个纯成本收益平衡问题。为了建立模型,首先必须明确包含的活动和收益。

活动对应于各轮班
活动的水平就是分派到那一轮班的代理商数目
活动的一个单位是指分派到该轮班的一个代理商

因此,线性规划通常是寻找最优活动水平组合的问题,在这里,就可描述为确定最佳的轮班人数。

收益对应于时段
在每一时段里,活动的收益就是代理商所提供给客户的服务
收益的水平由那段时间在岗位的代理商的数目来衡量的

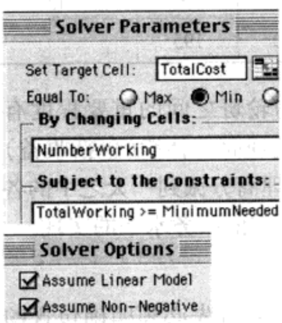
再次指出,问题的建模应包括收集参数表中的所有相关数据,只有在这样的基础上,才能直接建立电子表格模型。该模型如图 4.3 所示,下面将介绍建模的大致内容。

**数　据**

如图 4.3 所示,表 4.4 的数据直接就可以输入数据单元格每轮班成本(C5:G5)、轮班时

间段(C8:G17),最小需要(J8:J17)。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Union Airways Personnel Scheduling Problem** | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | 6AM–2PM | 8AM–4PM | Noon–8PM | 4PM–Midnight | 10PM–6AM | | | |
| 4 | | | Shift | Shift | Shift | Shift | Shift | | | |
| 5 | | Cost per Shift | $170 | $160 | $175 | $180 | $195 | | | |
| 6 | | | | | | | | Total | | Minimum |
| 7 | | Time Period | | Shift Works Time Period? (1=yes, 0=no) | | | | Working | | Needed |
| 8 | | 6AM–8AM | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 48 | ≥ | 48 |
| 9 | | 8AM–10AM | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 79 | ≥ | 79 |
| 10 | | 10AM–12PM | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 79 | ≥ | 65 |
| 11 | | 12PM–2PM | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 118 | ≥ | 87 |
| 12 | | 2PM–4PM | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 70 | ≥ | 64 |
| 13 | | 4PM–6PM | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 82 | ≥ | 73 |
| 14 | | 6PM–8PM | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 82 | ≥ | 82 |
| 15 | | 8PM–10PM | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 43 | ≥ | 43 |
| 16 | | 10PM–12AM | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 58 | ≥ | 52 |
| 17 | | 12AM–6AM | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 15 | ≥ | 15 |
| 18 | | | | | | | | | | |
| 19 | | | 6AM–2PM | 8AM–4PM | Noon–8PM | 4PM–Midnight | 10PM–6AM | | | |
| 20 | | | Shift | Shift | Shift | Shift | Shift | | | Total Cost |
| 21 | | Number Working | 48 | 31 | 39 | 43 | 15 | | | $30,610 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| CostPerShift | C5:G5 |
| MinimumNeeded | J8:J17 |
| NumberWorking | C21:G21 |
| ShiftWorksTimePeriod | C8:G17 |
| TotalCost | J21 |
| TotalWorking | H8:H17 |

| | H |
|---|---|
| 6 | Total |
| 7 | Working |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:G8,NumberWorking) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:G9,NumberWorking) |
| 10 | =SUMPRODUCT(C10:G10,NumberWorking) |
| 11 | =SUMPRODUCT(C11:G11,NumberWorking) |
| 12 | =SUMPRODUCT(C12:G12,NumberWorking) |
| 13 | =SUMPRODUCT(C13:G13,NumberWorking) |
| 14 | =SUMPRODUCT(C14:G14,NumberWorking) |
| 15 | =SUMPRODUCT(C15:G15,NumberWorking) |
| 16 | =SUMPRODUCT(C16:G16,NumberWorking) |
| 17 | =SUMPRODUCT(C17:G17,NumberWorking) |

| | J |
|---|---|
| 20 | Total Cost |
| 21 | =SUMPRODUCT(CostPerShift,NumberWorking) |

**图4.3** 联邦航空公司的电子表格模型,包括目标单元格总成本(J21)和其他输出单元格总工时(H8:H17)里的公式和建立规划求解软件所需的规定。可变单元格工作数量(C21:G21)显示了该问题的最优解。

## 决 策

因为该例子的各活动对应于五个轮班,可作出如下的决策:

$S_1$ = 分派到轮班 1 的代理商(从 6AM 开始)

$S_2$ = 分派到轮班 2 的代理商(从 8AM 开始)

$S_3$ = 分派到轮班 3 的代理商(从中午开始)

$S_4$ = 分派到轮班 4 的代理商(从 4PM 开始)

$S_5$ = 分派到轮班 5 的代理商(从 10PM 开始)

存放这些数据的可变单元格在 21 行的活动栏:

$S_1$→单元格 C21　　$S_2$→单元格 D21　…　$S_5$→单元格 G21

**约　束**

这些可变单元格必须是非负的。此外,有 10 个收益约束条件,每一个约束表示在相应的时间段(B 栏所示)在岗位上的代理商必须不少于 J 栏要求的最少可接受数目,这些约束为:

6~8 AM 之间的总的代理商数　≥48(最低可接受水平)
8~10 AM 之间的总的代理商数　≥79(最低可接受水平)

·
·
·

午夜~6AM 之间的总的代理商数 ≥15(最低可接受水平)

因为 C 到 G 栏显示了每一时段的轮班,这些总量可表示为

6~8AM 之间的总的代理商数　$=S_1$
8~10AM 之间的总的代理商数　$= S_1 + S_2$

·
·
·

午夜~6 AM 之间的总的代理商数 $= S_5$

通过使用 SUMPRODUCT 函数,将这些总数输入总工时输出单元格总工时(H8:H17),如图 4.3 的下部所示。

**绩效的测度**

问题的目标是:

最小化　成本=所有代理商每日总人力成本

因为每轮班成本(C5:G5)给出了每一轮班上代理商的每日成本,工作数量(C21:G21)给出了每轮班的代理商数目:

成本 $=170S_1+160S_2+175S_3+180S_4+195S_5$(以美元为单位)
=SUMPRODUCT (每轮班成本,工作数量)
→单元格 J21

**建模的总结**

通过上述的步骤,建立了完整的电子表格线性规划模型,这一模型以代数的形式可表示如下:

最小化　成本 $=170S_1+160S_2+175S_3+180S_4+195S_5$(以美元为单位)

约束条件

6~8AM 之间的总的代理商数: $S_1 \geq 48$

8 ~10AM 之间的总的代理商数：$S_1 + S_2 \geq 79$

·

·

·

午夜 ~6AM 之间的总的代理商数：$S_5 \geq 15$

且

$$S_1 \geq 0 \quad S_2 \geq 0 \quad S_3 \geq 0 \quad S_4 \geq 0 \quad S_5 \geq 0$$

**求解模型**

通过在图 4.3 左下角的 Solver 对话框中输入相关的内容，并选择两个选项，就可以使用 Solver 来求解。电子表格的单元格工作时间(C21:G21)显示了该问题的最优解，即每一轮班所指派的代理商的数目，单元格总成本(J21)显示该计划每天的成本为 30610 美元。

## 控制空气污染

下一个例子是在下一章最后提到的案例 5.2，在这里先预览一下，而不给出问题详尽的描述与数据，只是介绍一下大概，然后，将重点放在现在讨论的主题上，即说明收益与收益限制是如何产生出成本收益平衡(cost-benefit-trade-off)问题的。

N&L 公司是世界上同类行业中主要的钢铁制造商，然而，从工厂的熔炉中排放出的气体因未加治理，正严重地威胁到附近居民的身体健康。公司与政府官员曾共同为该地区的大气排放制定了严格的气体质量标准。这一标准将要求公司减少三种主要污染气体的年排放量，分别为：微尘减少 6000 万磅，二氧化硫减少 15000 万磅，碳氢化合物减少 12500 万磅。公司的工程师分析了多种消除污染的方法，以一个单位为基础，分析各种方法可能的成本与减少三种污染气体的排放量，从而清楚地认识到，其中的一些消除污染的方法必须组合使用才能最有效地解决问题。因此，他们的管理团队正在研究如何确定最优的方法组合(best mix)，才能以最小的成本实现三种污染气体所要求减少的年排放量。

这是一个成本收益平衡问题。

活动(activities)是各种消除污染的方法
活动的收益(benefits)是所实现的三种污染气体排放量的减少
收益的水平(level)是三种污染气体每年减少的排放量(以百万磅为单位)

该问题有三个收益约束(对应于每一种气体)，如下所示：

微尘：　　减少量 $\geq 60$
氧化硫：　减少量 $\geq 150$
碳氢化合物：减少量 $\geq 125$

读者可以试着描述这些约束条件以及线性规划模型的其他部分，这些将是案例 5.2 的一部分。

成本收益平衡问题中，在建立线性规划模型之前，还只能试验性地指定收益的最低可接收水平，管理层真正想要获得的是成本与收益之间最优的平衡，但只有在确定了各种收益水平的成本之后，才能明确最低可接收的收益水平。因此，在通过最初的模型获得最优解和对应的总成本之后，必须进行 what-if 分析，研究最低可接受的收益水平变化所带来的成本的变化。如果增加收益水平时，边际成本(总成本的变化率)很小，那么，增加收益水平可获得

更好的平衡。相反,如果边际成本很大,那么,最好降低收益的最低可接收水平。从本质上讲,选择最优的成本与收益的平衡是一个管理上的判断决策问题,而这一问题可通过 what-if 分析所提供的信息的指导来解决。

N&L 公司寻找成本与收益最优平衡的过程是案例 5.2 的重点。

### 成本收益平衡问题建模步骤的总结

成本收益平衡问题建模的 9 大步骤与前一节最后所归纳的资源分配问题的建模过程在形式上是一致的,因此,这里就不再重复。两者的主要区别在于总绩效测度不同。在成本收益平衡问题中,第 2 步与第 3 步中的绩效测度是活动的总成本(或者是管理层所指定的其他总成本的代替指标),在第 4 步、第 5 步中,收益取代了资源,而在第 8 步中,收益输出单元格右边输入的是≥符号。

相应地,成本收益平衡模型中所有的函数限制均为收益限制,即以≥符号表示的限制条件,这是纯成本收益平衡问题的共性。

### 问题回顾

1. 资源分配问题与成本收益平衡问题在管理目标上的差异是什么?
2. 成本收益平衡问题的共性是什么?
3. 收益限制的形式如何?
4. 为解决成本收益平衡问题必须收集的三类数据包括哪些?
5. 比较成本收益平衡问题三个例子中活动的类型。
6. 比较成本收益平衡问题三个例子中收益的类型。

## 4.4　网络配送问题

下面将介绍第三类线性规划问题——网络配送问题,这类问题通过配送网络(distribution network)能以最小的成本完成货物的配送,所以称之为网络配送问题。2.1 节中 Citgo 石油集团的供应、配送和营销 (SDM)建模系统就是一个例子,该系统为公司每年节省 1650 万美元。

网络配送问题将在第 6 章、第 7 章中重点介绍。在此先举一个小例子,以便读者对线性规划问题的各种主要类型有一个较全面的认识。

在这个例子中,读者可以看到一类新的限制条件——确定需求的约束(fixed-requirement constraints)。这类约束是网络配送问题的共性,如同资源分配问题中的资源限制、成本收益平衡问题的收益限制,确定的需求限制在网络配送中占重要的地位。因此,与确定资源与收益一样,在网络配送问题中,必须确定需求以及相应地确定需求的约束条件。

确定需求的约束在其他一些类型的线性规划问题中也会出现,在下面两节中将会介绍这些内容。

### 通过配送网络配送货物

**问　题**

大 M 公司在两个工厂生产一系列重型机器。产品之一是大型车床。现在收到 3 个顾

客的下月订单要购买大型车床。这些车床会被单独运送,表 4.5 显示了从每个工厂到每个顾客的运送一台车床的成本。该表同样表明了每个顾客的订货量和每个工厂的生产量。现在公司的物流经理要决定从每个工厂运送多少台车床到每个顾客那里才能使总成本最小。

**表 4.5 大 M 公司网络配送问题的一些数据**

| 至 / 从 | 单位运输成本(美元) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 顾客 1 | 顾客 2 | 顾客 3 | 运出 |
| 工厂 1 | 700 | 900 | 800 | 12 单位 |
| 工厂 2 | 800 | 900 | 700 | 15 单位 |
| 订货量 | 10 单位 | 8 单位 | 9 单位 | |

图 4.4 表示了该网络配送问题。这个网络忽略了工厂和顾客的地理分布而只是将两个工厂排在左列,将顾客排在右列。每一箭头表示该配送网络的一条运输路线。

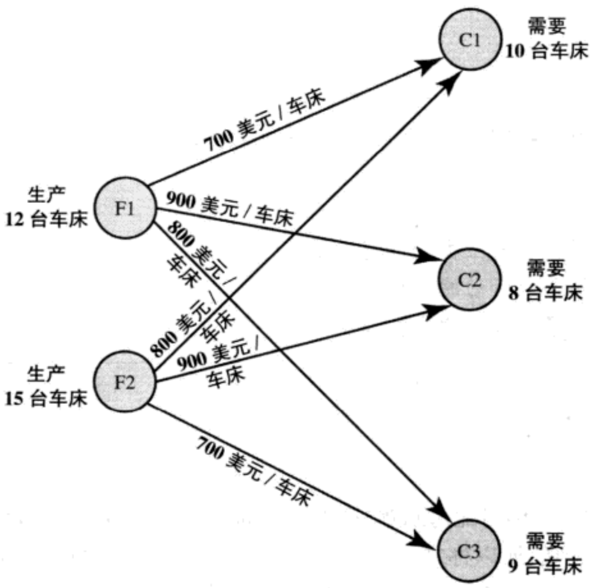



图 4.4 大 M 公司问题的配送网络

**问题的线性规划建模**

为了对该问题进行建模描述,首先必须明确这一网络配送问题的活动与需求(activities and requirements)。在该例中,涉及两类活动——两个工厂产品的生产(production)以及沿各条路线产品的运输(shipping)。但是,这里各个工厂的产量已经给定,因此生产活动上不需要作决策。要决策的是运输活动(shipping activities)的水平,即通过每一条路线的运输量是多少,因此,在线性规划建模时,将重点放在运输活动上。

活动(activities)对应于图 4.4 箭头所描述的运输路线

活动的水平(level)是指每条路线上的运输量

与其他线性规划问题要寻找最优的活动水平一样,本例所要解决的是各条路线最优的运输量组合(best mix of shipping amount)。这些决策可表示为:

$S_{F1-C1}$ = 从工厂 1 运输到顾客 1 的车床数量

$S_{F1-C2}$ = 从工厂 1 运输到顾客 2 的车床数量
$S_{F1-C3}$ = 从工厂 1 运输到顾客 3 的车床数量
$S_{F2-C1}$ = 从工厂 2 运输到顾客 1 的车床数量
$S_{F2-C2}$ = 从工厂 2 运输到顾客 2 的车床数量
$S_{F2-C3}$ = 从工厂 2 运输到顾客 3 的车床数量

在电子表格中要有 6 个可变单元格来存放上面的 6 个数据

问题的目标是:

最小化　成本 = 运输所需车床的最小成本

代入表 4.5 所表示的运输成本:

$$成本 = 700S_{F1-C1} + 900S_{F1-C2} + 800S_{F1-C3} + 800S_{F2-C1} + 900S_{F2-C2} + 700S_{F2-C3}$$

成本是以美元为单位的数据,并将它输入到目标单元格(在下文会介绍,这里将使用 SUMPRODUCT 函数)。

解决任何配送网络问题的第一步都是明确活动和确定的限制。

建立电子表格模型需要 5 个限制条件,包括需求确定的限制。表 4.5 和图 4.4 都将显示该问题的需求约束。

需求 1:从工厂 1 运出的车床数量必须为 12 个单位。
需求 2:从工厂 2 运出的车床数量必须为 15 个单位。
需求 3:运往顾客 1 的车床数量必须为 10 个单位。
需求 4:运往顾客 2 的车床数量必须为 8 个单位。
需求 5:运往顾客 3 的车床数量必须为 9 个单位。

因此,图 4.4 的网络配送图中的每一个位置都有其需求约束。每一个位置都有其需求约束是配送网络问题的普遍特征。

五个需求约束都可以如以下形式表示:

提供的数量 = 需求的数量

例如,需求 1 可以表示为下面的代数形式:

$$S_{F12-C1} + S_{F12-C2} + S_{F12-C3} = 12$$

左式表示从工厂 1 运出的产品的总量,而 12 是从工厂 1 运出的需求量。因此,该等式限制了 $S_{F1-C1}$、$S_{F1-C2}$与 $S_{F1-C3}$的值,使三者之和为 12。相对与资源限制的 ≤ 符号,以及收益限制的 ≥ 符号,确定需求的限制条件以等式表示。

线性规划中确定需求的限制是以"="表示的等式,每一种这样的限制都可以解释为一定数量的确定的需求:

提供的数量 = 需要的数量

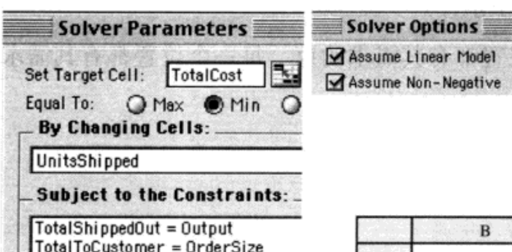
纯网络配送问题的特点之一就是其模型的主要函数约束是确定需求的约束。但是,其他类型的线性规划问题也可能包含这一类型的约束条件。

**电子表格建模**

为建立模型做准备,我们前面已经解决了一系列问题,包括明确必须作出决策的因素、决策的限制条件、总的绩效测度,以及收集表 4.5 所示的重要数据。这些信息都显示在图

4.5所示的电子表格上。数据单元格包括运输费用(C5:E6)、产量(H11:H12)、订货量(C15:E15)存放了表4.5的所有数据。可变单元格是运输量(C11:E12),提供了通过每条路线运量的决策数量。输出单元格是总运出量(F11:F12)和总运往顾客量(C13:E13),这些单元格中的SUMPRODUCT函数如图4.5右下角所示。约束条件是总运出量要等于产量,总运往顾客量要等于订货量。在电子表格中已经表明这些约束条件,在Solver对话框中输入了这些约束条件。目标单元格总成本(H15)用SUMPRODUCT函数表示出了运输的总成本。Solver对话框显示了问题的目标是使总成本最小。最后,与以前一样,Solver中的两个选项必须选择,从而规定这是一个线性规划模型,约束条件是非负的。

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Big M Company Distribution Problem | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | Shipping Cost | | | | | | |
| 4 | | (per Lathe) | Customer 1 | Customer 2 | Customer 3 | | | |
| 5 | | Factory 1 | $700 | $900 | $800 | | | |
| 6 | | Factory 2 | $800 | $900 | $700 | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | Total | | |
| 9 | | | | | | Shipped | | |
| 10 | | Units Shipped | Customer 1 | Customer 2 | Customer 3 | Out | | Output |
| 11 | | Factory 1 | 10 | 2 | 0 | 12 | = | 12 |
| 12 | | Factory 2 | 0 | 6 | 9 | 15 | = | 15 |
| 13 | | Total to Customer | 10 | 8 | 9 | | | |
| 14 | | | = | = | = | | | Total Cost |
| 15 | | Order Size | 10 | 8 | 9 | | | $20,500 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| OrderSize | C15:E15 |
| Output | H11:H12 |
| ShippingCost | C5:E6 |
| TotalCost | H15 |
| TotalShippedOut | F11:F12 |
| TotalToCustomer | C13:E13 |
| UnitsShipped | C11:E12 |

| | F |
|---|---|
| 8 | Total |
| 9 | Shipped |
| 10 | Out |
| 11 | =SUM(C11:E11) |
| 12 | =SUM(C12:E12) |

| | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 13 | Total to Customer | =SUM(C11:C12) | =SUM(D11:D12) | =SUM(E11:E12) |

| | H |
|---|---|
| 14 | Total Cost |
| 15 | =SUMPRODUCT(ShippingCost,UnitsShipped) |

**图4.5** 大M公司问题的电子表格模型,包括目标单元格总成本(H15)和其他输出单元格总运出量(F11:F12)和总运往顾客量(C13:E13)中的公式和对Solver的一些规定。可变单元格运输量(C11:E12)显示了通过Solver求得的最优解。

图4.5电子表格的单元格运输量(C11:E12)显示了运用Solver得到的最优解,即通过每条路线的最优运量。单元格总成本(H15)显示了最优的条件下运输总成本为20500美元。

作为总结,下面给出该线性规划模型的代数形式:

最小化 成本 $=700S_{F1-C1}+900S_{F1-C2}+800S_{F1-C3}+800S_{F2-C1}+900S_{F2-C2}+700S_{F2-C3}$

约束条件:

1. 确定需求约束:

$$
\begin{aligned}
&S_{F1-C1}+S_{F1-C2}+S_{F1-C3} &&=12(\text{工厂}1)\\
&S_{F2-C1}+S_{F2-C2}+S_{F2-C3} &&=15(\text{工厂}2)\\
&S_{F1-C1}+S_{F2-C1} &&=10(\text{顾客}1)\\
&S_{F1-C2}+S_{F2-C2} &&=8(\text{顾客}2)\\
&S_{F1-C3}+S_{F2-C3} &&=9(\text{顾客}3)
\end{aligned}
$$

2. 非负约束

$S_{F1-C1}\geqslant0$　$S_{F1-C2}\geqslant0$　$S_{F1-C3}\geqslant0$　$S_{F2-C1}\geqslant0$　$S_{F2-C2}\geqslant0$　$S_{F2-C3}\geqslant0$

## 问题回顾

1. 为什么称这类问题为网络配送问题?
2. 网络配送问题的共性是什么?
3. 确定需求的约束与资源约束和收益约束的区别是什么?
4. 大 M 公司例子中确定的需求的数量是多少?

# 4.5　超级食品公司案例的再研究

下面我们将继续讨论 4.1 节中超级食品公司的案例。在前面讲到,公司市场部副总裁克莱略·希文生刚刚结束了与公司总裁大卫·斯隆讨论开展脆始这一产品促销活动的会议。在此次会议之前,G&J 广告公司提出了促销该产品最有效的三种广告媒体。然后克莱略建立了线性规划电子表格模型来决定如何在这三种媒介上投放广告使广告受众数量达到最大。在看了报告之后,发现提议中竟然没有使用电视广告,这就意味着一些重要的目标观众将被忽略,于是,大卫和克莱略认为这个模型是不完善的。

## 增加管理方面的考虑事项

因此,克莱略与大卫认为,电子表格模型必须增加一些考虑事项。因为该产品是迎合儿童的早餐谷类食品,他们认为必须将目标观众定位为儿童及他们的家长(这也是 G&J 广告公司建议在星期六上午的儿童节目中做广告的原因)。因此克莱略为此次活动定了下面两个目标:

目标 1:必须至少有 500 万儿童看到该广告

目标 2:必须至少有 500 万儿童的家长看到该广告

实际上,这两个目标就是广告活动收益的最低可接受水平。

收益 1:向儿童促销该早餐食品

收益 2:向儿童的家长促销该早餐食品

> 收益的约束条件可以将管理目标融入模型中。

现在,目标已经明确的表示出了,每一种收益的水平都将由相应的广告受众的数量来衡量。

为了建立相应的收益约束(如 4.3 节所示),克莱略要求 G&J 公司估计出每一单位的各种广告活动能给每一种收益创造的贡献,以所

能接触到的各类人的数量作为衡量的测度。这些估计在表 4.6 中给出。

**表 4.6 修正的超级食品公司广告组合问题的收益数据(单位:百万美元)**

| 目标群 | 到达各目标群的数量(单位:百万) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 电视广告 | 杂志广告 | 星期天增刊广告 | 最低可接受水平 |
| 儿童 | 1.2 | 0.1 | 0 | 5 |
| 儿童家长 | 0.5 | 0.2 | 0.2 | 5 |

尽管图 4.1 所示的最初的电子表格模型已经在某种程度上将这些因素考虑在内,管理层还是要求要特别地考虑这两种收益,这一点是很有意义的。如 4.1 节所示总的绩效测度是广告受众期望量,须加以最大化。这一测度指广告所能接触到的所有人群数量,包括目标群体。然而,最大化综合绩效测度并不能保证实现管理层(克莱略·希文生)所提出的两个目标。克莱略认为,这两个目标是活动能否成功的关键因素,因此,她补充了原先的综合目标,加入收益的约束条件,以确保这两个目标的实现。将收益约束加入模型以实现一定的管理目标,这是管理层的特权。

此外,克莱略还考虑了另外一点,她坚信商家优惠券(cents-off coupons)(购买者可以从广告上剪下优惠券,从而在购买所做广告的产品时享受一定优惠)所能起的促销作用。因此,每年她都会为实行这些优惠券政策而从营销预算中分配出一部分资金。今年,分配给优惠券的预算还有 1490000 美元剩余。考虑到脆始产品对公司的重要性,她决定将剩余的可用优惠券基金全部用于该产品的促销。

履行优惠券的确定的资金数量是一项确定的需求,应该表示为确定需求的约束条件(fixed-requirement constraint)。如 4.4 节中所描述的,对于一些类型的数据,确定需求的约束形式如下所示:

提供的数量 = 要求的数量

在本例中,所涉及的数据是提供给履行优惠券的资金的数量。为了将这一约束在电子表格中表达出来,必须估计每一种广告活动的每一单位所能实现要求数量的贡献。优惠券将在媒体 1(食品与家庭导向的杂志上的广告)和媒体 2(主要报纸的星期天增刊上的广告)中同时使用。每一种媒体上优惠券单位使用量的估计值如表 4.7 所示。

**表 4.7 超级食品公司以确定需求的约束修正的广告混合问题的数据(单位:美元)**

| 需　求 | 活动对需求数量的贡献 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 电视广告 | 杂志广告 | 星期天增刊广告 | 需求数量 |
| 优惠券 | 0 | 40000 | 120000 | 1490000 |

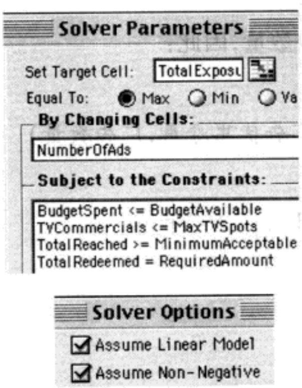
## 修正模型的电子表格建模

图 4.6 显示了在图 4.1 所示的最初的电子表格模型中增加管理方面的考虑事项,从而将原模型扩展的一种建模方式。下面列出了修正模型的四个主要组成部分。

**数　据**

增加的数据单元格每一广告到达的数量(C11:E12)、最小接受量(H11:H12)、优惠券(C15:E15)、需求量(H15)给出了表 4.6 和表 4.7 的数据。

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Super Grain Corp. Advertising-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | TV Spots | Magazine Ads | SS Ads | | | |
| 4 | | Exposures per Ad | 1,300 | 600 | 500 | | | |
| 5 | | (thousands) | | | | | | |
| 6 | | | | Cost per Ad ($thousands) | | Budget Spent | | Budget Available |
| 7 | | Ad Budget | 300 | 150 | 100 | 3,775 | ≤ | 4,000 |
| 8 | | Planning Budget | 90 | 30 | 40 | 1,000 | ≤ | 1,000 |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | | | Number Reached per Ad (millions) | | Total Reached | | Minimum Acceptable |
| 11 | | Young Children | 1.2 | 0.1 | 0 | 5 | ≥ | 5 |
| 12 | | Parents of Young Children | 0.5 | 0.2 | 0.2 | 5.85 | ≥ | 5 |
| 13 | | | | | | | | |
| 14 | | | TV Spots | Magazine Ads | SS Ads | Total Redeemed | | Required Amount |
| 15 | | Coupon Redemption | 0 | 40 | 120 | 1,490 | | 1,490 |
| 16 | | per Ad ($thousands) | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | Total Exposures |
| 18 | | | TV Spots | Magazine Ads | SS Ads | | | (thousands) |
| 19 | | Number of Ads | 3 | 14 | 7.75 | | | 16,175 |
| 20 | | | ≤ | | | | | |
| 21 | | Maximum TV Spots | 5 | | | | | |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| BudgetAvailable | H7:H8 |
| BudgetSpent | F7:F8 |
| CostPerAd | C7:E8 |
| CouponRedemptionPerAd | C15:E15 |
| ExposuresPerAd | C4:E4 |
| MaxTVSpots | C21 |
| MinimumAcceptable | H11:H12 |
| NumberOfAds | C19:E19 |
| NumberReachedPerAd | C11:E12 |
| RequiredAmount | H15 |
| TotalExposures | H19 |
| TotalReached | F11:F12 |
| TotalRedeemed | F15 |
| TVSpots | C19 |

| | F |
|---|---|
| 6 | Budget Spent |
| 7 | =SUMPRODUCT(C7:E7,NumberOfAds) |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:E8,NumberOfAds) |
| 9 | |
| 10 | Total Reached |
| 11 | =SUMPRODUCT(C11:E11,NumberOfAds) |
| 12 | =SUMPRODUCT(C12:E12,NumberOfAds) |
| 13 | |
| 14 | Total Redeemed |
| 15 | =SUMPRODUCT(CouponRedemptionPerAd, NumberOfAds) |

| | H |
|---|---|
| 17 | Total Exposures |
| 18 | (thousands) |
| 19 | =SUMPRODUCT(ExposuresPerAd,NumberOfAds) |

**图 4.6**　超级食品公司的电子表格模型(4.5 节)，包括目标单元格广告受众总量(H19)和其他 F 列的输出单元格以及建立 Solver 的规定。可变单元格广告数量(C19:E19)显示了通过 Solver 所获得的最优解。

### 决　策

回想一下前面的内容，可知要作出的决策为：

决策 1：TV = 电视上的广告时段数目
决策 2：M = 杂志上的广告数目
决策 3：SS = 星期天增刊上的广告数目

存放这些数据的可变单元格仍然处于单元格广告数量(C19:E19)中。

**约　束**

除了原先的约束之外,这里增加了两个收益约束,一个确定需求的约束。如 11、12 行的 F 到 H 栏所规定的(这里的规定对 Solver 不起作用),收益约束为:

接触到的儿童的总量　　　≥5(目标 1,以百万为单位)
接触到的儿童家长的总量　≥5(目标 2,以百万为单位)

代入 C 到 E 栏的数据,

接触到的儿童的总量　　　= 1.2TV + 0.1M + 0SS
　　　　　　　　　　　　= SUMPRODUCT(C11:E11,广告数量)
　　　　　　　　　　　　→单元格 F11

接触到的儿童家长的总量　= 0.5TV + 0.2M + 0.2SS
　　　　　　　　　　　　= SUMPRODUCT(C12:E12,广告数量)
　　　　　　　　　　　　→单元格 F12

这些输出单元格被命名为总接触量(F11:F12)。

确定需求的约束如 15 行所示:

优惠券总资金 = 1490(以千美元为单位)

每一广告优惠券量(C15:E15)给出了每一个广告所使用的优惠券数量,因此:

优惠券总资金 = 0TV + 40M + 120SS
　　　　　　= SUMPRODUCT(每一广告优惠券量,广告数量)
　　　　　　→单元格 F15

如图 4.6 所示,这些限制将与原先的限制条件一起输入到 Solver 的对话框中。

**绩效测度**

问题的绩效测度仍然是:

广告受众量 = 1300TV + 600M + 500SS
　　　　　= SUMPRODUCT(单位广告受众量,广告数量)
　　　　　→单元格 H19

所以 H19 是新的目标单元格地址。

**建模的总结**

上述的步骤将该问题在电子表格中以如下的线性规划(代数形式)描述:

最大化　广告受众量 = 1300TV + 600M + 500SS

约束条件:

1. 资源约束

300TV + 150M + 100SS ≤ 4000(广告预算,以千美元为单位)
90TV + 30M + 40SS ≤ 1000(规划预算,以千美元为单位)
TV ≤ 5(可获得 TV 广告时段)

2. 收益约束

$$1.2TV + 0.1M \geq 5$$（儿童，以百万为单位）

$$0.5TV + 0.2M + 0.2SS \geq 5$$（儿童家长，以百万为单位）

3. 确定需求约束

$$40M + 120SS = 1490$$（以千美元为单位）

4. 非负约束

$$TV \geq 0 \qquad M \geq 0 \qquad SS \geq 0$$

**模型的求解**

在图 4.6 的 Solver 对话框中输入所有的内容，并选择了两个 Solver 选项之后，Solver 就会找出该问题的最优解，并显示在 19 行中。这些最优解为本次促销活动提供如下的计划：

在电视上做 3 处广告
在杂志上刊登 14 处广告
在星期天增刊上刊登 7.75 处广告（因此第 8 个广告仅能在 75% 的报纸上刊出）

尽管期望的广告受众量仅为 16175000，比图 3.1 所示的第一个计划 17000000 单位的广告受众量少，但是克莱略·希文生和大卫·斯隆都认为这个方案将会更好地实现本次活动所期望达到的管理目标，因此，他们决定采用这一新方案。

这个案例反映了在运用线性规划解决问题时存在的一个普遍的问题，那就是，线性规划模型必须不断完善。在使用模型的过程中，随着经验的不断增加而再一次或多次修正模型，将是很常见的事情。通过这些调整可以使模型更好地反映管理方面所要考虑的事项。

### 问题回顾

1. 哪些管理目标需要编入为超级食品公司进行的扩展的管理科学研究中？
2. 在新的线性规划模型中所包含的函数限制的类型是什么？
3. 为什么管理层决定采用新的方案，尽管它所能实现的广告受众量比原先的计划要少？

## 4.6　混合问题

在 4.2 节、4.3 节和 4.4 节中，分别讨论了线性规划的各种类型：资源分配问题、成本收益平衡问题以及网络配送问题。如表 4.8 所总结的，每一类问题都是以一类约束条件为特色的。实际上，纯资源分配问题的共性是它所有的函数约束均为资源约束，而成本收益平衡问题的共性是它所有的函数约束均为收益约束。在网络配送问题中，主要的函数约束为一特定类型的确定需求的约束。

但是如 4.5 节中的超级食品公司的案例所示，许多线性规划问题并不能直接归入三类中的某一类，一些问题勉强可以归入一类，因其主要的函数约束与表 4.8 的相应函数约束大致相同。另一些问题却没有一类占主导地位的函数约束，不能归入任何一类。上面的两类问题都将归入混合问题这一线性规划类型。

**混合问题**是第四类线性规划问题，这一类型将包括所有未归入其他三类中的线性规划问题。

一些混合问题仅包括两类函数约束，而更多的是包含三类约束函数。例如，4.5 节中的超级食品公司的例子，除了最初问题中的三个资源约束之外，还包含两个收益约束，一个确

定需求约束。

下面将给出另一个例子,来进一步说明三种不同的函数约束是如何在同一个问题中产生的。这个例子还将显示另一种线性规划的电子表格建模方法。

**表 4.8 各类函数约束**

| 类 型 | 形 式* | 解 释 | 主要用于 |
|---|---|---|---|
| 资源约束 | LHS≤RHS | 对于特定的资源<br>使用的数量≤可获得的数量 | 资源分配问题<br>混合问题 |
| 收益约束 | LHS≥RHS | 对于特定的收益<br>达到的水平≥最低可接受水平 | 成本收益平衡问题<br>混合问题 |
| 确定需求约束 | LHS = RHS | 对于一些数量<br>提供的数量 = 需求的数量 | 网络配送问题<br>混合问题 |

* LHS = 左式(一个 SUMPRODUCT 函数)
RHS = 右式(常数)

## 回收固体废弃物

### 问 题

塞维特公司经营一个回收中心,专门从事四种固体废弃物的回收,并将回收物处理、混合成为可销售的产品。根据混合时各种材料的比例,可将该产品分成不同的等级(参照表 4.9)。尽管在混合各种等级产品时允许一定的机动性,但每一等级产品中各种材料的最大值和最小值都必须符合下面质量标准的规定(最大值和最小值是根据该材料的重量在该等级产品总重量中的比例来确定的)。在两种较高等级的产品中,有一种特定材料的比例是固定的。这些规定与混合的成本以及每一等级产品的售价都在表 4.9 中给出。

**表 4.9 塞维特公司产品数据(单位:美元)**

| 等 级 | 规格说明 | 每磅的混合成本 | 每磅的售价 |
|---|---|---|---|
| A | 材料 1:不超过总量的 30%<br>材料 2:不少于总量的 40%<br>材料 3:不超过总量的 50%<br>材料 4:总量的 20% | 3.00 | 8.50 |
| B | 材料 1:不超过总量的 50%<br>材料 2:不少于总量的 10%<br>材料 4:总量的 10% | 2.50 | 7.00 |
| C | 材料 1:不超过总量的 70% | 2.00 | 5.50 |

回收中心可以从一些渠道定期收集到所需的固体废弃物,因此,可以获得维持稳定作业的处理量。表 4.10 给出了中心每周可以收集到每种材料的数量以及处理成本。

**表 4.10 塞维特公司固体废弃物的有关数据**

| 材 料 | 每周可获得的数量(磅) | 每磅处理成本(美元) | 附加约束 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3000 | 3.00 | 1. 对于每种材料,每周必须至少收集并处理一半以上数量<br>2. 每周有 30000 美元可用于处理这些材料 |
| 2 | 2000 | 6.00 | |
| 3 | 4000 | 4.00 | |
| 4 | 1000 | 5.00 | |

塞维特公司是绿地组织的全资公司,绿地组织是一个专门从事与环境有关业务的组织。塞维特公司的收益将全部用于支持绿地组织的其他活动,而绿地组织每周可获得 30000 美元的捐款,专门用于固体废弃物的处理。公司的董事会要求塞维特公司的管理层将这一捐款合理分配使用在各种材料上,务必将所收集到的固体废弃物中至少一半数量的废弃物加以处理。这些附加的约束如表 4.10 所示。

管理层决定在表 4.9 和表 4.10 所列的约束之内,有效地将各种材料分配到各等级的产品中去,以实现每周的总利润最大(总收入减总成本)。

**以线性规划的形式建模**

这是一个混合线性规划问题,为了给该问题建模,首先需要明确该问题所涉及的活动(activities)、资源(resources)、收益(benefits)以及确定的需求(fixed requirements)。这一步的关键在于管理层的目标是将每种材料最优地分配给每一等级的产品。每一种材料与产品的组合都是一个决策:多少材料用于这一等级的产品? 这个数量就是活动的水平(level of an activity)。

每一种活动对应的是将一种固体废弃物处理混合入一个等级的产品中去
活动的水平是混合入每一等级产品中的一种材料的数量

因此,要决策的是每周将多少磅的每一种材料加入每一等级的产品中去。

因为资源有限,收益受到限制,以及确定的需求,该问题就有了相当多的约束,归纳如下:

**有限的资源**:四种固体废弃物所能获得的数量如表 4.10 的第 2 栏所示,此外,表 4.9 的第 2 栏还表明材料 1 与材料 3 的用量有限,这些有限的资源都将形成资源的约束条件。

**规定的收益**:收益是指所收集和处理的每一种材料,表 4.10 的右边显示最低可接受的收益水平是可获得的材料的一半,而表 4.9 规定材料 2 的最低可接受的使用量,这些都是收益约束。

**确定需求的约束**:

1. 表 4.9 第 2 栏所示的材料 4 的固定用量。
2. 表 4.10 右边所示的处理固体废弃物的固定开销。

管理层的目标是使得三种等级的产品所能实现的每周总利润最大,因此,这就是该问题的总绩效测度(overall measure of performance)。这一测度可通过在销售总收入中减去混合处理的总成本计算出。每周 30000 美元的捐款全部用于处理固体废弃物,这一部分在计算利润时不能包含在成本里,因此,混合成本将是惟一的成本。这样,对于每一等级的产品,每磅的利润是将表 4.9 第 4 栏的销售价减去第 3 栏的混合成本计算出的。

**电子表格建模**

通常来说,问题的电子表格建模方式可以有多种,没有哪一种是惟一正确的。既然这个例子比前面的例子大而复杂,因而存在多种建模方法的可能性就更大。例如,一种建模方法就是像图 4.6 所示的将资源约束、收益约束、确定需求的约束分别放在独立的行中。但是,我们觉得图 4.7 所示的模型更紧凑且易懂,所以,这里将采用这一形式。建模的具体过程在下面给出。

**数　据**

表 4.9 和表 4.10 给出了该问题所需的所有数据。表 4.10 最后两栏的数据输入电子表

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Save-It Company Reclamation Problem | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Grade A | Grade B | Grade C | | | | | | | | |
| 4 | | Unit Amalg. Cost | $3.00 | $2.50 | $2.00 | | Total Treatment Cost | | | | $30,000 | | |
| 5 | | Unit Selling Price | $8.50 | $7.00 | $5.50 | | | | | | = | | |
| 6 | | Unit Profit | $5.50 | $4.50 | $3.50 | | Treatment Funds Available | | | | $30,000 | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | Material Allocation | | | Unit | | | | Total | | |
| 10 | | | (pounds of material used for each product grade) | | | | Treatment | | Minimum | | Material | | Amount |
| 11 | | | Grade A | Grade B | Grade C | | Cost | | to Treat | | Treated | | Available |
| 12 | | Material 1 | 412.28 | 2,587.72 | 0 | | $3 | | 1,500 | ≤ | 3,000 | ≤ | 3,000 |
| 13 | | Material 2 | 859.65 | 517.54 | 0 | | $6 | | 1,000 | ≤ | 1,377.19 | ≤ | 2,000 |
| 14 | | Material 3 | 447.37 | 1,552.63 | 0 | | $4 | | 2,000 | ≤ | 2,000 | ≤ | 4,000 |
| 15 | | Material 4 | 429.82 | 517.54 | 0 | | $5 | | 500 | ≤ | 947.37 | ≤ | 1,000 |
| 16 | | Total Products | 2,149.12 | 5,175.44 | 0.00 | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | | | Mixture | |
| 18 | | | | | | | Mixture Specifications | | | | | Percents | |
| 19 | | | | | | | Grade A, Material 1 | | 412.28 | ≤ | 644.74 | 30% | of Grade A |
| 20 | | | Total Profit | $35,110 | | | Grade A, Material 2 | | 859.65 | ≥ | 859.65 | 40% | of Grade A |
| 21 | | | | | | | Grade A, Material 3 | | 447.37 | ≤ | 1,074.56 | 50% | of Grade A |
| 22 | | | | | | | Grade A, Material 4 | | 429.82 | = | 429.82 | 20% | of Grade A |
| 23 | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | Grade B, Material 1 | | 2,587.72 | ≤ | 2,587.72 | 50% | of Grade B |
| 25 | | | | | | | Grade B, Material 2 | | 517.54 | ≥ | 517.54 | 10% | of Grade B |
| 26 | | | | | | | Grade B, Material 4 | | 517.54 | = | 517.54 | 10% | of Grade B |
| 27 | | | | | | | | | | | | | |
| 28 | | | | | | | Grade C, Material 1 | | 0.00 | ≤ | 0.00 | 70% | of Grade C |

图 4.7　塞维特公司问题的电子表格模型，包括目标单元格总利润（D20）和其他输出单元格的公式以及建立 Solver 的规定。可变单元格资源分配（C12:E15）给出了由 Solver 解出的问题的最优解。

格的数据单元格单位混合成本（C4:E4）和单位价格（C5:E5）。表 4.10 第二栏和第三栏的数据输入电子表格的数据单元格可获数量（M12:M15）和单位处理成本（G12:G15）。表中第一条附加限制——最小处理量输入单元格最小处理量（I12:I15），第二条限制——30000 美元的限制输入在单元格可用资金（K6）。表 4.9 第 2 栏中所规定的百分比输入单元格混合百分比（L19:L28）。

**决　策**

要作出的 12 个决策分别为：

$x_{A1}$ = 每周分配给 A 等产品的材料 1 的数量

$x_{A2}$ = 每周分配给 A 等产品的材料 2 的数量

·

·

·

$x_{C4}$ = 每周分配给 C 等产品的材料 4 的数量

存放这些数据的 12 个可变单元格被命名为材料分配（C12:E15）。

**约　束**

除了非负约束条件之外,还有 17 个函数约束要在电子表格以及 Solver 的对话框中表明。其中的 8 个约束条件使用输出单元格处理材料(K12:K15),用于计算每周所收集和处理以待混合的每种材料的总量。这些计算如下所示:

总量(材料 1) = $x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}$ = SUM(C12:E12)→单元格 K12
总量(材料 2) = $x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}$ = SUM(C13:E13)→单元格 K13
总量(材料 3) = $x_{A3}+x_{B3}+x_{C3}$ = SUM(C14:E14)→单元格 K14
总量(材料 4) = $x_{A4}+x_{B4}+x_{C4}$ = SUM(C15:E15)→单元格 K15

这 8 条约束分别为处理材料(K12:K15)≥最小处理量(I12:I15)(表 4.10 第一条附加约束的收益约束)和处理材料(K12:K15)≤可用数量(M12:M15)(表 4.10 第 2 栏的资源约束)。

表 4.10 第二条附加约束用输出单元格处理成本(K4)来组成下面的确定需求的约束:

处理成本 = 可用资金

其中

处理成本 = SUMPRODUCT(单位处理成本,处理材料)

最后,表 4.9 的第 2 栏中所规定的 8 个约束必须要包括在该电子表格模型中,这一步使用 19 ~28 行。I 栏的数据直接从相应的可变单元格中输入,因此 I18 = C12,I20 = C13,…,I29 = E12。K 栏的数据是指每一等级所占 L 栏总量的百分比,这些等级由单元格等级 A(C16)、等级 B(D16)以及等级 C(E16)确定。例如,19 行的约束可表示为:

$$x_{A1}\leqslant 0.3(\text{等级 A 的总量})$$

其中:

等级 A 的总量 = $x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}$

通过要求:

I19≤K19

来实现,其中:

K19 = L19 × 等级 A
L19 = 0.3
等级 A = SUM(C12:C15)

(在图 4.7 的底部显示的数据,表明了这 8 条约束的详细内容。)

**绩效测度**

每一种等级的产品的单位利润如输出单元格单位利润(C6:E6)所示,其中 C6 = C5 - C4,D6 = D5 - D4,E6 = E5 - E4。每一种产品的总产量在输出单元格总产量(C16:E16)中计算,其中 C16 = SUM(C12:C15),D16 = SUM(D12:D15),E16 = SUM(E12:E15)。因为,总绩效测度是三种等级产品的每周总利润,所以目标单元格总利润(D20)的公式可表示为:

总利润 = SUMPRODUCT(单位利润,总产量)

**建模的总结**

上面电子表格中所建立的线性规划模型可用下面的代数形式表示:

$$\text{最大化}\quad \text{利润} = 5.5(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}) + 4.5(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}) + 3.5(x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4})$$

约束条件：

1. 混合的比例规定(表 4.9 第 2 栏)：

$$x_{A1} \leqslant 0.3(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}) \quad (\text{等级 A,材料 1})$$
$$x_{A2} \geqslant 0.4(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}) \quad (\text{等级 A,材料 2})$$
$$x_{A3} \leqslant 0.5(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}) \quad (\text{等级 A,材料 3})$$
$$x_{A4} = 0.2(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}) \quad (\text{等级 A,材料 4})$$
$$x_{B1} \leqslant 0.5(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}) \quad (\text{等级 B,材料 1})$$
$$x_{B2} \geqslant 0.1(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}) \quad (\text{等级 B,材料 2})$$
$$x_{B2} = 0.1(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}) \quad (\text{等级 B,材料 4})$$
$$x_{C1} \leqslant 0.7(x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4}) \quad (\text{等级 C,材料 1})$$

2. 可获得的材料(表 4.10 第 2 栏)：

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1} \leqslant 3000 \quad (\text{材料 1})$$
$$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2} \leqslant 2000 \quad (\text{材料 2})$$
$$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3} \leqslant 4000 \quad (\text{材料 3})$$
$$x_{A4}+x_{B4}+x_{C4} \leqslant 1000 \quad (\text{材料 4})$$

3. 要处理的材料的约束(表 4.10 的右边)：

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1} \geqslant 1500 \quad (\text{材料 1})$$
$$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2} \geqslant 1000 \quad (\text{材料 2})$$
$$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3} \geqslant 2000 \quad (\text{材料 3})$$
$$x_{A4}+x_{B4}+x_{C4} \geqslant 500 \quad (\text{材料 4})$$

4. 处理成本的约束(表 4.10 的右边)：

$$3(x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}) + 6(x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}) + 4(x_{A3}+x_{B3}+x_{C3}) + 5(x_{A4}+x_{B4}+x_{C4}) = 30000$$

5. 非负约束：

$$x_{A1} \geqslant 0 \quad x_{A2} \geqslant 0 \quad \cdots \quad x_{C4} \geqslant 0$$

**问题的求解**

在图 4.7 所示的电子表格模型中运用 Solver 软件，将在可变单元格(C12:E15)中给出最优解，即每周分配给每一等级产品的各种材料的数量(以磅为单位)。目标单元格总利润(D20)显示了在最优情况下的每周总利润为 35110 美元。

## 对该例子的一些看法

与书中其他的线性规划例子相比，上面的例子算是比较大的，它有 12 个决策变量和 17 个约束条件，包括 8 个资源约束、6 个收益约束，以及 3 个确定需求的约束。但是，大多数现实的线性规划问题会比这个问题还要复杂得多。

在处理实际当中规模较大的线性规划建模问题时，管理科学工作者并不是一次往表格中输入一个数据，相反，要使用一种数学建模语言从现存的数据库中直接产生模型。

塞维特公司的问题是一个配料问题,配料问题是一类特殊的组合线性规划问题,其目标是为最终产品寻找最优的混合成分,以满足一定的规定。线性规划一些早期的应用就是用于汽油的混合,即混合各种不同的石油成分以取得各种汽油的混合物。还有些同类应用的最终产品为钢铁、化肥以及动物饲料等等。

但是,混合的线性规划问题在其他许多的情况下也存在。

### 混合线性规划问题建模过程的总结

混合问题的线性规划的建模过程与其他三类线性规划问题类似。但是,其他三种线性规划问题仅仅涉及到三类函数约束(资源约束、收益约束、确定需求的约束)的一种,并以之为特色,而混合问题可以同时包含三类约束。下面对混合问题的总结包括了处理各类函数约束的独立步骤。

因为任何线性规划问题都涉及到寻找最优的各种活动水平的组合,因此必须首先明确问题的各种活动,活动的水平即为要作出的决策。

1. 从管理的角度,为问题的解确定一个总绩效测度。
2. 对于每一种活动,估计活动对总绩效测度的单位贡献。
3. 确定分配给各种活动的有限资源(如 4.2 节所描述的),明确每一种资源可获得的数量以及活动的单位使用量。
4. 确定各种活动可获得的收益(如 4.3 节所示),并明确各种收益管理层所制定的最低可接受水平以及每种活动的单位收益贡献。
5. 判别确定的需求,对于一些类型的数量,提供的数量必须等于需要的数量(如 4.4 节所示),明确每一种要求的数量,以及每一活动对该要求的数量的单位贡献。
6. 将 3 ~6 步所收集的数据输入到电子表格的数据单元格中。
7. 指明可变单元格以显示关于活动水平的各项决策。
8. 使用输出单元格来说明资源、收益以及确定需求的约束。
9. 指定目标单元格来显示总的绩效测度。

### 问题回顾

1. 混合的线性规划问题可以包含哪几类函数约束?
2. 塞维特公司问题是哪一特殊类型的线性规划例子?

## 4.7　管理视角的建模

线性规划问题的建模与分析有助于管理者作出决策,这就意味着模型必须准确地从管理的角度来反映问题。

绩效测度和约束条件都要从管理的角度来反映问题。

- 总绩效测度必须是管理层想要获得的现实目标
- 当管理层限制活动可使用的资源时,这些限制就需描述成为资源约束
- 当管理层指定从活动中必须获得的收益的最低可接受水平时,这些管理目标将以收益约束的形式加入到模型当中
- 如果管理层对某些特定数量指定了确定的需求,那就需要确定需求的约束

因为电子表格大大便利了问题的解决,所以现在一些管理者可以自己建模解决一些小型的线性规划问题。然而,大型的线性规划问题一般都是由管理科学小组而非管理者来建模的。管理科学小组在处理问题时,必须彻底理解管理层对该问题的看法。这就需要小组从一开始就与管理层进行清晰明确的沟通,并且在出现新的问题,需要管理层来指导和确定时,能够保持这种有效的沟通。管理层必须清楚地将对问题的看法以及所涉及的重要事项表达出来。如果管理层不能明确地表述需要哪些帮助的话,线性规划研究是不能给他们提供任何帮助的。

当你在实际从事了一个线性规划问题的应用之后,你会对管理科学小组与管理层的有效沟通的重要性有更深刻的认识。与任何教科书一样,为了更清楚地将问题描述出,本书中的例子比实际的应用要小且简单。许多实际的线性规划建模往往包含上百甚至上千个决策与约束。在这些情形中,常常会有要不要考虑进模型的许多模棱两可的问题,对于如此复杂的线性规划问题,管理层的投入与支持是至关重要的。

处理大型的线性规划问题是没有惟一正确的线性规划模型的,在整个研究的问题中,模型往往会被不断修改和扩展。在研究的早期,将会使用一系列技术来检验最初版本的模型,以找出可能的错误与遗漏,因为在建立大型的模型时,错误与遗漏是不可避免。这个检验的过程称为模型的确认(model validation)。

最初的模型一旦被检验有效,就可以使用它的许多变异的模型。究竟使用哪一种变异的模型必须依赖于许多因素,包括问题最合理的假设、模型最可靠的参数的估计以及模型所需要的精确度。

在研究大型的线性规划问题时,一个很好的方法是,先建立一个相对简单的模型,而后运用从这个模型中获得的经验来扩展模型,使其更接近复杂的实际问题。只要一个问题还是能够合理求解,那么就可以继续将该模型扩展(model enrichment)。当管理层需要模型的结果时,又必须将模型缩减,因为管理层经常会抑制管理科学小组自然的灵感,在模型中增加一些花哨的东西,而不是指导他们建立一个适时实用的但可能不很好看的模型。

> what-if 分析带来在建立和求得一个模型后的一些关键问题。

管理者在研究问题的输出结果时,往往会察觉一些不如意的地方,这就需要进行模型的扩展。在模型扩展时,通常会加入一些收益约束以满足以前没有提出的管理目标(回忆一下超级食品公司的案例)。

尽管可能使用许多变异的模型,但是对于一个特定版本的模型,一次只能求得一个最优解(optimal solution)。这就是 what-if 分析成为线性规划问题一个重要组成部分的原因。在求得一个特定问题的最优解之后,管理层可能会有很多的 what-if 问题:

- 如果模型的参数的估计有误该怎么办?
- 如果作出不同的似是而非的假设,问题的结果将会如何变化?
- 如果管理方面所要求的某一选项没有被考虑在内,会产生怎样的结果?

下一章将主要介绍如何用 what-if 分析来分析相关的问题以及管理者是如何使用这些信息的。

因为管理者是线性规划研究的发起人,因此,管理者必须对线性规划模型以及问题的描述有足够多的知识,这样他们才能认识到哪些问题是可以用线性规划来解决的。管理方面的输入对线性规划是如此的重要,所以,管理者需要懂得可能包括进模型的各种管理事项。学习并掌握这两种技能正是本章最重要的目标。

### 问题回顾

1. 线性规划模型必须从谁的角度准确反映问题?
2. 大型的线性规划模型一般是由谁来建立的?
3. 何种沟通在线性规划的研究中是至关重要的?
4. 模型确认的含义是什么?
5. 模型扩展的过程意味着什么?
6. 为什么 what-if 分析是线性规划的研究中非常重要的一个组成部分?

## 4.8 线性规划经典应用回顾

在 2.1 节中我们曾介绍了线性规划在实际当中的三个有代表性的应用以及对所涉及的公司的相应影响。在学习了第 2 章到第 4 章之后,我们将对这些应用进行更多的介绍。在每一种应用中我们都将讨论以下的特征:

1. 所涉及的线性规划的类型(即为本章所讨论过的几种类型)。
2. 问题的规模。
3. 有助于应用成功的一些因素。

在继续读下去之前,先复习一下前面 2.1 节中的案例研究将会对下面的学习有很大的帮助。

### 为潘德罗索工业公司选择产品组合

回想一下潘德罗索工业公司所面临的关键问题:每月为生产的木材选择获利最多的产品组合。但是,市场上价格的波动使得这一问题很难解决,并对工业的利润产生很大的影响。

这个问题与在第 2.2 节和 4.2 节中所讨论过的伟恩德玻璃制品公司的问题类似,都是产品组合问题,都需要将有限的资源分配到各种不同的产品生产之中去,这些资源的限制也包括一定种类的生产能力的限制。在两个例子中,这些有限的资源都将形成资源约束条件。

但是,将实际的应用与书本上的例子相比,潘德罗索的问题比伟恩德玻璃制品公司的问题要复杂很多。伟恩德公司的例子有两个决策量和三个函数约束条件,而潘德罗索的线性规划模型含有 90 个决策量和 45 个函数约束。此外,伟恩德公司的问题是一个资源分配的问题,而潘德罗索并不是纯粹的该类问题。潘德罗索的问题包含相当数量的确定需求的约束表示产品当中各种成分的一定比例。该模型同时还有一些收益约束,为了能使公司的客户满意,一些产品的生产与销售不能少于最低可接收的水平。因此,潘德罗索的问题应该归入 4.6 节所介绍的混合问题中。

潘德罗索的应用之所以如此成功有两个因素:一是他们有以自然语言为用户界面的财务计划系统,该系统有最优化的代码来支持运行。使用自然语言而不是数学符号来显示线性规划模型的各个组成部分以及输出的结果,使得作决策的管理者能够很容易看懂整个过程。在这一章的几个例子中我们已经看到了自然语言的这种用法,即以 Excel 的电子表格来描述线性规划的模型,表格中显示出了各种活动、资源、收益以及确定的需求的名称。以

管理者的语言将结果报告给管理层是线性规划能够成功应用的一个重要的因素。

成功的另一个因素是所使用的最优化系统必须是互动的(interactive)。正因为这一点,管理者在从一个版本的模型中获得一组最优解之后,可以提出一系列的 what-if 问题,并能立即得到回应。这样,通过不断探测一些似是而非的情况,才能作出更好的决策,这个过程增加了管理者的信心,使他们确信这些决策在不可预见的情况下也能很好地运行。

不管在何种应用中,能够对管理层的需要以及通过 what-if 分析作出快速反应的能力(不管是否是互动的),是线性规划研究的一个重要的部分。

## 联合航空公司工作人员排程

如 2.1 节中所介绍的,联合航空公司利用线性规划来为其在主要的机场和订票点的上万个工作人员安排每周的工作时间表,目标是为了能够在满足客户的服务需要的同时,将一周内每天每半个小时的人员成本最小化。

尽管该线性规划模型的详细内容没有被公开发表,但有一点是很清楚的,即它所使用的最基本的方法与 4.3 节中的联邦航空公司的例子是一样的。主要的函数约束为收益约束,用以保证每个时段在职的工作人员的数量不会少于最低可接受水平。因此,这个问题基本上是一个成本收益平衡问题。

然而,联邦航空公司的例子只有 5 个决策量,联合航空公司一些地点的规划模型却包括 20000 个决策量! 造成这种差别的一个主要的原因是,实际的问题必须要考虑种种细节的因素,而这些因素在教科书中就会被省略掉。联合航空公司将许多因素包含在模型中,如每位职工的就餐与休息的时间、不同职工的不同轮班时间、一周工作之后的休假以及其他许多类似事项。

但他们应用成功最主要的因素是因为得到了运营经理以及其他员工的大力支持,因为这些人实际上是贯彻实施这些排程程序的,因此,如果没有他们的合作与支持,一切努力都将白费。这是从经验中获得的教训。因为,一开始管理科学小组并没有与运营经理建立有效的沟通,而建议提出来以后,遭到管理层的拒绝与抵制。小组的领导者将他们的错误描述成为:违背了一条主要的规则,即未让管理者和其员工参与整个研究过程,从而没有取得他们的信任与尊重。这个小组从此就争取和保持与管理者很好的沟通,并取得了卓越的绩效。

## Citgo 石油集团供应、配送与营销的规划

在 2.1 节中曾介绍 Citgo 石油集团如何运用管理科学的技术,特别是线性规划,从而在 90 年代中期创造了大量的财富。例如,供应、配送与营销的建模系统将公司主要产品的供应、配送与营销通过公司庞大的销售与配送网络得到很好的协调。

这个线性规划模型与 4.4 节中的大 M 公司的模型是同一个类型,均为网络配送问题。

大 M 公司的模型只包括 6 个决策量和 5 个确定需求的约束,然而,Citgo 集团每种主要产品的模型都含有大约 1500 个决策量以及 3000 个确定需求的约束。

在处理如此大型的模型时,最初的模型不可避免会含有一些错误。因此,进行模型的确认以检验和测试模型的正确性就显得尤为重要。Cigto 集团的管理科学小组报道说,他们在测试最初的模型时,记录错误信息的纸张叠在一起竟有 1 英寸厚。在模型经过彻底的确认之后,将该可行的模型运用到某一新的应用时,一般还会产生关于错误或有问题的数据的不到 10 个错误与警告信息。

线性规划应用成功的一些主要因素与前面讨论过的两个公司的例子相似。如潘德罗索工业公司的例子提到的,一个因素是将输出报告以管理者的语言来表示,以满足他们的需要。这些输出报告设计成能使管理者较容易理解和使用,并阐述了对管理层来说最重要的一些事项。另一点也是与潘德罗索工业公司的例子一样,管理层可以使用线性规划中的 what-if 分析部分,对企业的变化作出快速的反应。在线性规划的许多应用中,都证明了 what-if 分析的重要性,甚至比第 1 版模型所获得的最优解重要得多。

应用成功的又一个因素,与联合航空公司的应用中所提到的一样,是在开发与实施线性规划系统时,管理层的热情支持。

然而,最重要的因素是高层管理者所给予的无限制的支持,从公司的执行总裁到母公司的董事长(在 Citgo 的例子中,我们知道管理科学小组的领导者,一位出色的管理科学顾问是直接向 Citgo 的总裁与母公司南大陆集团的董事长汇报的)。高层管理者的支持同时也包括财务与组织上的支持。

在讨论该小组所执行的这一线性规划系统以及其他的管理科学应用时,小组成员将高层管理者对小组财务方面的支持描述成为:

> 实施系统的总成本为 2000 万~3000 万美元,是这一项目的最大的困难与障碍所在。但是,因为在石油工业中的信息爆炸,高层管理者认识到必须有收集、存取和分析数据的信息系统。将管理科学的技术加入电脑与系统的增加的成本是小的,实际上与因此所获得收益相比是微不足道的。

高层管理者在组织上的支持可表现为多种形式。例如,设立运作协调副总裁的职位,来负责评价与协调这一跨组织边界的模型所提供的建议。

**问题回顾**

1. 比较三种线性规划的应用,注意各种类型的问题应该使用哪一类型的线性规划模型(资源分配、成本收益平衡、网络配送以及混合问题)。
2. 比较三种应用所需作出的决策。
3. 是什么使得潘德罗索的应用如此成功?
4. 是什么使得联合航空公司的应用如此成功?
5. 是什么使得 Citgo 的应用如此成功?

## 4.9 本章小结

以≤符号表示的函数约束称为资源约束,因为这些限制要求使用的资源必须小于等于所能提供的资源的数量。资源分配问题的共性就是它们的函数约束全部为资源约束。

以≥符号表示的函数约束为收益约束,因为它们的形式为收益取得的水平必须大于等于最低可接受水平。收益约束反映了管理层所规定的目标。如果所有的约束均为收益约束,那么,这一问题为成本收益平衡问题。

以=符号表示的函数约束称为确定需求的约束,因为它们表示了一定数量的确定的需求,提供的数量等于要求的数量。网络配送问题的共性就是它们的主要函数约束为一种特定形式的确定需求的约束。

不能归于这三类的任何线性规划的问题称为混合问题。

在实际的应用当中，管理科学小组经常建立和分析大型的线性规划模型以指导管理决策，这些工作需要管理层足够强大的管理上的投入与支持，才能达到管理层实际的要求。

## 专业术语

**收益约束**（Benefit constraint）：以≥符号表示的函数约束。该式的左端表示的是所考虑活动能够创造的收益水平，右端表示的是这一收益必须达到的最低可接受水平。（4.3 节）

**配料问题**（Blending problem）：混合线性规划问题的一种，这类问题的目标是在满足规定的前提下，为各种最终产品选择最优的配料比例。（4.6 节）

**成本收益平衡问题**（Cost-benefit-trade-off-problem）：线性规划问题的一种类型，这一类线性规划问题所考虑的是各种活动的总成本与通过这些活动实现的收益之间的平衡，这类问题的共性是线性规划模型中的函数约束均为收益约束。（4.3 节）

**网络配送问题**（Distribution-network problem）：线性规划问题的一种类型，这一类线性规划问题所考虑的是如何通过一定的配送网络来实现货物的最优配送，这类问题的函数约束为确定需求的约束。（4.4 节）

**确定需求的约束**（Fixed-requirement constraint）：以 = 表示的函数约束，该式的左端表示的是所提供的某种数量，右端表示的是需求的数量。（4.4 节）

**共性**（Identifying feature）：某一类线性规划问题所具有的共同的特征。（本章前言）

**混合问题**（Mixed problem）：不属于线性规划问题三种类型（资源分配问题、成本收益平衡问题、网络配送问题）当中的任何一种的问题。（4.6 节）

**模型扩展**（Model enrichment）：在使用一个模型的过程中，随着经验的积累，不断地在模型中增加一些前面没有考虑到的细节问题，从而使得模型能够更符合实际问题。（4.7 节）

**模型确认**（Model validation）：检验和测试模型，以使得模型有效的过程。（4.7 节）

**资源分配问题**（Resource-allocation）：线性规划问题的一种类型，这类问题考虑的是将资源分配给各种活动，该类问题的共性是模型中的函数约束均为资源约束。（4.2 节）

**资源约束**（Resource constraint）：以≤符号表示的函数约束，左端表示的是活动所使用的资源的数量，右端表示的是能够获得的资源的数量。（4.2 节）

## 本章管理科学课件的学习辅助

"Ch. 4—**线性规划：建模与应用**" Excel **文件**：

超级食品公司的例子
梦大发展公司的例子
联邦航空公司的例子
大 M 公司的例子
修正的超级食品公司的例子
塞维特公司的例子

Excel **加载宏**：

Premium Solver

## 习　　题

在必须使用 Excel 的每道题（或题的部分）的左边都加入了 E* 的标志（除了导师有另外的要求）。打星号的问题至少有一部分的答案会在书后给出。

4.1. 重新考虑 4.1 节中的超级食品公司的例子，广告公司 G&J 公司现在推荐了第四种可行的广告媒体——无线广播台，来促销公司的早餐谷类食品脆始。幼年儿童是该食品主要的潜在消费者，而潜在的主要购买者——儿童的家长经常是很忙的，没有时间来阅读，因此会错过公司在杂志与报纸增刊上的广告，甚至可能没有时间收看星期六上午的儿童节目，因而也无法看到公司在电视上的广告。但是，这些人在上下班的时候，一般都会收听无线广播。为

了更好地接触到这些家长,G&J 公司提议公司考虑在上下班的时间通过全国性的并且吸引中青年人的电台为该食品做广告。

G&J 公司估计开发新的无线广播广告的成本将为 50000 美元,单位广告所能获得的广告受众期望量为 900000。公司确认可以获得使用 10 个时段的电台广播,每一时段广告成本为 200000 美元。

E* a. 为该修正的广告混合问题建立电子表格模型,包含上面所提到的第四种广告媒体,确定数据单元格、可变单元格以及目标单元格,并给出输出单元格中使用 SUMPRODUCT 函数的 Excel 等式。

b. 表明为什么该模型是一个线性规划模型。

c. 写出该模型的代数形式。

4.2.* 考虑具有如下所示数据的资源分配问题:

| 资　源 | 每一活动的单位资源使用量 | | 可获得的资源数量 |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | |
| 1 | 2 | 1 | 10 |
| 2 | 3 | 3 | 20 |
| 3 | 2 | 4 | 20 |
| 单位贡献 | $20 | $30 | |

单位贡献 = 单位活动的利润

E* a. 将该问题在电子表格上建模。

E* b. 用电子表格检验下面的解 $(x_1, x_2)$ = (2,2),(3,3),(2,4),(4,2),(3,4),(4,3),哪些是可行解,可行解中哪一个能使得目标函数的值最优?

c. 用 Solver 来求解最优解。

d. 写出该模型的代数形式。

e. 用作图法求解该问题。

4.3. 考虑具有如下所示数据的资源分配问题:

| 资　源 | 每一活动的单位资源使用量 | | | 可获得的资源数量 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| A | 30 | 20 | 0 | 500 |
| B | 0 | 10 | 40 | 600 |
| C | 20 | 20 | 30 | 1000 |
| 单位贡献 | $50 | $40 | $70 | |

单位贡献 = 单位活动的利润

E* a. 将该问题在电子表格上建模。

b. 写出该模型的代数形式。

E*4.4. 考虑具有如下所示数据的资源分配问题:

| 资　源 | 每一活动的单位资源使用量 | | | | 可获得的资源数量 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| P | 3 | 5 | −2 | 4 | 400 |
| Q | 4 | −1 | 3 | 2 | 300 |
| R | 6 | 3 | 2 | −1 | 400 |
| S | −2 | 2 | 5 | 3 | 300 |
| 单位贡献 | $11 | $9 | $8 | $9 | |

单位贡献 = 单位活动的利润

a. 将该问题在电子表格上建模。

b. 对问题的最优解作出 5 次猜测,分别检验各猜测的可行性,若可行,计算目标函数的值,哪一个解的目标函数值最优?

c. 用 Solver 求得问题的最优解。

4.5.* Omega 公司停止了生产一些已经不再获利的产品,这样就产生了一部分剩余生产力。管理层考虑将这些剩余生产力用于一种或几种新产品,产品 1、产品 2 和产品 3。可用机器是限制产量的因素,具体数据如下表所示。

| 机器的类型 | 每周可用机器小时 |
|---|---|
| 铣床 | 500 |
| 车床 | 350 |
| 磨床 | 150 |

每生产一单位各种产品需要的机器小时如下表所示:

| 生产系数(单位:机器小时) | | | |
|---|---|---|---|
| 机器类型 | 产品 1 | 产品 2 | 产品 3 |
| 铣床 | 9 | 3 | 5 |
| 车床 | 5 | 4 | 0 |
| 磨床 | 3 | 0 | 2 |

销售部门表示产品 1 与产品 2 的预计销售将超过最大的生产量,而产品 3 的每周平均销售 20 单位。三种产品的单位利润分别为 50 美元、20 美元和 25 美元。目标是要确定每种产品的产量,使得公司的利润最大化。

a. 判别问题的各种活动以及分配给这些活动的有限的资源,从而说明该问题为什么是资源分配问题。

b. 描述该问题要作出的决策、决策的限制条件以及决策的总绩效测度。

c. 将上面对于决策与绩效测度的描述以数据和决策量的定量的方式来表达。

E* d. 为该问题建立电子表格模型,确定数据

单元格、可变单元格、目标单元格以及其他的输出单元格，并且将输出单元格中使用 SUMPRODUCT 函数的等式表示出来。然后用 Solver 来求解问题。

e. 将该模型以代数形式总结。

4.6. 艾德·巴特勒是比尔克公司的生产经理，该公司生产三种汽车零部件，每一种零部件的生产都需要在两台机器加工，加工时间如下所示（单位：小时）：

| 机　器 | 零部件 | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| 1 | 0.02 | 0.03 | 0.05 |
| 2 | 0.05 | 0.02 | 0.04 |

每台机器每小时可工作 40 个小时，每一零部件的单位利润为：

| | 零部件 | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| 利润 | $50 | $40 | $30 |

艾德希望能够确定最优的零部件的组合以获取最大的利润。

a. 明确问题的各种活动与资源。

E* b. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型。

E* c. 对问题的最优解作出 3 次猜测，分别检验各猜测的可行性，若可行，计算目标函数的值，哪一个解的目标函数值最优？

E* d. 用 Solver 求得问题的最优解。

e. 写出该问题的代数形式。

E*4.7. 考虑以下面的代数形式表达的资源分配问题，该问题包含三种资源，所要作的决策是确定三种活动（$A_1$、$A_2$和$A_3$）的水平。

$$\text{最大化 Profit} = 20A_1 + 40A_2 + 30A_3$$

约束条件

资源 1：

$3A_1 + 5A_2 + 4A_3 \leq 400$（可获得的数量）

资源 2：

$A_1 + A_2 + A_3 \leq 100$（可获得的数量）

资源 3：

$A_1 + 3A_2 + 2A_3 \leq 200$（可获得的数量）

且

$$A_1 \geq 0 \qquad A_2 \geq 0 \qquad A_3 \geq 0$$

建立该问题的电子表格模型并求解。

4.8. 考虑具有下面所示数据的成本收益平衡问题：

| 收　益 | 每一活动的单位收益贡献 | | 最低可接受水平 |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | |
| 1 | 5 | 3 | 60 |
| 2 | 2 | 2 | 30 |
| 3 | 7 | 9 | 126 |
| 单位成本 | $60 | $50 | |

E* a. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型。

E* b. 用电子表格检验下面的解 $(x_1, x_2) = (7,7), (7,8), (8,7), (8,8), (8,9), (9,8)$，哪些是可行解，可行解中哪一个能使得目标函数的值最优？

E* c. 用 Solver 求得问题的最优解。

d. 写出该问题的代数形式。

e. 用图解法求解该问题。

E*4.9. 考虑具有下面所示数据的成本收益平衡问题：

| 收　益 | 每一活动的单位收益贡献 | | | | 最低可接受水平 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| P | 2 | −1 | 4 | 3 | 80 |
| Q | 1 | 4 | −1 | 2 | 60 |
| R | 3 | 5 | 4 | −1 | 110 |
| 单位成本 | $400 | $600 | $500 | $300 | |

a. 为该问题在电子表格上建模。

b. 对最优解作 5 次猜测，分别检验各猜测的可行性，若可行，计算目标函数的值，哪一个解的目标函数值最优？

c. 用 Solver 求得问题的最优解。

4.10* 弗瑞德·乔拿森有一个家庭农场，除了农场上的农作物以外，他还饲养了一些猪拿到市场上出售。现在，他希望能够确定每头猪可获得的各种的饲料，包括玉米、槽料以及苜蓿。因为猪可以吃这些饲料的任何比例的混合物，所以，问题的目标就是如何确定各种成分的比例以使得饲料能够以最低的成本达到一定的营养要求。各种饲料每一公斤所包含的各种营养成分如下表所示，下表同时给出了每日的营养要求以及饲养成本：

| 营养成分 | 每公斤玉米 | 每公斤槽料 | 每公斤苜蓿 | 每日最小需求 |
|---|---|---|---|---|
| 碳水化合物 | 90 | 20 | 40 | 200 |
| 蛋白质 | 30 | 80 | 60 | 180 |
| 维他命 | 10 | 20 | 60 | 150 |
| 成本(美分) | 84 | 72 | 60 | |

E* a. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型。

E* b. 使用电子表格检验 $f(x_1,x_2,x_3)=(1,2,2)$ 是否是可行解，若可行，每日的总成本是多少，该食谱所能提供的各种营养成分又是多少。

E* c. 花几分钟用电子表格反复测试，尽可能地猜测最优解，以及在最优情况下的每日总成本。

E* d. 用 Solver 求得问题的最优解。

e. 写出该问题的代数形式。

4.11. 莫林·拉尔德是艾尔发电子公司的财务总监，该公司是中西部的一家主要的公用事业单位。公司决定在今后的 5 年、10 年、20 年分别建造一些水电站，以满足公司所服务的该地区不断增长的人口的需要。为了取得建设资金，公司现在要投资一部分的资金以满足将来的现金流出。莫林可以购买三种类型的金融资产，每种的单位成本均为 100 万美元，可以购买小数单位个各类的资产。这些资产从现在开始，将会在今后的 5 年、10 年、20 年产生收入，以满足相应年份的最小的现金流，如下表所示：

| 年　份 | 单位资产收入（百万美元） | | | 要求现金流的最小量 |
|---|---|---|---|---|
| | 资产 1 | 资产 2 | 资产 3 | |
| 5 | 2 | 1 | 0.5 | 400 |
| 10 | 0.5 | 0.5 | 1 | 100 |
| 20 | 0 | 1.5 | 2 | 300 |

莫林希望能够确定在各类资产上的有效的投资组合，从而能以最小的投资满足今后的现金流的需要。

E* a. 为该问题在电子表格上建模。

E* b. 使用电子表格检验购买 100 单位的资产 1、100 单位的资产 2 和 200 单位的资产 3 的投资组合的可行性，这种投资组合会在今后的 5 年、10 年和 20 年产生多少的现金流，投资的总数量又是多少？

E* c. 花几分钟用电子表格反复测试，尽可能地猜测最优解，以及在最优情况下的总投资。

E* d. 用 Solver 求得问题的最优解。

e. 写出该问题的代数形式。

4.12. 在线商品公司通过在线手册销售家用品，公司需要很大的仓库来储存商品。因此，公司计划在 5 个月内租一些仓库以存放商品。这几个月的所需要的存储空间是可知的，但是，每个月所需的空间是不一样的，所以，按月来租可能会比较经济。此外，其他月份租赁存储空间的附加的成本比第一个要多很多，所以，租赁 5 个月所需的最大的存储空间可能较为便宜。另一种选择是 5 个月中，可以增加或减少租赁的空间，不是每个月都改变，但至少可以改变一次。

所需的空间以及各个时期的租赁成本如下表所示（单位：美元）：

| 月 份 | 需要空间（平方英尺） | 租赁时间（月份） | 每平方英尺的租赁成本 |
|---|---|---|---|
| 1 | 30000 | 1 | 65 |
| 2 | 20000 | 2 | 100 |
| 3 | 40000 | 3 | 135 |
| 4 | 10000 | 4 | 160 |
| 5 | 50000 | 5 | 190 |

目标是在满足存储需求的基础上使租赁成本最小化。

a. 判别该问题的各种活动以及活动所要实现的收益，从而说明该问题是一个成本收益平衡问题。

b. 描述该问题要作出的决策、决策的限制条件以及决策的总绩效测度。

c. 将上面对于决策与绩效测度的描述以数据和决策量的定量的方式来表达。

E* d. 为该问题建立电子表格模型，确定数据单元格、可变单元格、目标单元格以及其他的输出单元格，并且将输出单元格中使用 SUMPRODUCT 函数的等式表示出来。然后用 Solver 来求解问题。

e. 以代数形式总结该模型。

E*4.13. 考虑具有如下代数形式的成本收益平衡问题，该问题包含三项收入，要决策的是四种活动（$A_1,A_2,A_3$ 和 $A_4$）的水平。

最小化　$\text{Cost} = 2A_1 + A_2 - A_3 + 3A_4$

约束条件：

收益 1：

$3A_1 + 2A_2 - 2A_3 + 5A_4 \geq 80$（最低可接受水平）

收益 2：

$A_1 - A_2 \quad + A_4 \geq 10$（最低可接受水平）

收益 3：

$A_1 + A_2 - A_3 + 2A_4 \geq 30$（最低可接受水平）

此外

$$A_1 \geq 0 \quad A_2 \geq 0 \quad A_3 \geq 0 \quad A_4 \geq 0$$

为该问题建立电子表格模型并求解。

4.14. 拉里·爱迪生是伯克利大学计算机中心主任，现在他要为中心的人员进行排程。中心从 8AM 开到半夜。拉里观测出中心在一天的不同时间的使用量，并确定需要如下相应数量的咨询者：

| 时　间 | 需要在岗位上的咨询员的最小数量 |
|---|---|
| 8AM ~ 中午 | 6 |
| 中午 ~ 4PM | 8 |
| 4PM ~ 8PM | 12 |
| 8PM ~ 半夜 | 6 |

需要雇用两类计算机咨询员：全职与兼职。全职咨询员将在以下的任一轮班中连续工作 8 个小时：上午(8AM ~ 4PM)、下午(中午 ~ 8PM)以及晚上(4PM ~ 午夜)。全职咨询员的工资为每小时 14 美元。兼职咨询员将在表中所示的各轮班中工作，每小时 12 美元。

一个额外的条件是，在任何时间都必须有至少两个全职咨询员以及一个兼职员在职。

拉里希望能够确定每一轮班的全职与兼职咨询员的人数，从而能以最小的成本满足上面的需要。

a. 该问题属于哪一类线性规划问题，为什么？

E* b. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型，并用 Solver 求解。

c. 以代数的形式总结该模型。

4.15* 美德仪器(Medequip)公司在两个工厂制造精密医疗诊断仪器。有三家医疗中心对该月出厂的产品下了订单。下表显示了将仪器从工厂运到各个中心的成本，以及每个工厂的产量和每个客户的订单的数量：

| 从 \ 至 | 单位运输成本(美元) | | | 产 出 |
|---|---|---|---|---|
| | 客户 1 | 客户 2 | 客户 3 | |
| 工厂 1 | 600 | 800 | 700 | 400 单位 |
| 工厂 2 | 400 | 900 | 600 | 500 单位 |
| 订货数量 | 300 单位 | 200 单位 | 400 单位 | |

决策所要决定的是从每个工厂到每个客户的运输规划。

a. 该问题属于哪一类线性规划问题，为什么？

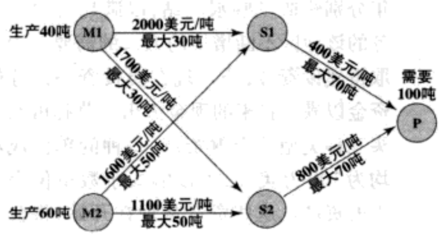
E* b. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型并求解。

c. 以代数的形式总结该模型。

4.16. 法格斯塔(Fagersta)钢厂正在两个矿井开采铁矿石，开采出的铁矿石将运往两个存储仓库，需要的时候，再从存储仓库运往公司的钢铁厂。下图显示了这一配送网络，其中 M1 和 M2 是两个矿井，S1 和 S2 是两个存储仓库，而 P 是钢铁厂。该图同时给出了每个矿井的月产量和工厂的月需求量，以及运输成本和每条路线每个月各运输的最大的运量。

管理层现在希望作出规划，使得通过配送网络将铁矿石从矿井运到工厂的运输能够最经济地实现。

a. 判别该问题中所有必须表示成确定需求约束的要求。




E* b. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型并求解。

c. 以代数的形式总结该模型。

4.17* 菲力斯有 60000 美元储蓄，打算将这些钱用于投资，在今后的 5 年里购买一种退休年金。于是，向他的财务顾问咨询，财务顾问为他建议了固定收入的投资，下面分别以 $A$、$B$、$C$、$D$ 表示。

投资 $A$ 和 $B$ 在今后 5 年的每年年初（分别称为 1 到 5 年）可以买入。$A$ 的每 1 美元年初的投资在两年后将收回 1.40 美元（收益 0.40 美元），并刚好来得及再投资。$B$ 的每 1 美元年初的投资在 3 年后将收回 1.70 美元。

投资 $C$ 和 $D$ 在今后的 5 年只有一次购买机会，$C$ 在第二年初的每 1 美元投资在 5 年后将收回 1.90 美元。而 $D$ 在第 5 年初购买，年末回收 1.30 美元。

菲力斯希望能够知道，怎样的投资组合会使他在第 6 年年初拥有最多的累积的钱。

尽管这不是一个网络配送问题，但是该问题的所有的函数限制均可表示成为确定需求的约束。为此，假设 $A_t$、$B_t$、$C_t$、$D_t$ 分别表示在 $t$ 年的年初可购得的并且在第 5 年年底前投资将收回的各种类型的投资所投入的数量。同样，用 $R_t$ 表示 $t$ 年所拥有的但未投出的钱（可以在接下来的年份中投资）。这样，在 $t$ 年年初的投资加上 $R_t$ 一定等于那时可以获得的投资的数量。用上述的相关的变量，写出每年年初的等式，从而得到：

a. 该问题的五个确定需求的约束。

b. 为该问题建立一个完整的代数形式的线性规划模型。

E* c. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型并求解。

4.18. 美坦科（Metalco）公司生产一种新的合金，新合金的成分为 40% 的锡、35% 的锌和 25% 的铅，这些原料从另外一些可获得的合金中取得，这些合金的成分如下表所示：

| 成　分 | 合金 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 锡的百分比 | 60 | 25 | 45 | 20 | 50 |
| 锌的百分比 | 10 | 15 | 45 | 50 | 40 |
| 铅的百分比 | 30 | 60 | 10 | 30 | 10 |
| 成本（$/lb） | 22 | 20 | 25 | 24 | 27 |

目标是要确定各种合金的比例，以使得新产品的产生成本最低。

a. 指出该问题中所有需要表示成为需求确定约束条件的要求。

E* b. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型并求解。

c. 写出该模型的代数形式的线性规划模型。

4.19. 伟吉特（Weigelt）公司的三个工厂有剩余的生产能力，而公司正准备生产一种新产品，值得庆幸的是，三个工厂都能生产该产品，因此可以利用剩余的生产能力。该产品可以生产大、中、小三个型号，其单位净收益分别为 420 美元、360 美元和 300 美元。工厂 1、2 和 3 分别有能力每天生产 750、900 和 450 件产品（不管何种型号或各种型号的组合）。

生产过程中的可用存储空间也是限制新产品生产的一个因素，工厂 1、2 和 3 每天可以为该产品提供 13000、12000 和 5000 平方英尺的加工过程存储空间，每 1 单位的大、中、小型的产品所需要的存储空间分别为 20、15 和 12 平方英尺。

销售预测估计每天可销售大、中、小型的产品分别为 900、1200 和 750 件。

如果剩余的生产能力不能被利用来生产该新产品，那么每个工厂都将有一些员工被解雇。为了尽可能避免这种情况，公司决定每个工厂同一百分比的剩余生产能力将用于生产新产品。

管理层希望知道每个工厂所应制造的各种型号的产品数量，以使得利润最大化。

E* a. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型并求解。

b. 写出该模型的代数形式的线性规划模型。

4.20* 一艘运货的飞机有三个用于存放货物的机舱：前、中、后。这些机舱有载货的重量与体积限制，如下表所示：

| 机 舱 | 载货量（吨） | 空间（立方英尺） |
|---|---|---|
| 前舱 | 12 | 7000 |
| 中间 | 18 | 9000 |
| 后舱 | 10 | 5000 |

此外，在每个机舱里的货物重量的比例必须与载货量的比例相同，以保持飞机的平衡。

下面是为一架飞机所准备的四种货物：

| 货物 | 重量（吨） | 体积（立方英尺/吨） | 利润（美元/吨） |
|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 500 | 320 |
| 2 | 16 | 700 | 400 |
| 3 | 25 | 600 | 360 |
| 4 | 13 | 400 | 290 |

目标是要确定每种货物的运载量以及在各个机舱中如何分配，使得一个航班的收益最大化。

E* a. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型并求解。

b. 写出该模型的代数形式的线性规划

模型。

4.21. 康复特公司是一家生产冬季手套的公司，其手套提供给家庭的所有成员，包括男、女、儿童。他们希望能够确定最优的产品类型的组合。

公司的员工成立了工会，全职工人每周工作40小时。此外，根据工会协议的规定，全职工人的人数不能少于20。可以雇用兼职工，但必须符合工会限制：(1)兼职工每周工作20小时；(2)全职工与兼职工的人数比例必须大于2。

所有型号的手套都是以百分之百的真牛皮制造的，公司与一个皮料供应商有长期协定，根据这一协定，公司每周可以得到5000平方英尺的牛皮。原料需求、人工需求以及售出的每单位手套的毛利润均如下表所示(单位：美元)：

| 手套 | 需要材料(平方英尺) | 需要人工(分钟) | 毛利(每双) |
|---|---|---|---|
| 男式 | 2 | 30 | 8 |
| 女式 | 1.5 | 45 | 10 |
| 儿童 | 1 | 40 | 6 |

全职工的工资为每小时13美元，兼职工为10美元。公司的管理层希望知道如何组合各种产品的型号以及要雇用的全职工与兼职工的人数，才能使净利润，即销售的毛利减去劳动成本最大化。

E* a. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型并求解。

b. 将该线性规划模型以代数形式总结。

E*4.22. 奥克斯布里奇(Oxbridge)大学有一台大型机，以供全体教员、博士生、研究助理的研究之用。在工作的时间里，必须有一名操作员负责操作和维护，以及提供一些编程服务。计算机设备处主任贝里尔·英哥拉姆管理这一设备的运作。

现在是秋季开学的时间，贝里尔面临如何分配操作员的问题。因为，所有的操作员都是在校内招聘的，而他们每天只能工作有限的时间。

目前有6个操作员(4个本科生、2个研究生)。因为他们的电脑经验以及编程能力不一样，所以，他们的工资也不同。下表给出了他们各自的工资(单位：美元)以及每天可得的工作时间。

| 操作员 | 每小时工资 | 最多可获得的工作时间 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 星期一 | 星期二 | 星期三 | 星期四 | 星期五 |
| K. C. | 10.00 | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 |
| D. H. | 10.10 | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 |
| H. B. | 9.90 | 4 | 8 | 4 | 0 | 4 |
| S. C. | 9.80 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 |
| K. S. | 10.80 | 3 | 0 | 3 | 8 | 0 |
| N. K. | 11.30 | 0 | 0 | 0 | 6 | 2 |

每个操作员必须保证一周最少工作时间，以保持对操作的熟练程度。这一标准是硬性规定的，本科生(K. C.、D. H.、H. B. 和 S. C.)为每周8小时，而研究生(K. S. 和 N. K.)为每周7小时。

计算机周一到周五每天从上午8点开到下午10点，任何时候都必须有一位操作员在职。在周末，计算机将由其他人管理。

因为预算很紧，贝里尔不得不考虑将成本最小化，她希望知道每天分配给每位学生的工作时间。为该问题建立电子表格模型并求解。

4.23. 斯利姆—道温(Slim-Down)制造公司生产营养的减肥饮料，其中一种草莓混合饮料将设计成为主食。这种饮料包含多种成分，成分的资料在下表给出：

| 成分 | 每匙含脂肪热量 | 每匙总热量 | 每匙维他命(毫克) | 每匙含加稠剂(毫克) | 成本(美分/匙) |
|---|---|---|---|---|---|
| 草莓调味剂 | 1 | 50 | 20 | 3 | 10 |
| 奶油 | 75 | 100 | 0 | 8 | 8 |
| 维生素 | 0 | 0 | 50 | 1 | 25 |
| 人工甜味剂 | 0 | 120 | 0 | 2 | 15 |
| 加稠剂 | 30 | 80 | 2 | 25 | 6 |

营养的要求为：总的卡路里必须在380~420之间，来自脂肪的卡路里不得超过20%。必须至少含有50毫克的维生素。为了能有较好的口感，每一汤匙的人工甜味素必须由相应的两汤匙的草莓调味剂与之相配。此外，为了适当的稠度，必须在饮料中加入15毫克的加稠剂。

管理层希望能够确定该饮料的各种成分的含量，从而能以最小的成本达到上述的要求。

a. 指明该问题中形成资源约束、收益约束以及确定需求的约束的各种要求。

E* b. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型并求解。

c. 将该线性规划模型以代数形式总结。

4.24. 乔伊斯和马文经营为学前儿童提供的幼儿班，他们正想确定如何来搭配儿童的午餐。他们一方面想要减低成本，另一方面又要使午餐达到一定的营养标准。午餐的各种配料为：花生酱、果子冻三明治、牛奶以及桔子汁。每一种食物的营养成分和相应的成本在下表中给出：

| 食　物 | 脂肪热量 | 总热量 | 维生素 C (mg) | 蛋白质 (g) | 成本 (美分) |
|---|---|---|---|---|---|
| 面包(1 片) | 10 | 70 | 0 | 3 | 5 |
| 花生酱(1 匙) | 75 | 100 | 0 | 4 | 4 |
| 草莓冻(1 匙) | 0 | 50 | 3 | 0 | 7 |
| 三明治(1 份) | 20 | 60 | 0 | 1 | 8 |
| 牛奶(1 杯) | 70 | 150 | 2 | 8 | 15 |
| 桔汁(1 杯) | 0 | 100 | 120 | 1 | 35 |

儿童的营养要求为：每一个儿童要获取的卡路里为 400 ~ 600，其中来自脂肪的卡路里不能超过 30%。每位儿童要消耗 60 毫克的维生素 C 和 12 克的蛋白质。此外，为了制作三明治，每位儿童必须要两片面包，花生酱的量至少果子冻的 2 倍，以及至少 1 杯饮料（牛奶或桔子汁）。

乔伊斯和马文希望能合理地搭配各种食物，从而在达到营养标准的前提下，使得成本最小化。

a. 指出该问题中形成资源约束、收益约束以及确定需求的约束的各种要求。

E* b. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型并求解。

c. 将该线性规划模型以代数形式总结。

# 案例 4.1　秋季流行服饰与衣料的准备

从办公室的十层大楼里，凯瑟琳·拉里俯视着下面忙忙碌碌的人流，在充塞着黄色出租车的街道以及乱放着一些卖热狗的摊位的人行道上，成群的纽约人来来往往，好不热闹。在这闷热的暑天里，她注视着各类女性的穿衣时尚，心里想的却是这些人在秋季将会选择怎样的款式。这并非是她的一时的灵感，而是她工作的重要的一部分。因为她拥有并经营着一家妇女精品时装公司——时尚隧道（TrendLines）公司。

今天对她来说是很重要的，因为她将与生产部经理泰德·罗森碰面，一起商讨下一个月秋季生产线的生产计划，特别是在一定的生产能力的基础上确定各种服装的生产量。制定下个月的周密的生产计划对于秋季的销售是至关重要的，因为这些产品在 9 月份将会上市，而妇女们通常在服装一上市时就会购买大部分秋天的服饰。

凯瑟琳回转身，走到宽大的玻璃台旁去看铺在上面的大量的资料及设计图。她扫视着 6 个月以前就设计出来的服装图样、各种样式所需要的材料，以及在时装展上通过消费者调研取得的各种样式的需求预测。现在，她还记得当时是如何设计图样并将样品在纽约、米兰和巴黎的服装展上展出，那些天可真是兴奋而痛苦。最后，她付给 6 个设计者的总酬金为 860000 美元。除此外，每次时装展的费用为 2700000 美元，包括雇用职业模特、发型师、化妆师，以及衣服的裁制与缝纫、展台背景的设计、模特的走步与排练、会场的租用。

她研究着衣服的样式和所需的材料。秋季的服装包括职业装和休闲装，而每种服装的价格是由衣服的质量、材料的成本、人工成本、机器成本，以及对该产品的需求与品牌的知名度等因素来确定的。

秋季的职业装包括：

| 服装种类 | 需要的材料 | 价格(美元) | 人工及机器成本(美元) |
|---|---|---|---|
| 羊毛裤 | 羊毛 3 码<br>衬里醋酸纤维 2 码 | 300 | 160 |
| 开司米汗衫 | 开司米 1.5 码 | 450 | 150 |
| 丝绸上衣 | 丝绸 1.5 码 | 180 | 100 |
| 丝绸女背心 | 丝绸 0.5 码 | 120 | 60 |
| 裙子 | 人造纤维 2 码<br>衬里醋酸纤维 1.5 码 | 270 | 120 |
| 羊毛夹克 | 羊毛 2.5 码<br>衬里醋酸纤维 1.5 码 | 320 | 140 |

秋季的休闲装包括：

| 服装种类 | 需要的材料 | 价格(美元) | 人工及机器成本(美元) |
|---|---|---|---|
| 天鹅绒裤子 | 天鹅绒 3 码<br>衬里醋酸纤维 2 码 | 350 | 175 |
| 棉汗衫 | 棉布 1.5 码 | 130 | 60 |
| 棉迷你裙 | 棉布 0.5 码 | 75 | 40 |
| 天鹅绒衬衫 | 天鹅绒 1.5 码 | 200 | 160 |
| 带纽扣上衣 | 人造纤维 1.5 码 | 120 | 90 |

她知道已经为下个月采购了下面的这些材料：羊毛 45000 码，开司米 28000 码，丝绸 18000 码，人造纤维 30000 码，天鹅绒 20000 码，棉布 30000 码。各

种材料的价格如下图所示：

| 衣　　料 | 每码价格(美元) |
|---|---|
| 羊毛 | 9.00 |
| 醋酸纤维 | 1.50 |
| 开司米 | 60.00 |
| 丝绸 | 13.00 |
| 人造纤维 | 2.25 |
| 天鹅绒 | 12.00 |
| 棉布 | 2.50 |

多余的材料(不包括下脚料)可以运回给衣料供应商,并得到全额的偿还。

凯瑟琳知道生产丝绸上衣和棉汗衫会产生相当的多余边料。每件丝绸上衣和每件棉汗衫分别需要2码的丝绸和棉布,而其中分别有0.5码的边料。她不希望浪费这些衣料,因此打算利用矩形的丝绸和棉布的边料来生产丝绸女背心和棉的迷你裙。这样,每生产一件丝绸上衣就可以生产一件丝绸女背心。同样,每生产一件棉汗衫就可以生产一件迷你裙。要注意的是,生产背心和迷你裙并不一定需要首先生产相应数量的丝绸上衣和棉汗衫。

需求的预测表明其中一些产品的需求是有限的。天鹅绒的裤子和衬衫因为是一时的流行,预测分别只能销售5500件和6000件。公司不会生产超过预计需求的产品数量,因为,一旦该式样不再流行,就很难再卖出去。并且,因为公司并不需要满足所有的需求,所以,公司可以生产少于需求数量的产品。开司米汗衫因为价格较高,预计也只能销出4000件。丝绸上衣和背心的需求也是有限的,因为很多女性认为丝绸较难护理。公司预计大约可销出12000件丝绸上衣和15000件丝绸背心。

预测表明羊毛裤、剪裁考究的衬衫、羊毛夹克的需求是很大的,因为这些是职业行头的必需品。羊毛裤和羊毛夹克的需求分别为7000件和5000件。凯瑟琳认为必须满足该部分60%的需求,以保持客户的品牌忠诚度,为以后的业务考虑。尽管剪裁考究的衬衫的需求是无法预测的,凯瑟琳认为必须至少生产2800件。

a. 泰德打算说服凯瑟琳不生产天鹅绒衬衫,因为这种流行服装的需求是很少的。而它的固定设计费用和其他成本高达500000美元,销售该样式的净贡献(售价－材料成本－人工成本)必须能够抵消总成本,他认为,即便是满足了最大的需求,该产品也不能产生任何利润。你认为泰德的观点如何?

b. 在给定的生产、资源和需求约束的条件下,为该问题建立线性规划模型并求解。

在作最后的决定之前,凯瑟琳打算先独立地看一下下面几个问题。

c. 衣料的批发商通知凯瑟琳,因为天鹅绒的需求在今后将下降,所以,天鹅绒的衣料在售出后是不能退回的,也就无法得到偿还金。这一点对整个生产计划将会造成怎样的影响?

d. 造成上面b和c的解的差异的最直接的经济上的解释是什么?

e. 因为羊毛夹克的样式以及所用的羊毛衣料很难缝制,所以,缝纫工在缝制夹克的手臂和衬里时,很是麻烦,因此而增加的人工成本与机器成本为每件80美元,在这个成本下,公司为了能使利润最大化,应该作出怎样的生产计划?

f. 衣料的批发商通知凯瑟琳,因为他的一个客户取消了10000码的纤维衣料订单,他可以提供该批产品给凯瑟琳。这样的话,凯瑟琳又该如何制定其生产计划,以使得利润最大化?

g. 公司认为它可以将9月份未售出的产品在11月的一次大型削价销售活动中以原价的60%全部售出,这就是说,在11月的削价活动中可以售出的产品数量是无限制的(上面所提到的需求上限仅对9月、10月份有效)。这样的话,为使利润最大化的新的生产计划又会是怎样的?

## 案例4.2　新的边界

罗伯·利蒙,美洲银行的总裁,疲惫地擦了一下眼睛,斜视着他书房里的钟。已经是凌晨3点了。在前面的数个小时里,罗伯熟读了美洲银行在前三个季度的财务报表。美洲银行是一家中等规模的银行,分支机构遍布美国,但现在,它步履艰难,陷入了困境。该银行提供各种的资金交易、储蓄、投资和信贷服务,在过去的几年里,净收入不断减少,而且这种趋势还将继续下去。该银行的业务正逐渐被一些非银行金融机构或国外的竞争者蚕食。

美洲银行并不是惟一亏空的银行,从每日的工业读物中,罗伯知道在美国银行的领域内,来自非银行金融机构以及一些外国同行的不断加剧的竞争,使得许多美国银行处于亏空的境地。这些非银行机构和外国的银行专门从事某一特殊服务业务,通过提供更有效、便利而价格却更低廉的服务,获取了相应的市场。例如,现在大型的公司都从外国的银行

和商业信贷处(paper offerings)获得贷款,而富有的美国人都向货币市场基金投资。美国的银行正面临着如何才能使自己与其他非银行金融机构和外国竞争者区别开来,从而使自己有特色的问题。

罗伯认为区别于竞争对手的一个对策是提供竞争对手所没有的服务——交易服务。他确定,在自动取款机之后又会有一种便利的交易方法,这种方法就是通过网络的电子银行。通过网络,客户可以直接利用家里和办公室里的电脑来进行交易。网络的大发展,已经使得许多人懂得如何使用万维网。这样,他总结出,如果美洲银行提供网络上的银行交易的话,可能会吸引新的消费者。

在罗伯决定开发网上业务之前,他必须知道网络银行的市场以及美洲银行可以通过网络提供的服务。例如,客户是否只能通过网络查询账户以及交易信息,还是可以获得存取服务? 银行是否需要实时提供股价的行情,收取很少的一笔手续费而允许客户在网上下订单,以吸引一部分投资市场上的客户?

因为美洲银行没有从事调研业务,所以决定将这一调研项目交给一个专业的咨询公司 。该项目收到了好几个咨询公司的投标,罗伯将选择成本最小的一个公司。罗伯为资讯公司列出了一系列的调研要求,为确保公司能够获得实行该策略的所需要的信息。

因为不同年龄段的人需要不同的服务,美洲银行对四个年龄段的人有兴趣。第一类为 18~25 岁,这些人的收入有限,交易量不会很大。第二类为 26~40 岁,这些人收入可观,交易量大,需要大量的住房和汽车贷款,并会在各类证券上投资。第三类为 41~50 岁,这类人与第二类的收入与行为类似,但因为这些人还不适应网络,因此不大可能使用网络银行。最后,第四类人是 51 岁以上的人,这些人渴望安全,并且希望获得退休基金的信息。银行相信这些人是绝对不会使用网络交易的,但银行也希望能够进一步获得这些人的需求信息。美洲银行将会调研 2000 名客户,其中,第一年龄段至少占 20%,第二类 27.5%,第三类 15%,第四类 15%。

罗伯知道网络是近期才发展起来的,一些人甚至还不知道什么是万维网。因此他希望能够知道哪些人使用网络,而哪些人不使用网络。为了保证美洲银行能够获得准确的组合,他要求被调研的人中至少 15% 来自网络普遍使用的硅谷地区,而 35% 来自大城市,那里网络的使用程度一般,20% 来自很少使用电脑的小城镇。

精致调研公司是投标该项目的三家调研公司中的一家,该公司对调研的成本作了初步的估计,每人的调研费用如下表所示(单位:美元):

| 地 区 | 年龄组 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 18~25 | 26~40 | 41~50 | 51 以上 |
| 硅　谷 | 44.75 | 6.50 | 6.50 | 5.00 |
| 大城市 | 5.25 | 5.75 | 6.25 | 6.25 |
| 小城镇 | 6.50 | 7.50 | 7.50 | 7.25 |

精致调研公司对下面几个问题进行了连续的探讨。

a. 建立线性规划模型,在满足美洲银行的调研要求的基础上使成本最小。

b. 如果精致调研公司边际收益是总成本的 15%,它们的投标额将是多少?

c. 在提交了投标书以后,精致调研公司得到通知说,它的标价是最低的,但美洲银行不认同它的结果,罗伯要求被调研的每一地区每一年龄段的人数必须超过 50 人,这样的话,精致调研公司新的标价将是多少?

d. 罗伯认为精致调研公司对 18~25 年龄段以及硅谷地区的取样太多了,因此,他增加了一个新的约束,即,18~25 岁之间的被调研的人数不能超过 600 人,而硅谷地区不能超过 650 人。这样,新的标价又将是如何的?

e. 在计算调研成本时,精致调研公司认识到,对年轻人的调研较为容易。然而,在近期完成的一个调研报告中显示,这个假设是不正确的。对 18~25 岁间的人的调研成本如下表所示,

| 地　　区 | 每人的成本(美元) |
|---|---|
| 硅　谷 | 6.50 |
| 大城市 | 6.75 |
| 小城镇 | 7.00 |

在新的成本下,标价将会是多少?

为了保证达到要求,罗伯作出了更严格的约束,规定各类人的比例必须符合下表:

| 人　　群 | 调查的人群比例(%) |
|---|---|
| 18~25 | 25 |
| 26~40 | 35 |
| 41~50 | 20 |
| 50 以上 | 20 |
| 硅　谷 | 20 |
| 大城市 | 50 |
| 小城镇 | 30 |

f. 在这些限制条件下，精致调研公司的调研成本将增加多少？若以总成本的15%提取边际收益，精致调研公司的报价又将是多少？

## 案例4.3 分配学生和学校

斯普林菲尔德（Springfield）学校董事会打算在年底关闭它的一所中学（包括6年级、7年级和8年级），并在下一年将这些年级的学生分配到另外三所中学去。学校为离校距离超过1英里的所有学生提供上下课的接送服务，因此，为了节省公交费用，学校将对学生进行分配。从该城市的6个居住区到各所学校，每个学生一年的公交费用如下表所示（表中还给出了下一年的其他一些基本数据）。其中，0表示不需要公交服务，而—表示这种分配不可能。

| 地区 | 学生数量 | 6年级的比例 | 7年级的比例 | 8年级的比例 | 每学生的公交成本（美元） | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 学校1 | 学校2 | 学校3 |
| 1 | 450 | 32 | 38 | 30 | 300 | 0 | 700 |
| 2 | 600 | 37 | 28 | 35 | — | 400 | 500 |
| 3 | 550 | 30 | 32 | 38 | 600 | 300 | 200 |
| 4 | 350 | 28 | 40 | 32 | 200 | 500 | — |
| 5 | 500 | 39 | 34 | 27 | 0 | — | 400 |
| 6 | 450 | 34 | 28 | 38 | 500 | 300 | 0 |
| | | | | 学校容量 | 900 | 1100 | 1000 |

学校的董事会规定每个学校里，每一年级的学生人数必须在总人数的30%～36%之间，上表显示了第二年每个地区学校的各年级的学生比例。可以划出学生上学的地区界限，以便于在多所学校之间分配学生。但是，不管如何分配，上表所要求的每所学校的各年级的比例必须保持。

假设学校雇用你作为管理科学的顾问，帮助学校决定如何在各所学校之间分配学生。

a. 为该问题建立线性规划模型并求解。
b. 你给学校董事会的最终建议是什么？

在看了你的建议之后，学校董事会对将所有的居民区都在各个学校间划分开来这一点表示疑虑，他们认为，应该尽可能的让邻里的学生在同一所学校里。

c. 根据这一点调整你的建议，使同一个地区的学生尽可能分配在同一所学校里（加入这一限制可能会使你不得不取消另外一些约束）。这样做会增加多少公交成本？（在案例9.4中将会对这一类分析进行进一步探讨）

学校董事会正考虑减少一些公交以减低成本，选项1是仅仅取消1～1.5英里的学生的公交服务，这些学生的单位成本如上表所示为200美元。选项2是同时取消1.5～2英里距离的学生的公交服务，这些学生的估计年成本为300美元。

d. 将a中的模型加入选项1重新考虑，并求解。将结果与b中的结果相比较，包括公交总成本的减少。
e. 以选项2代替选项1重复步骤d。

现在，学校董事会将在三种计划（目前的这一选项，以及选项1、选项2）中作出选择，其中，最重要的因素是成本。但是，学校对另一个因素也给予了同等的重视，即，因为迫使一些学生步行或骑车上学（超过1英里，特别是超过1.5英里）所引起的不方便和安全问题。因此，学校决定选择能使两个因素达到最好的平衡的计划。

f. 从b、d、e的结果中总结出与学校董事会要作出决策的两个因素有联系的重要的信息。
g. 你认为应该作出怎样的决策，为什么？

注意：这一案例在后面的章节（案例5.4和案例9.4）中将会继续讲解，因此建议你将该问题的分析以及基本的电子表格模型存盘。

# 案例4.4　科威特 al-Manakh 证券市场[①]

科威特 al-Manakh 证券市场 1983 年的崩盘造成了近 940 亿美元的债务,使整个国家处在经济的恐慌之中。科威特的司法机关面临着一个几乎是无法解决的问题,即如何在 29000 张银行未兑现事后填日期的支票和银行的借据(IOUs)所涉及的投资者之间分配刑事和财政责任。

事后填日期的支票和银行的借据,代表了投机的科威特投资者和贸易者,促成了市场的繁荣,也导致了巨大的崩溃。开发一种方法来解开复杂的债务网可能会节约几年时间,并且节约 100 亿美元的法律和诉讼费用。此外,在多角的债务中可以抵消一部分债务,从而减小总债务的规模,降低市场崩盘对整个国家经济的消极影响。

科威特的政府认识到这个复杂的多角债务必须尽快以公平的、对国家经济有利的方式解决。财政和石油部长 Shaikh Ali AI-Khalifa AlSabali 向科威特的科学研究协会求助,让他们帮着解决这个问题。

## 科威特 al-Manakh 证券交易所的产生

1979 年,科威特的商业公司和投机商建立 al-Manakh 证券市场以取代原先受政府严格控制的科威特股票市场(KSE),因为,1977 年 KSE 经历了一次很大的崩盘后,政府参与,严格控制股市上的高度投机的投资者,这些投机者利用高的流动性以及因为汇率的动荡而造成的科威特在国外投资的微薄的收益来投机。因石油而致富的科威特人除了在股市投资以外,很少有其他的投资渠道。但是,在股市开始繁荣的时候,投机者就进入了,投机者的活动促使 KSE 股市很快崩盘。投机者为投机开出事后填日期的支票,这就意味着股市的繁荣是由实际上并不存在的资金撑起的。一旦失去控制,那么一个投资者不按期付款,就可能引起一系列的破产。支票和借据是必须以应收债款和预期的市场回报来兑现的,而投资者显然无法承兑他们的支票和借据。

在股市崩盘之后,复杂的未偿债务问题使得 KSE 落入了谷底,并且科威特的经济也是一片恐慌。结果,政府以 5.25 亿美元为债权人担保。在这次崩盘之后,政府加强控制,制定了一些新的法律来严格的限制使用事后填日期的支票来阻止进一步的投机商业活动。

## 造成 al-Manakh 崩盘的原因

科威特政府拥有全国几乎近半的股份制公司,科威特人除了投资石油以外,几乎没有其他的投资机会。在 1979 年第三次石油高峰之后,富裕的科威特人享受了一段时间的繁荣,公共支出和投资的需求高涨。流动性的增加以及有限的投资渠道又造成了另一个投资泡沫。因为,在国外的投资收益是很低的,所以,投资者都将目光投向 al-Manakh 证券交易所,在那里开展 1977 年以前 KSE 上出现的商业投机活动。

此时,al-Manakh 交易所是自由的,没有政府的规定与监管,因此,事后填日期的支票使用和股价一起不断飙升。出于投机的目的,商人为了避开科威特政府对于成立新公司的限制,在邻近的阿拉伯国家成立了许多空壳公司。投资者将资金大量的注入。在股市爆炸的顶点,35 亿股股票在交易中,是 KSE 8.37 亿股的 4 倍多。对于 al-Manakh 市场里 6000 名个人和公司投资者来说,股价在几个星期内增长百分之百是不足为奇的。到 1982 年,al-Manakh 交易所已经失去了控制。未受任何训练、未得到认定的经纪人在经手交易着天文数级市盈率的毫无价值的股票。一团混乱的事后填日期的支票推波助澜,而商人使用一些粗糙的甚至是不合法的结算方法。接下来的不可避免的崩盘,使商人们陷入了一大堆事后填日期的支票和借据中,不知道到底谁应该为每一交易负责。每一个商人都受到牵连,因为他们为了能够在事后填日期的支票到期之前卖出股票,获得收益,都曾开出过事后填日期的支票。

## 崩　盘

在 1982 年 8 月,18 家主要的商业公司中的一家拒绝偿还债务,直接导致了泡沫的破裂。在那一个月,交易的股票从 6.02 亿美元下降到 7200 万美元,因为股票的价格均已下降了 60% ~98%。

股市的崩盘对科威特的经济是一个巨大的震惊,因为一开始,不管是中央银行还是政府都没有意

① 资料来源:本案例是 INFORMS 教学案例系列中用于课堂讨论的材料。本案例是由 Sam Ridesec 在加拿大 University of Western Ontario 的 Richard Lvey 商学院的 Peter Bell 教授的指导下完成。版权(1998)属于 Institute of Operation Research and the Management Sciences。材料的复印必须得到版权所有者 INFORMS 的允许。

识到崩盘的规模以及接下来所拖欠的债务。商人的手中只有一大堆毫无价值的空壳公司的股票以及一些双向的借据和事后填日期的支票。

第一次计算出的拖欠的债务数据为 940 亿美元,是科威特国内生产总值的 3.4 倍。这一数据的大部分是近 29000 张事后填日期的支票面值的总和。此外,总债务的 95% 仅仅涉及 18 个科威特主要的商业公司,这些公司均陷入了一团糟的多角债务中。

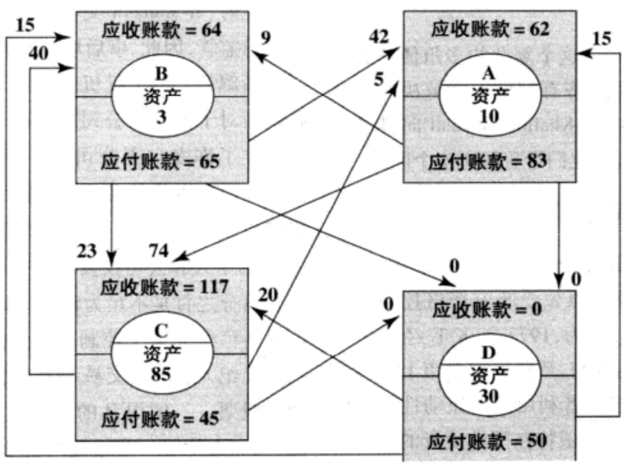
## 扭转形式的尝试

在 1982 年后半年,政府采取了一些措施来治理这一问题。处理了一家票据交易所来收集、匹配、核实和系统化个人和经纪人的财务账目,并留出 17 亿美元信托基金来补偿小投资者(损失少于 170 万美元)。最后,成立仲裁小组来实现结算,以及商人自愿达成结算协议的实行。

但不幸的是,政府最初的强迫商人还债的解决方法并没有奏效。许多商人破产,很少有人在收到他们的应收账款前会愿意还债,特别是只能以应收账款来还债的商人。在这样的形式下,政府成立了结算公司来处理公司所转递过来的股票交易。这个公司成立了一个特别任务组,成员为:A. A. Eliman(旧金山州立大学)、M. Girgis(LTC 技术—经济研究集团公司),以及 S. Kotob(科威特科学研究学会)。在科威特石油和财政部部长的监管之下,该任务组开始处理这一问题,解开各个商人之间的纠纷和结算债务。

## 理顺商人之间的纠纷

图 1 显示了商人之间的纠纷,每个商人都有一些资产、一些无法从其他商人那里获得的(潜在的)应收账款,以及一些未偿付的(潜在的)债务。




为了降低风险,每一个商人的资产都可以分成四类,分别为现金与 KSE 股票、房地产、可以从其他的商人那里获得的应收账款以及空壳公司的股份。对于这个例子,考虑如下表所示的四种资产:

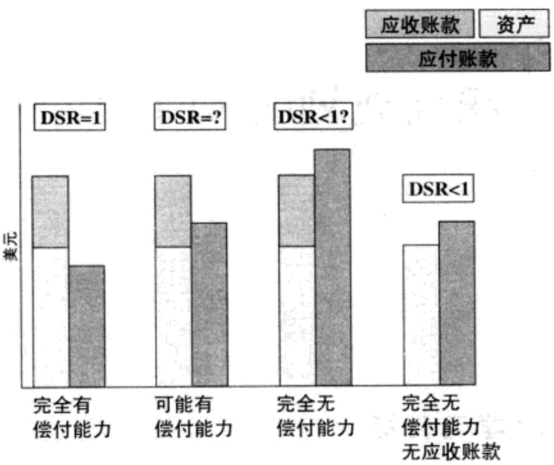
| | 商　人 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D |
| 现金和 KSE 股票 | 1 | 0.6 | 15 | 5 |
| 房地产 | 4 | 1.2 | 24 | 7 |
| 可收回的应收账款 | 3 | 0.2 | 27 | 3 |
| 海湾公司的股票 | 2 | 1 | 19 | 15 |
| 总资产 | 10 | 3 | 85 | 30 |

在这种情况下,三个商人(A、B、D)在不知道能收回多少应收账款之前是不可能确定他们愿意偿还的债务的。因此,在没有外来的干预决定谁应该给谁支付多少的情况下,这个问题是不可能解决的。此外,还有如何处理各类资产以及各种资产的支付比例的问题。

任务组首先定义了债务的结算比例(DSR):

$$\text{DSR} = \text{最小化}\left[\frac{\text{资产} + \text{实际收到的账款}}{\text{实际支付}}, 1\right]$$

为了确定各个商人必须兑现的债务,任务组建立了一系列的等式,来计算其 DSR(决定于可实现的应收账款),计算每个商人的 DSR 需要先知道他们会支付多少。该方法的另一个问题是,要将有偿付能力的商人的支付限制在他们所实际拥有的资产内。这样,在不知道各商人可实现的应收账款的条件下,任务组也可以使用 DSR 来将各商人分类(图 2)。




## 解开各商人之间的纠纷的一种方法

如何确定各商人的 DSR 是一个两难的问题，在考虑了这一点之后，任务组认识到如果能够确定 DSR 就能解决这一纠纷问题，因为必须首先计算出各商人之间的支付，才能明确每人的实际应收账款。但是，必须确定决定支付的基本原理。应该怎样进行支付，可能有哪些支付方 RRR 法的选项，哪一种可能最公正和/或对国家经济最有利？

考虑到的解决支付纠纷的基本原理包括：

- 限制破产的数量
- 尽量偿还债务
- 取得对所有债权人的最大可能的支付
- 使无偿付能力的商人的 DSR 最大化
- 使无偿付能力的商人的赤字（资产 + 应收账款 − 应付账款）最小
- 确定最有可能不会使资产进一步贬值的 DSR
- 保持 18 家最大的无偿付能力的商人的 DSR 相等的条件下，确定 DSR 值

任务组还需要确定以下的一些因素：

- 所有的商人，根据他们在财政上的强弱势，在 al-Manakh 上的股票交易以及各自所选择的交易对象，一律平等地对待和处理
- 使各商人的偿债能力最大化，可以最大限度地减少崩盘对经济的影响
- 任一商人的 DSR 不会大于其他人的 DSR，因为如果那样的话，该商人的支出就会大于所得
- 按照科威特法律的规定，对多个债权人的债务必须以债务人资产的相同的比例来偿付
- 所有有偿付能力的商人都必须以现金偿付债务（即使必须清算其他的资产）
- 该结算方法必须防止任何拥有货币的商人从中获取额外的净收益

为了获得一个公正的解决方法来解开这一债务网并且减少经济的实际的损失，任务组要作出许多的决策。如果不能找到一种可信的方法来解决这一问题，那么，29000 张事后填日期的支票和借据中每一张的裁决都包括有三个法院的案件：刑事法院案件、商业法院案件、破产法院的案件。在这些法律程序以后，有无数的科威特企业家将会被送进监狱，其中包括一些具有强大的政治与经济关系的人，这将使政府花费 3.8 亿美元，并且要求司法机关的裁理能力在 5 年内扩大 18 倍。最重要的是科威特的经济恐慌与危机的局面在这一问题没有解决之前是不会好转的。时间是最关键的因素。

a. 考虑下面几个事项：
   1. 按照案例分析中所给出的例子，不考虑资产的分类，确定一种分配支付的方法。
   2. 总支付应如何在各种资产类型中分配？

b. 讨论以下几个问题：
   1. 哪些管理科学的工具可有助于该问题的解决？
   2. 与法律和政治的程序相比，一个基于模型的方法的优点是什么？
   3. 指导解决支付纠纷的最适当和公正的基本原理是什么？
   4. 应该考虑哪些限制条件？
   5. 各类资产应该如何处理？

CHAPTER

# 5 线性规划的 what-if 分析

## 学习目标

在完成本章学习后,你应该掌握:

1. 解释什么是 what-if 分析。
2. 总结 what-if 分析的好处。
3. 列举可以用 what-if 分析研究的各种模型变化。
4. 描述如何用电子表格模型来进行各种 what-if 分析。
5. 用 Solver 表格系统地分析当一个或两个数据单元格的值发生变化带来的影响。
6. 找出在不改变最优解的前提下,目标函数的一个系数的允许变化范围。
7. 评估目标函数的系数同时变化的变化范围,使原始最优解不变。
8. 当一个或多个约束函数右端值发生变化时,预测给目标单元格值带来的影响。
9. 在使预测值持续有效的前提下,确定单一约束函数右端值的允许变化范围。
10. 在使预测值持续有效的前提下,确定多个右端值允许变化的范围。

第 2 章和第 4 章介绍了如何为各种管理问题建立线性规划模型,并用 Solver 来求解模型的最优解。读者或许会认为这就是线性规划的全部内容,管理者一旦得到最优解,就会实行相应的解决方法并转而关心其他事情。而实际情况并不是这样的,开明的管理者会对线性规划提出更高的要求,而线性规划也会提供给他们更多的信息,这一点,你在学完本章之后就会明白了。

最优解一般只是针对某一特定的数学模型,而数学模型只是实际问题的一个粗略的抽象。除了找到最优解之外,管理者对其他很多的问题更为关心。线性规划的目的就是,对未来进行各种各样的假设,在这些假设下,测试各种管理方法可能产生的结果,

而通过对各种结果的深入分析来指导管理者作出最终的决策。通常,在取得最初版本模型的最优解之后,进行分析才能取得对问题深入的认识。这种分析称为 what-if 分析,因为其中所涉及的问题主要是:如果对未来情况的假设变动的话,最优解将会有怎样的变化?在阐述 what-if 问题时,电子表格发挥了至关重要的作用。

本章将重点介绍 what-if 分析所提供的各类信息以及这些信息对管理者的价值。5.1 节为内容概要,5.2 节中将重新引用伟恩德玻璃制品公司产品组合的案例研究(2.2 节),来说明在这种情况下所需要进行的 what-if 分析,接下来的几节中,会不断完善对该案例的研究。

## 5.1 what-if 分析对管理者的重要性

在前面几章的线性规划例子中,线性规划电子表格模型必需的全部数据都是已知的[回想一下,这些数据被称为是模型的参数(parameters of the model)]。实际的应用却没有这样简单与直接,为了获取所需的数据必须付出相当多的时间与心血。即使是这样,有时也只能得到模型参数粗略的估计值。

例如,在伟恩德玻璃制品公司的例子中,模型的两个参数是目标函数的两个系数,分别表示两种新产品的单位利润。这两个参数的估计值分别为:门的单位利润 300 美元,窗的单位利润 500 美元。但是,这两个数据的大小是受很多因素影响的,包括原材料的成本、生产量、运输、广告,以及其他因素,如市场对新产品的接受度和竞争者的数量。有些因素只有在线性规划研究已经完成,且新产品上市一段时间之后,才能对其作出真实精确的测量。

因此,在伟恩德公司的管理者作出最终的决策之前,管理者势必想要知道如果这些单位利润的估计值与实际情况相差很多,会有怎样的后果。例如,如果门的单位利润不是 300 美元,而是 200 美元,最优解将会是什么?估计值可以在什么范围内变动,而不会改变最优解?5.3 节将讨论仅有一个估计值不精确的问题,而 5.4 节将讨论所有估计值都不精确的类似问题。

> 如果模型的一个参数估计错误,那么最优解会怎样变化?

如果目标函数中某一系数在一定范围内变动不会改变最优解,那么管理者是能够接受该系数的估计值的。但是,如果系数估计值微小的变动都会改变最优解,管理者就会要求对这一估计值进行重新的定义。有时,管理层甚至会直接参与确定系数估计值,直到达到满意的程度。

下面总结了 what-if 分析最基本的几个作用。

1. 线性规划模型的许多参数在建模时是很难精确确定的,只能是对一些数据的估计(如单位利润)。通过 what-if 分析可以表明,系数估计值必须精确到怎样的程度,才能避免得出错误的最优解,而且,可以找出哪些系数是需要重新精确定义的灵敏度参数(sensitive parameters)(这些参数的微小变化也会带来最优解的变化)。

那么,如何运用 what-if 分析对模型中最重要的参数进行分析,确定各参数的灵敏度呢?这个问题将分几节讲解,5.3 节与 5.4 节对目标函数的系数进行 what-if 分析(目标函数的系数在电子表格的行中,表示各种活动对总绩效测度的单位贡献)。5.5 节与 5.6 节对函数约束的右端值进行该类的分析(函数约束的右端值通常都出现在电子表格的右栏,在≤、≥或=符号的右侧)。

> 如果约束改变了,对最优解会带来什么变化?

事物总是在不断发展变化,即使管理者对目前的估计值很满意,并实施了相应的最优解决方案,问题所处的环境也会很快就改变。例如,一开始,伟恩德公司管理者对门的单位利润为 300 美元的估计值很满意,但是,紧接着,竞争不断加剧,迫使企业降低价格,从而减少了该产

品的单位利润。那么,单位利润的变动是否会影响最优的产品组合呢? 5.3 节中的 what-if 分析表明单位利润可以怎样变动而不会改变最优的产品组合,从而指导管理者的定价决策。此外,如果最优的产品组合不变,就不需要因为系数改变而对问题重新求解。对于伟恩德公司简单的两变量的问题,重新求解不是什么大不了的事情,但是,如果是具有成千上万个约束和变量的问题,能够避免重新求解就是一件大好事。事实上,对大型模型来说,要考虑各种可能的参数改变而不断重新求解也是不实际的。

下面是 what-if 分析的第二个作用。

2. 如果在研究结束之后,问题的条件发生了变化(这是司空见惯的),通过 what-if 分析,即使不求解,也可以表明模型参数的变化是否会改变最优解。

下面几节也对该类 what-if 分析作了详细的介绍。

这几节研究的重点是线性规划模型的参数如何变化会影响最优解。这一类 what-if 分析研究的是最优解对每一参数变化的灵敏度,因此通常都称为灵敏度分析(sensitivity analysis)。灵敏度分析是 what-if 分析的关键部分。

灵敏度分析检验不精确参数对最优解的影响,还只是一种消极的分析方法,what-if 分析更进一步可以进行前摄性的分析,即测试各种可能的管理行为会对模型造成的影响。

> 如果管理政策决策改变的话,会带来什么影响?

如果模型的主要参数是管理层的政策决策而不是管理层所无法控制的外部数值,就可以用这种前摄性分析方法。例如,在伟恩德的产品组合问题中,三个函数约束的右端值(4,12,18)表示了三个工厂每周可用于生产这两种新产品的以小时计的生产时间。管理层可以通过改变这些工厂中已有产品的生产水平而改变三种资源可获得的数量。因此,在得到最优解之后,管理层希望更进一步地知道如果资源的数量以一定的方式改变,三种新产品将会如何影响利润。一个重要问题是仅在一家工厂增加可用生产时间可使利润增长多少。另一个是如果增加所有工厂的可用生产时间,那利润又会增长多少? 如果新产品带来的利润能超过减少一定的旧产品生产量所引起的损失的话,那管理者很可能愿意作此改变。

现在,我们可以总结出 what-if 分析的第三个作用。

3. 当模型特定的参数反映管理政策决策时,what-if 分析可以表明改变这些决策对结果的影响,从而有效指导管理者作出最终的决策。

5.5 节和 5.6 节将会进一步探讨此问题。

在一些情况下,what-if 分析会进一步给管理层提供更有帮助的指导,例如,what-if 分析可以分析出问题环境朝不同的方向发展会产生的结果。但是,这一章将重点放在 what-if 分析上述的三个作用上。

## 问题回顾

1. 线性规划模型的参数是什么?
2. 模型参数的不精确性是如何产生的?
3. what-if 分析表现了估计参数的哪些特性?
4. 对参数仅作大略的估计是否总是不准确的做法,为什么?
5. 为什么模型的参数一开始准确而到了后来就会变得不准确?
6. what-if 分析是如何使得管理层能够为未来不断变化的情况做好准备的?
7. 灵敏度分析的含义是什么?
8. what-if 分析可以为哪种类型的管理政策决策提供指导?

## 5.2　继续研究伟恩德公司案例

现在我们回到 2.2 节中曾讨论过的伟恩德玻璃制品公司的产品组合问题。

先简要回顾一下，该公司准备引进两种极具有市场前景的新产品：

- 一种 8 英尺的铝框玻璃门
- 一种 4×6 英尺的双把木框窗

为了分析出如何组合这两种产品才能取得最大收益，公司的管理科学小组引入了下面两个决策变量：

$D$ = 新式门的生产量

$W$ = 新式窗的生产量

其中的生产量指的是每周的产量。三个工厂将参与制造这两种新产品。根据管理的决策来确定三个工厂将多少的生产能力用于生产原来的产品，从而得出可用于新产品的每周生产时间（以小时计）分别为 4、12、18。在获得每种产品单位利润的粗略估计值（门 300 美元，窗 500 美元）之后，管理科学小组建立了如图 5.1 所示的线性规划模型。模型的目标是通过选择在可变单元格产量（C12:D12）中的 $D$ 和 $W$ 的值，使得在目标单元格总利润（G12）中的每周总利润最大。应用 Solver 求解，可得问题的最优解，如下面的电子表格中所示。

**最优解**

$D=2$　　（每周生产 2 扇门）

$W=6$　　（每周生产 6 扇窗）

利润 =3600　（每周估计总利润 3600 美元）

但是，这些最优解是在假设所有的模型参数[数据单元格单位利润（C4:D4）、单位产品工时（C7:D9）、可用工时（G7:G9）中]都准确的前提下作出的。

管理科学小组的组长，莉萨·泰勒现在正要与管理层会面，根据上面的最优解向管理层提出小组的建议。

### 与管理层关于最优产品组合的讨论

**约翰·希尔（总裁）**：莉萨，谢谢你的初期报告，你们小组工作得很投入啊。

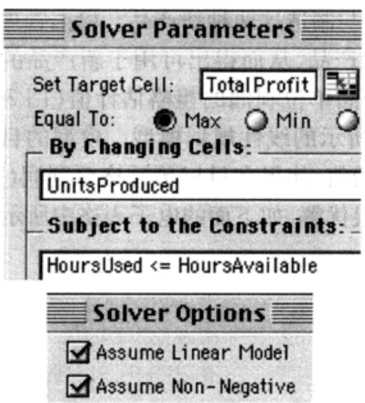
**莉萨·泰勒（管理科学小组组长）**：谢谢您的赞赏，小组的所有成员都为这份报告作出了贡献。但是，我们的工作还没有完成，我要求开这次会的目的就是要问一下您和比尔，还有些更进一步的要求没有。特别要提及的一点是，我们并不能确定填入模型表格中的一些数据。如果这些数据的估计值与实际相差太远，就会影响最终求得的最优产品组合。

**约翰**：我对这一点也很关心，比尔，你一直协助莉萨的小组工作，你认为哪些估计是不确定的？

**比尔·塔斯托（生产部副总裁）**：毫无疑问，关于单位利润的两个估计值是值得商榷的。而其他的一些参数，例如，各个工厂生产每一单位的门或窗所要求的生产时间，是绝对准确的。另外，各个工厂每周可用于生产新产品的工作时间也是很明确的。

**约翰**：单位利润的估计值是如何获得的？

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 2 | 6 | | | $3,600 |




| | E |
|---|---|
| 5 | Hours |
| 6 | Used |
| 7 | =SUMPRODUCT(C7:D7, UnitsProduced) |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:D8, UnitsProduced) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9, UnitsProduced) |

| | G |
|---|---|
| 11 | Total Profit |
| 12 | =SUMPRODUCT(UnitProfit, UnitsProduced) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| DoorsProduced | C12 |
| HoursAvailable | G7:G9 |
| HoursUsed | E7:E9 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C7:D9 |
| TotalProfit | G12 |
| UnitProfit | C4:D4 |
| UnitsProduced | C12:D12 |
| WindowsProduced | D12 |

**图 5.1** what-if 分析之前,最初的伟恩德公司问题的电子表格模型及其最优解。

> 单位利润的最优域表明在最优组合不变的情况下,单位利润最多能变动多少。

**莉萨:**我们从安·莱斯特那里得到初期的定价策略,然后,在安和比尔手下员工的帮助之下,要求会计部门对产品的生产与营销成本作出估计。但是,因为目前这些产品均未投产,所分析的数据都只是来自于现行的同类产品,而后根据新产品的特性,作一些变动和预测。他们给了我们一些数据,但同时说明这些数据是很粗略的,如果要获得精确一些的数据,他们必须做很多工作。

**约翰:**我们可以要求他们做更多的工作,在决定之前,让我们还是先来看看,如果估计的单位利润改变的话,会对产品的组合产生怎样的影响。你是否可以测试出估计单位利润在怎样的范围之内变动不会影响最后的最优解?

**莉萨:**这在线性规划里称为最优域的分析,单位利润的最优域是能够很快找到的。只要一个单位利润的真实值在其最优域的范围之内,而其他估计值是正确的,最优组

合就不会改变。但是,如果最优域的范围很小,那么就必须使估计值更精确一些。

**约翰:** 好的,这样的话,很显然,你们必须将各个单位利润的最优域给我看一下。但是,我还想知道如果两个估计值都不精确的情况下,又将会怎样?

**莉萨:** 可以,任何你所能想到的单位利润的组合都可以拿来测试,并判断出该组合值的变化是否会改变产品的最优组合。

**约翰:** 太好了,但还有一点。

**莉萨:** 是什么?

**约翰:** 比尔给了你各工厂每周可用于生产新产品的生产时间,我注意到你们在电子表格中使用了这几个数据。

**莉萨:** 是的。这些数据均列在约束函数的右端,有什么问题吗?

**约翰:** 没有,我只不过想让你们知道,在这一点上,我们还没有作出最终的决策。你的小组是否可以分析,如果我们改变这些数据的话,会是怎样的情况?如果让一个工厂生产新产品的时间增加1个小时,可以增加的利润是多少?分析类似的一些问题,通过比较增加的利润,或许我们会减少原来产品的生产时间,而增加新产品的生产。

**莉萨:** 没问题。我们会给你这方面的分析资料。

**约翰:** 很好,我们期望能够早点看到最终的报告。

### 管理层对 what-if 问题的总结

下面总结一下约翰所提出的 what-if 分析问题,这些问题是莉萨和她的管理科学小组下一步要研究的内容,这些内容将在下一节中介绍。

1. 如果在伟恩德公司的新产品中,有一个单位利润的估计值是不准确的,将会发生怎样的情况?(5.3 节)
2. 如果伟恩德公司两种新产品的单位利润的估计都是不准确的,又将会怎样?(5.4 节)
3. 如果改变伟恩德公司一个工厂可用于生产新产品的时间,会对结果产生什么影响?(5.5 节)
4. 如果三个工厂每周可用于生产新产品的生产时间同时改变,又会对结果产生怎样的影响?(5.6 节)

### 问题回顾

1. 在伟恩德公司的例子中,哪几个线性规划模型参数是值得商榷的?
2. 模型中的哪些数据只是管理层的初步尝试的管理决策,并且在得到管理科学小组的分析结果之后,管理层有可能要改变这些决策?

## 5.3 只有一个目标函数系数变动

5.1 节指出线性规划模型的许多参数,都只是对实际数据的大致估计,而不可能在研究的时候就获得精确的数值。what-if 分析,更具体地说,灵敏度分析可以表现出每一个估计值

需要精确到何种程度，才能避免得出错误的最优解。

在本节中，我们将重点介绍目标函数系数的灵敏度分析。回顾一下就可以知道，这些系数表示各种活动对总绩效测度的单位贡献。下面，将就上面一节中伟恩德公司管理层所提出的第一个 what-if 分析来展开论述。

**问题** 1：如果伟恩德公司一种新产品单位利润的估计值是不精确的，结果会怎么样？

首先，看一下，如果门的单位利润 300 美元的估计是不精确的情况，假设：

$P_D$ = 门的单位利润

= 电子表格中 C4 单元格中的数据（见图 5.1）

现在，$P_D = 300$ 美元，下面我们来看看在保持最优解 $(D, W) = (2, 6)$ 不变的条件下，$P_D$ 可能的最大值与最小值。这样也就可以看出，$P_D$ 为 300 美元的这一估计可以在多大程度上偏离实际值，而不会产生错误的最优解。

## 使用电子表格进行灵敏度分析

按下 Solve 求解按钮，电子表格马上显示出数据单元格变化带来的影响。

电子表格的一个强大的优点就是可以方便互动地展开各种形式的 what-if 分析，包括本节中提到的灵敏度分析。通过运用 Solver 来求解最优解，模型参数值的改变所造成的影响一下子就可以显示出来。你所要做的只是改变电子表格中的相应数据，并按下 Solve 求解按钮。

为了说明这一点，图 5.2 显示了门的单位利润从开始的 $P_D = 300$ 美元降到 $P_D = 200$ 美元的情况，与图 5.1 相比，最优解没有丝毫的变化。事实上，该问题惟一的变动是电子表格中 C4 单元格的数据从 300 美元降到 200 美元，以及 G8 单元格总利润减少了 200 美元（因为每扇门所提供的利润减少了 100 美元）。因为最优解没有变动，我们可以知道在不影响最优解的前提下，门的单位利润 $P_D = 300$ 美元的最初估计可能太高了。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $200 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 2 | 6 | | | $3,400 |

**图 5.2** 修正的伟恩德例子，门的单位利润 $P_D = 300$ 美元降到 $P_D = 200$ 美元，而最优解不变。

那么,如果这一估计值太小又会怎样呢? 图 5.3 表示了将 $P_D = 300$ 美元增加到 $P_D = 500$ 美元的情况。同样,最优解没有发生变化。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $500 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 2 | 6 | | | $4,000 |

图 5.3　修正的伟恩德例子,门的单位利润 $P_D = 300$ 美元增加到 $P_D = 500$ 美元,而最优解不变。

因为增加或减少最初的 $P_D = 300$ 美元均不会对最优解产生任何的影响,$P_D$ 就不是模型的敏感参数,也就不需要为了保证最优解不会改变而花很大的力气去得到 $P_D$ 的更精确的值。

对 $P_D$ 的研究到此并没有结束,因为 $P_D$ 的实际值很可能就不在 200 ~ 500 美元这一区间内。在保持最优解不变的条件下,$P_D$ 到底可以在怎样的范围内取值呢?

图 5.4 表明,如果 $P_D$ 一直增加,在增加到 1000 美元时,最优解就会发生变化,因此,我们知道最优解发生变化的区域应该在 500 美元和 1000 美元间的某处。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $1,000 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 4 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 6 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 4 | 3 | | | $5,500 |

图 5.4　修正的伟恩德例子,门的单位利润从 $P_D = 300$ 美元增加到 $P_D = 1000$ 美元,最优解改变。

## 运用 Solver Table 进行系统的敏感性分析

为了找出最优解发生变化时对应的 $P_D$,我们可以随机选择 $P_D$ 的值进行测试。但是,更为可行的方法是将 $P_D$ 的值进行系统的改变。作者开发的 Excel 加载宏 Solver Table 正是用

来解决这类分析。你可以在管理科学课件中找到它。

Solver Table 可以解决一系列数据单元格的数值改变的问题。

Solver Table 用来显示当数据单元格内的数值发生变化时，可变单元格和输出单元格的值会发生的变化。

**Excel 窍门：**
当在 Solver Table 的第一栏里填入相关数据单元格的试验值时，请将第一行置空，以便在其他栏第一行的单元格内填入可变单元格和（或）相应输出单元格的公式。

使用 Solver Table，首先将原始表格（图 5.1）扩展成如图 5.5 所示的表格。在表格的第一列（单元格 B18:B29）列出数据单元格的试算值（门的单位利润），将第一格（B18）空着。下几列的标题表明了将要评估的输出值。对每一列，都用第一行（单元格 C18:E18）来写相关的可变单元格和输出单元格的公式，相关的单元格分别是门的产量（C12）、窗的产量（D12）、总利润（G12）。所以 C18:E18 中的公式正如图 5.5 所示的那样。

然后通过点击和拖动单元格 B18 到 E28 选中整张数据表格，然后选择工具菜单中的 Solver Table。在 Solver Table 对话框中（如图 5.5 底部所示），表明输入单元格（C4），也就是第一列单元格有变化的数据单元格。不用输入数据单元格的行因为在这个案例中没有试算的数据要输入该行。

**Excel 窍门：**
打开 MS 课件中的 Solver Table 文件或使用 MS 课件中的安装系统就可以方便的安装 Excel 加载宏 Solver Table。

图 5.6 显示的 Solver Table 是点击了 OK 键后自动生成的表格。在第一列所列出的数据单元格的每一个试算值，Excel 都用 Solver 重新求解，然后将相应的值填入表格的另一栏中（表格第一行的数据来自于改变数据单元格取值前的原始表格）。

表格显示最优解在 $P_D$ 等于 100 和 700 之间保持不变。但是在 700 和 800 之间却会发生变化。下一步，我们可以更系统地考察 $P_D$ 在 700 和 800 之间的值，从而更精确地知道最优解发生变化时对应的 $P_D$ 的值。这里有一个简便一些的方法。能使最优解保持在 $(D,W)=(2,6)$ 的 $P_D$ 的变化范围称为保持最优的允许变化范围（allowable range to stay optimal），简称为最优域（range of optimality）。Excel Solver 在进行几次简单的运算之后，可以显示出一份称为灵敏度分析的报告，其中包含所要求参数最优域的内容。

## 运用灵敏度报告来寻找允许变化范围

目标函数中系数的允许变化范围是指系数在此范围内变化最优解保持不变。

如图 2.19 所示的，在 Solver 求得最优解之后，会给出相应的信息，同时，在其右边列出了它可以提供的三个报告。选择第二项名为灵敏度的选项，就可以得到灵敏度的分析报告。

Excel Solver 得出的灵敏度报告显示了目标函数允许的变化范围。

图 5.7 显示了伟恩德公司案例中的这一部分。终值一栏表明了问题的最优解，第二栏给出了降低了的成本（这里我们不讨论降低的成本，因为它所提供的信息同样也可以从最优域中获得）。接下来的三栏分别表示目标函数中每个系数的最优域。目标函数

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 2 | 6 | | | $3,600 |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | Select these cells (B18:E28) before choosing the Solver Table. |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | | Unit Profit | Optimal Units Produced | | Total | | |
| 17 | | for Doors | Doors | Windows | Profit | | |
| 18 | | | 2 | 6 | $3,600 | | |
| 19 | | $100 | | | | | |
| 20 | | $200 | | | | | |
| 21 | | $300 | | | | | |
| 22 | | $400 | | | | | |
| 23 | | $500 | | | | | |
| 24 | | $600 | | | | | |
| 25 | | $700 | | | | | |
| 26 | | $800 | | | | | |
| 27 | | $900 | | | | | |
| 28 | | $1,000 | | | | | |

| | C | D | E |
|---|---|---|---|
| 16 | Optimal Units Produced | | Total |
| 17 | Doors | Windows | Profit |
| 18 | =DoorsProduced | =WindowsProduced | =TotalProfit |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| DoorsProduced | C12 |
| TotalProfit | G12 |
| WindowsProduced | D12 |

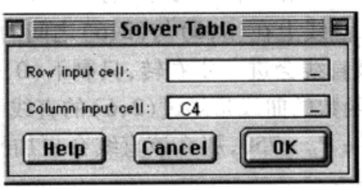



**图 5.5**　图 5.1 电子表格的扩展，为在伟恩德的例子中使用 Solver Table 分析系统的改变门的单位利润做好准备。

系数一栏所示的是目标函数系数的现值，而后面的两栏是这些系数在最优域的范围内，允许增加和减少的量。

例如，考虑目标函数中 $D$ 的系数 $P_D$，因为 $D$ 表示的是门的生产量，表中表示门的一行

| | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16 | Unit Profit | Optimal Units Produced | | Total |
| 17 | for Doors | Doors | Windows | Profit |
| 18 | | 2 | 6 | $3,600 |
| 19 | $100 | 2 | 6 | $3,200 |
| 20 | $200 | 2 | 6 | $3,400 |
| 21 | $300 | 2 | 6 | $3,600 |
| 22 | $400 | 2 | 6 | $3,800 |
| 23 | $500 | 2 | 6 | $4,000 |
| 24 | $600 | 2 | 6 | $4,200 |
| 25 | $700 | 2 | 6 | $4,400 |
| 26 | $800 | 4 | 3 | $4,700 |
| 27 | $900 | 4 | 3 | $5,100 |
| 28 | $1,000 | 4 | 3 | $5,500 |

**图 5.6** 在伟恩德的例子中系统的改变门的单位利润得到的数据表。

可变单元格

| 单元格 | 名称 | 终值 | 成本降低 | 目标函数系数 | 允许增加值 | 允许减少值 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$12 | DoorsProduced | 2 | 0 | 300 | 450 | 300 |
| $D$12 | WindowsProduced | 6 | 0 | 500 | 1E+30 | 300 |

**图 5.7** 用 Excel Solver 对伟恩德的例子(图 5.1)进行的敏感性分析报告的一部分，最后三列使我们能够确定门窗产量的变化范围。

给出了下面这些关于 $P_D$ 信息：

$P_D$ 的现值： 300

$P_D$ 的允许增加值： 450 此时，$P_D \leqslant 300 + 450 = 750$

$P_D$ 的允许减少值： 300 此时，$P_D \geqslant 300 - 300 = 0$

$P_D$ 的最优域： $0 \leqslant P_D \leqslant 750$

在管理科学互动模型中使用该模型来获得允许变化范围的图形表示。

因此，只要 $P_D$ 在上面所示的最优域内变动，并且不改变模型的其他任何内容，最优解将始终保持在$(D,W)=(2,6)$不变。

分析图 5.8 可以进一步加深对最优域的认识，在 $P_D=300$ 时，表示目标函数的斜线经过点(2,6)。当 $P_D=0$，处于最优域的下限时，表示目标函数的曲线是经过(2,6)的直线 B，该线上在(0,6)与(2,6)之间的所有点都是最优解。如果 $P_D<0$，那么该直线会进一步右转，只剩下(0,6)为最优解。当 $P_D=750$，处于最优域的上限时，表示目标函数的曲线是经过(2,6)的直线 C，该线上在(2,6) 与(4,3)之间的所有点都是最优解。如果 $P_D>750$，那么该直线会更加倾斜，只剩下(4,3)为最优解。

如果参数的微小变动能引起最优解的变化，就认为它是敏感参数。

在管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型能帮助你进行此类图形分析(可以在 www.mhhe.com/hillier2e 网站上或光盘中获得)。在你输入伟恩德例子原始模型后，模型就会显示出如图 5.8 所示的图形(没有虚线)。然后你可以通过简单地拖动目标函数一端的上下来显示在$(D,W)=(2,6)$不变的前提下 $P_D$ 的增减范围。

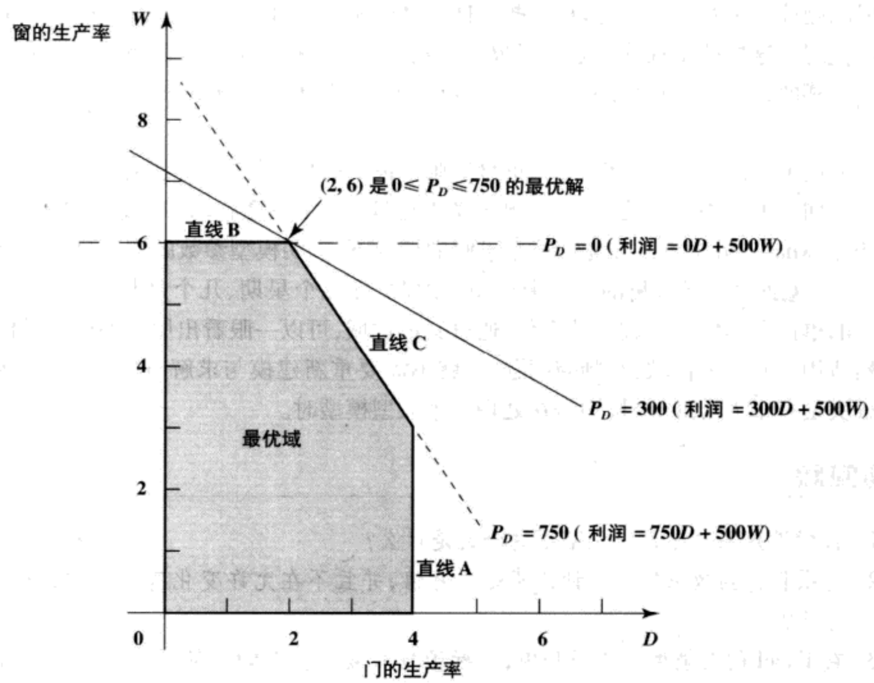



**图** 5.8 通过约束边界的两条虚线分别表示 $P_D$ 在允许取值范围的上下限处的目标函数，$0 \leqslant P_D \leqslant 750$，在这之间的目标函数曲线所产生的最优解均为 $(D,W)=(2,6)$。

**结论**：$P_D$ 的最优域为 $0 \leqslant P_D \leqslant 750$，因为 $P_D$ 在该区域内变化，$(D,W) = (2,6)$ 保持不变（在 $P_D=0$ 或 $P_D=750$ 时，模型有多个最优解，但最优解保持不变）。既然表示门的单位利润的 $P_D=300$ 可以在如此大的范围内变动，都不会改变最优解，因此，尽管 5.2 节的讨论表明这一估计值可能是很粗略的，我们尽可以相信 $P_D$ 的值不会影响最优解的正确性。

伟恩德公司的另一新产品的单位利润的允许变化范围也可以用同样的方法得出，假设：

$P_W$ = 新式窗的单位利润
　　= 电子表格中 D4 单元格中的数据

从图 5.7 灵敏度分析报告中表示窗的一行可知，$P_W$ 可以减少 300（此时，$P_W \geqslant 500-300=200$），可以增加 1E+30。1E+30 表示什么意思呢？在 Excel 中 1E+30 是 $10^{30}$ 的缩写，Excel 使用这一极大的数值来表示无穷大。因此，从灵敏度的分析报告中可知，$P_W$ 的最优域为：

| | | |
|---|---|---|
| $P_W$ 现值： | 500 | |
| $P_W$ 允许增加值： | 无限制 | 因此，$P_W$ 无上限 |
| $P_W$ 允许减少值： | 300 | 此时，$P_W \geqslant 500-300=200$ |
| $P_W$ 允许变化范围： | $P_W \geqslant 200$ | |

目标函数的两个系数的允许变化范围都很大，因此，尽管门、窗的单位利润 $P_D=300$，$P_W=500$ 可能仅仅是实际值的一个粗略估计，我们也可以相信，这一估计值对最优解的正确性不会有影响。

但问题往往没有这么幸运,在一些线性规划模型中,目标函数系数微小的变动都可能会影响最优解。这样的系数称为敏感参数。灵敏度的分析报告中会直接显示目标函数中哪些系数是敏感的,这些系数允许的变化区域很小,因此,必须格外小心,尽量取得这些数据的精确值。

在完成上面的一系列分析,并求得最终版本模型的最优解之后,最优域还有一个很重要的用途。如5.1节中所提及的,在问题的线性规划分析结束之后,如果外界的环境发生了一定的变化,what-if分析可以在无需重新求解的情况下,表明模型参数的变化是否造成了最优解的改变,这是what-if分析的第二个作用。因此,在几个星期、几个月甚至几年以后,如果新产品的单位利润发生了较大的变化,通过其最优域,可以一眼看出原来的产品最优组合是否依然适用。有了最优域,在判断问题时,就不需要重新建模与求解,这一点对线性规划问题的解决是有很大帮助的,特别是在处理一个大型模型时。

### 问题回顾

1. 目标函数系数允许变化范围的含义是什么?
2. 如果目标函数系数的估计值不是实际值,并且不在允许变化范围之内,会有怎样的影响?
3. 在Excel的灵敏度分析报告中,目标函数系数一栏该如何解释?允许增加值和允许减少值一栏又该如何解释?

## 5.4 目标函数系数同时变动的影响

因为存在许多不确定性因素,目标函数系数的值,如单位利润,通常都只是对实际值的估计。上一节中所讨论的是只有一个系数变动的最优域问题,这类问题在求解一个变动系数的允许变化范围时,假设其他所有系数都是正确的,研究的系数是惟一可能与实际值不符的变动的系数。

事实上,所有的系数(至少一个以上)可能同时都是不准确的,如果这样的话,是否可能会导致求得的最优解不正确呢?这是最关键的问题。如果可能对最后的结果产生影响,就必须对这些系数作进一步的分析。另一方面,如果what-if分析表明目前的参数估计不会影响最优解的正确性,那么,管理者可以增加对该模型及其所提供的解决方法的信心。

这一节将介绍如何在不重新求解模型的条件下,确定如果目标函数的几个系数同时变化,可能对最优解造成的影响。下面,我们引进伟恩德公司管理层所考虑的第二个what-if问题:

**问题2**:如果伟恩德公司两种新产品单位利润的估计值都是不精确的,将会对结果产生怎样的影响?

### 使用电子表格进行分析

同样,这类问题最方便快捷的解决方法是,在模型的电子表格上作相应的改动,接着按下Solver求解按钮。

在本例中,求得的最优组合严重地偏向于生产窗(每周6单位),而门的生产量相对来

说很小(每周 2 单位)。管理层对两种产品给予了同等的重视,所以对于两种产品产量的不平衡这一点尤为关心。基于此,安·莱斯特(市场部副总裁)提出这样的 what-if 问题。如果窗的单位利润(500 美元)估计值偏高,而门的单位利润(300 美元)偏低了,会对结果有何影响? 这类估计偏差是很容易造成的,并可通过一些调查来验证。如果真的存在偏差的话,两种产品之间较为平衡的组合是否会取得更大的利润?

将单位利润新的估计值重新输入图 5.1 的电子表格中,并按下 Solver 按钮,这一问题可以在几秒钟内得到解答。图 5.9 显示,新的估计值——门 450 美元,窗 400 美元——并没有丝毫改变最优的产品组合(总利润增加,但这仅仅是因为单位利润的变化造成的)。单位利润的估计值作更大的变动,是否会导致最优组合改变呢? 图 5.10 表明,当门的单位利润为 600 美元,窗的单位利润为 300 美元时,最优组合变成了$(D,W)=(4,3)$,这一组合比原先的要平均的多。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $450 | $400 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 2 | 6 | | | $3,300 |

**图 5.9** 修正的伟恩德问题模型,其中门、窗的单位利润分别被改为 $P_D=4500$ 美元,$P_W=400$ 美元,但是最优解不变。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $600 | $300 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 4 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 6 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 4 | 3 | | | $3,300 |

**图 5.10** 修正的伟恩德问题模型,其中门、窗的单位利润分别被改为 $P_D=600$ 美元,$P_W=300$ 美元,从而最优解改变。

## 使用两维 Solver 表格进行分析

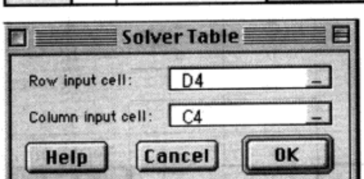
> 不像一维表格(如图 5.6)只显示单个数据格的变化结果,两维 Solver 表格显示两个数据格的取值结果。

两维 Solver 表格提供了系统的分析方法分析如果两个单位利润的估计值都不正确的情况。这一 Solver 表格用单一的输出数据格显示两个数据单元格分别采用不同的试算值的结果。所以,它能用来显示图 5.1 中的总利润(G12)是如何随着两个数据单元格单位利润(C4:D4)的取值变动而变动的。为每一组不同的取值,Solver 都重新进行一次求解。

使用两维 Solver Table 解决伟恩德问题,首先将原始表格(图 5.1)扩展成如图 5.11 所示的表格,表格的行和列的标题在 16~21 行显示。在表格的左上角(C17)写下表示目标单元格(总利润)的等式。在表格的第一列(C 列,在单元格 C17 等式下面)列出第一个数据单元格的试算值(门的单位利润),在表格的第一行(17 行,在单元格 C17 等式右面)列出第二个数据单元格的试算值(窗的单位利润)。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours | | |
| 6 | | | Hours Used per Unit | | Used | | Available | | |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 4 | | |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 | | |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 | | |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit | | |
| 12 | | Units Produced | 2 | 6 | | | $3,600 | | |
| 13 | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | |
| 16 | | Total Profit | | Unit Profit for Windows | | | | | |
| 17 | | | $3,600 | $100 | $200 | $300 | $400 | $500 | |
| 18 | | | $300 | | | | | | |
| 19 | | Unit Profit | $400 | | | | | | |
| 20 | | for Doors | $500 | | | | | | |
| 21 | | | $600 | | | | | | |

Select these cells (C17:H21) before choosing the Solver Table.




| | C |
|---|---|
| 17 | =TotalProfit |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| TotalProfit | G12 |

**图 5.11** 图 5.1 的扩展,用两维 Solver 表格分析在伟恩德的例子中系统地改变门、窗的单位利润带来的影响。

虽然两维 Solver 表格只能显示一组试算值的变化给一个单元格带来的影响，但是使用符号 & 可以在表格中的一个单元格内可以显示多个单元格。

然后选中整张数据表格（C17:H21），选择工具菜单中的 Solver Table（首先要安装此加载宏）。在 Solver Table 对话框中（如图 5.11 底部所示）表明要同时变化的数据单元格。单元格 C4 表示的输入列是指那些试算值在表格第一栏（C18:C21）中列出的数据单元格，输入行是指那些试算值在表格第一行（D17:H17）中列出的数据单元格。

图 5.12 显示的 Solver Table 是点击了 OK 键后自动生成的表格。对每一组试算值，Excel 都用 Solver 重新求解，然后将相应的值填入表格的总利润单元格中（表格单元格 C17 的数据来自于改变两个数据单元格取值前的原始表格的目标单元格）。

| | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | Total Profit | | Unit Profit for Windows | | | | |
| 17 | | $3,600 | $100 | $200 | $300 | $400 | $500 |
| 18 | | $300 | $1,500 | $1,800 | $2,400 | $3,000 | $3,600 |
| 19 | Unit Profit | $400 | $1,900 | $2,200 | $2,600 | $3,200 | $3,800 |
| 20 | for Doors | $500 | $2,300 | $2,600 | $2,900 | $3,400 | $4,000 |
| 21 | | $600 | $2,700 | $3,000 | $3,300 | $3,600 | $4,200 |

**图 5.12**　用两维 Solver 表格分析在伟恩德的例子中系统地改变门、窗的单位利润对总利润带来的影响。

**Excel 窍门：**
任何需要在公式中显示的文本必须在两侧加以引号（比如图 5.13 中 C25 单元格中的括号和逗号）

不像一维的 Solver 表格能够显示一个数据单元格的变化给多个可变单元格或输出单元格所带来的结果，两维 Solver 表格只能显示一组试算值的变化给一个单元格带来的影响。但是，这里有一个技巧，你可以使用符号 & 使在表格中的一个单元格内可以显示多个可变单元格和输出单元格的值的变化。我们在图 5.13 中使用该技巧来显示每组单位利润（C4:D4）的取值变化给可变单元格门产量（C12）和窗产量（D12）带来的影响。在单元格 C25 中是关键的公式：

C25 =“(”& 门产量 &“,”& 窗产量 &“)”

& 符号在 Excel 中表示连接，所以结果会先显示左括号，然后是门产量（C12），再是逗号，跟着是窗产量（D12），最后是右括号。如果门产量是 2，窗产量是 6，则结果显示为 (2,6)。因此两个可变单元格的取值在一个单元格内显示出来。

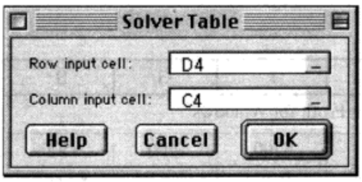
what-if 分析表明没有必要进一步改善对门窗单位利润的估计值。

在输入了如图 5.13 所示的第 24 ~ 25 行和 B ~ C 列的内容以及单元格 C25 的公式后，点击 OK 键，Solver 表格就会自动生成。D26:H29 单元格显示了门窗单位利润的不同组合所产生的最优解。表格的右上角（单元格 H26）显示了用原单位利润——门 300、窗 600——的情况下的最优解为 $(D, W) = (2,6)$。沿着这个单元格往下是增加对门单位利润的估计值，往左是增加对窗单位利润的估计值［往上和往右的变化没有显示出来，因为这只会增加 $(D, W) = (2,6)$ 作为最优解的可信性］。注意对 H18 附近的单元格来说，$(D, W) = (2,6)$ 仍是最优解。这表明要使最优产品组合变化，一定是对单位利润的原始

| | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 | **Units Produced (Doors, Windows)** | | | Unit Profit for Windows | | | |
| 25 | | (2,6) | $100 | $200 | $300 | $400 | $500 |
| 26 | | $300 | (4,3) | (4,3) | (2,6) | (2,6) | (2,6) |
| 27 | Unit Profit | $400 | (4,3) | (4,3) | (2,6) | (2,6) | (2,6) |
| 28 | for Doors | $500 | (4,3) | (4,3) | (4,3) | (2,6) | (2,6) |
| 29 | | $600 | (4,3) | (4,3) | (4,3) | (4,3) | (2,6) |

| | C |
|---|---|
| 25 | = "(" & DoorsProduced & "," & WindowsProduced & ")" |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| DoorsProduced | C12 |
| WindowsProduced | D12 |




**Solver Table Selection: C25:H29**

**图 5.13** 用两维 Solver 表格分析在伟恩德的例子中系统地改变门、窗的单位利润对最优解的影响。

估计非常不准确。虽然这种估计很粗略，但是管理者有理由相信是正确的。所以，不需要再花力气进一步改善估计值。

在上面的情况中，改变目标函数的系数，而最优解，即两种新产品产量的最优组合始终为$(D,W)=(2,6)$。但是，从图 5.13 也可以看出，随着两种产品单位利润的不断改变，最终产品组合也会改变。因此，必须指明在保持最优组合不变的条件下，系数允许的变化范围，以便于发现将来最优产品组合可能发生的变化。下面将就这一点进行讨论。

## 从灵敏度报告中获得额外的信息

上一节介绍了在目标函数中只有一个系数变动的情况下，如何通过灵敏度分析报告中的数据找到该变动系数的允许变化范围。在分析多个系数同时变动的情况时，也使用同样的这些数据，即每个系数的允许增加值和减少值，下面介绍如何分析多个系数同时变动的情况。

> 目标函数系数同时变动的百分之百法则(The 100 percent rule for simultaneous changes in objective function coefficients)：如果目标函数的系数同时变动，计算出每一系数变动量占该系数允许变化范围允许变动量的百分比，而后，将各个系数的变动百分比相加，如果所得的和不超过 100%，最优解不会改变，如果超过 100%，则不能确定最优解是否改变。

这一法则并没有表示出在变动百分比之和超过 100% 的情况下可能的结果。这一结果还有赖于系数变动的方向。但是，只要变动百分比之和不超过 100%，最优解是肯定不会改变的。

记住，我们可以让单一的目标函数系数在整个允许范围内变动，但这只有在其他目标函数系数都不变的情况下才有效。如果多个系数同时变动，我们必须研究各个系数的变动百分比。

为了说明这一点，再次考虑伟恩德公司的例子，并加上图 5.7 灵敏度报告所提供的信息。假设在上次研究之后，情况又发生了变化，门的单位利润 $P_D$ 从原来的 300 美元增加到 450 美元，而窗的单位利润 $P_W$ 从原来的 500 美元下降到 400 美元，运用百分百法则，计算如下：

$P_D$:300 美元→450 美元

$$占允许增加量的百分比 = 100\left(\frac{450-300}{450}\right)\% = 33\tfrac{1}{3}\%$$

$P_W$:500 美元→400 美元

$$占允许增加量的百分比 = 100\left(\frac{500-400}{300}\right)\% = 33\tfrac{1}{3}\%$$

$$总和 = 66\tfrac{2}{3}\%$$

因为变动百分比之和不超过 100%，所以可以确定最初的 $(D,W)=(2,6)$ 的最优解没有改变，正如我们在图 5.9 中可以看到的一样。

现在，假设情况发生了更大的变化，$P_D$ 从原来的 300 美元增加到 600 美元，而窗的单位利润 $P_W$ 从原来的 500 美元下降到 300 美元。运用百分百法则，计算如下：

$P_D$:300 美元→600 美元

$$占允许增加量的百分比 = 100\left(\frac{600-300}{450}\right)\% = 66\tfrac{2}{3}\%$$

$P_W$:500 美元→300 美元

$$占允许减少量的百分比 = 100\left(\frac{500-300}{450}\right)\% = 66\tfrac{2}{3}\%$$

$$总和 = 113\tfrac{1}{3}\%$$

既然百分比之和超过了 100%，那么百分百法则告诉我们不能保证 $(D,W)=(2,6)$ 还是最优解。事实上，我们早在图 5.10 和图 5.13 就发现最优解已经变为 $(D,W)=(4,3)$。

这些结果暗示了 $P_D$ 增加但同时 $P_W$ 减少时如何找到最优解。由于 100% 是在 $66\frac{2}{3}\%$ 与 $133\frac{1}{3}\%$ 的中点，当 $P_D$ 和 $P_W$ 在以上情况的中点的时候，百分比变化之和为 100%，特别地，$P_D=525$ 美元是 450 美元和 600 美元的中点，$P_W=350$ 美元是 400 美元和 300 美元的中点，对应的百分百法则的计算为：

$P_D$:300 美元→525 美元

$$占允许增加量的百分比 = 100\left(\frac{525-300}{450}\right)\% = 50\%$$

$P_W$:500 美元→350 美元

$$占允许减少量的百分比 = 100\left(\frac{500-350}{300}\right)\% = 50\%$$

$$总和 = 100\%$$

变动百分比之和刚好等于 100%，但因为没有超过 100%，所以 $(D,W)=(2,6)$ 还是最优解。图 5.14 的图形表明，此时 $(2,6)$ $(4,3)$ 以及这两点所在直线上两点之间的所有点均为最优解。但是，如果 $P_D$，和 $P_W$ 更大地偏离初值，变动百分比之和超过 100%，目标函数直线将向右旋转，$(D,W)=(4,3)$ 就成为惟一的最优解。

必须记住一点，那就是，变动百分比之和超过 100% 并不表示最优解就一定会改变。例如，假设两种产品的单位利润均减半，根据百分比法则，计算如下：

$P_D$:300 美元→150 美元

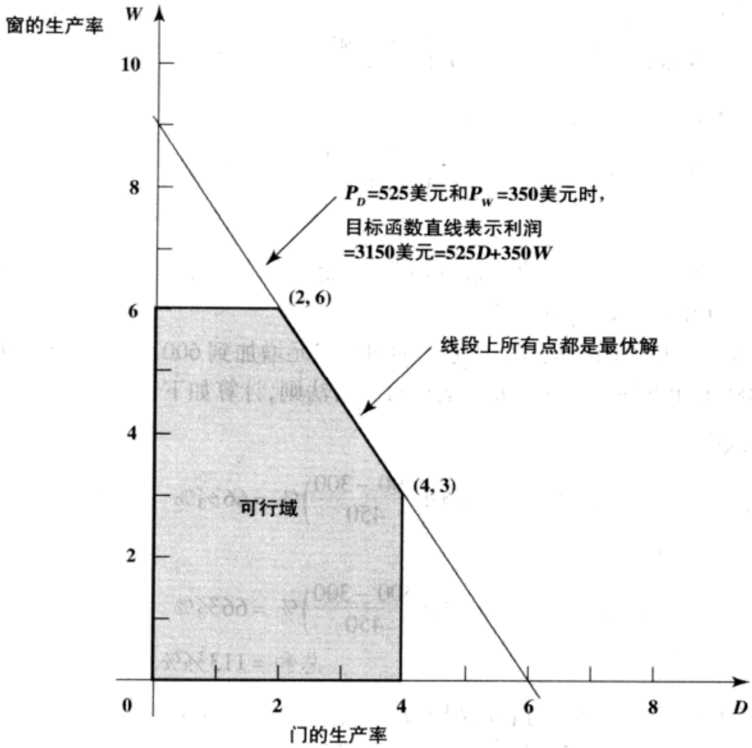



图 5.14 当门、窗的单位利润的估计值分别改为 $P_D=525$ 美元、$P_W=350$ 美元，刚好处在百分百法则所允许的临界点上，$(D,W)=(2,6)$ 还是最优解，但同时，目标函数直线上在(2,6)(4,3)之间的所有点均为最优解。

$$占允许增加量的百分比 = 100\left(\frac{300-150}{300}\right)\% = 50\%$$

$P_W$:500 美元→250 美元

$$占允许增加量的百分比 = 100\left(\frac{500-250}{300}\right)\% = 83\%$$

尽管变动百分比之和超过了 100%，但是从图 5.15 可以看出，最优解没有改变。事实上，目标函数直线的斜率与原目标函数直线（图 5.8 中的实线）斜率相等。当所有的单位利润同比例变动时，目标函数直线的斜率始终不变，所以最优解也就不会改变。

## 比　较

上面介绍了三种方法可用来分析目标函数系数同时变动的情况，分别是：(1)在电子表格上作相应的改动；(2)使用两维 Solver 表格；(3)应用百分百法则。

对于初学者来说，电子表格的方法是较好的，因为这种方法简单快捷。如果你只是想检测系数的一组变动值，那就可以直接从电子表格中看到这组变动将会对结果造成的影响。

但是，更多的情况是，因为在最初估计时，有着许多的不确定因素，因此系数会有许多种变动的可能。Solver 表格对系统检验一个或两个目标函数系数的变动来说很有用处。将具有代表性的变动在电子表格中测试一下，就可以获得所有需要的信息。或许所有的变动都得出同样的最优解，那么这一最优解尽可以拿去应用实施，又或许必须重新精确估计参数，才能得出合理的解决方案。

在电子表格方法无法得出明确的结论的情况下，可以用百分百法则作如下的一些补充：

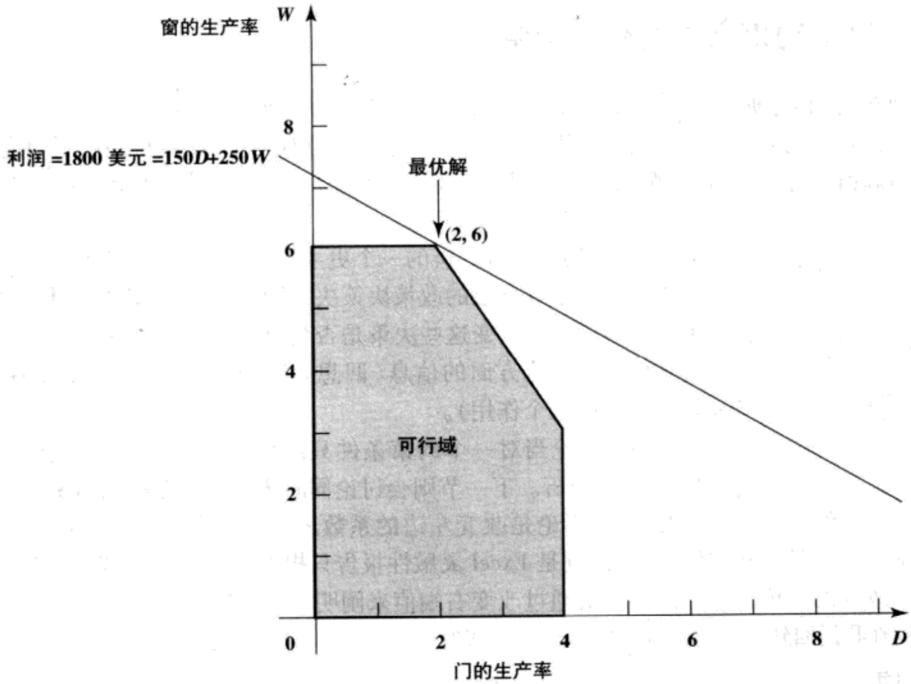



**图 5.15**　当门、窗的单位利润的估计值分为改为 $P_D = 150$ 美元，$P_W = 250$ 美元，（最初解的一半）时，用作图法可知 $(D, W) = (2,6)$ 还是最优解，尽管百分百法则表示最优解有可能变动。

- 百分百法则可用于确定在保持最优解不变的条件下，目标函数系数的变动范围。
- 当模型中有大量的决策变量时（这种情况在实际中是很可能的），用电子表格系统地测试目标函数一部分或全部系数的同步变动是相当不实际的，因为即使有代表性的变动组合数也是大量的。Solver 表格只能用来检验一次最多两个系数的变化。但是，百分百法则通过将允许的增加或减少值在各个系数之间分摊，从而可以直接显示出每个系数的允许变动值。
- 在线性规划的研究结束以后，如果将来条件变化，致使目标函数中的一部分或所有的系数都发生了变动，百分百法则可以直接表明最初的最优解是否保持不变。如果最优解不变，那么就不需要花时间去修正模型，对于一些大型的模型来说，这样节省下来的时间也是很可观的。

## 问题回顾

1. 目标函数系数变动的百分百法则中，变动的百分比是指什么？
2. 在百分百法则中，如果变动的百分比之和不超过 100%，最初的最优解将如何？
3. 在百分百法则中，如果变动的百分比之和超过 100%，是否就意味着最初的最优解已经不再是最优解？

## 5.5 单个约束条件变化的影响

现在,我们将研究的重点从目标函数系数的变动转向函数约束值的变动。

分析函数约束右端值变动的原因与前面一样,因为在建模时,还不能得到模型的这些参数的精确值,只能对其作大略的估计。因此,我们想知道万一这些估计不准确会产生怎样的后果。

> 右边代表管理政策决策,what-if 分析提供了改变这些决策带来的影响。

但是,进行约束常数分析的一个更主要的理由是:这些常数往往不是由外界决定的而是管理层的政策决策决定的。因此,在建模并求解之后,管理者想要知道如果改变这些决策是否会提高最终的收益。what-if 分析就是为管理者提供这方面的信息(回想一下,这一点是 5.1 节中提到的 what-if 分析的第三个作用)。

这一节会讨论当对一个约束条件只改变一点(系数或右端值)时如何进行 what-if 分析。下一节则会讨论同时改变约束条件的情况。

对一个约束条件只改变一点,不论是改变左边的系数还是改变右端值,进行 what-if 分析的基本程序是一样的(惟一的区别是 Excel 灵敏性报告只提供了右端值改变的信息,不提供左端改变的分析)。因此,我们会通过改变右端值来阐明这一程序。

现在我们回到 5.2 节的伟恩德公司案例,来看一下公司管理层提出的第三个 what-if 问题。

**问题 3**:如果改变一个工厂可用于生产新产品的生产时间,结果将如何?

每个工厂的可用工时是对应的约束条件的右端值,所以我们希望研究对一个工厂的右端值进行改变时带来的影响。在最初的最优解,$(D, W) = (2,6)$,第一个工厂只用了 4 可用工时的 2 工时,所以改变可用工时(只要不是大幅度的降低),将不会改变最优解和总利润。但是,对于改变工厂 2 和工厂 3 的可用工时带来的影响就不是很清楚。让我们从工厂 2 开始研究。

### 用电子表格进行分析

回顾 5.2 节,图 5.1 显示了伟恩德问题的最初电子表格。最优解为$(D, W) = (2,6)$,总利润为 3600 美元。单元格 G8 显示在工厂 2 每周可用工时为 12 小时。

为了分析改变可用工时带来的影响,只需要改变单元格 G8 的值,并且重新按下 Solver 按键。例如,图 5.16 显示了可用工时从 12 变为 13 小时的结果。C12:D12 的最优解给出了总利润为 3750 美元,因此利润的变化为:

增加的利润 = 3750 美元 − 3600 美元
= 150 美元

> 到目前为止,每增加 1 小时工厂 2 的可用工时,带来 150 美元的利润增长。

因为这个利润增长只是增加了工厂 2 一个小时的可用工时,我们接下去看一下增加几个小时会给其带来的影响。图 5.17 显示了再增加 5 小时可用工时的情况。比较图 5.16 和图 5.17,可以看出再增加 5 小时可用工时给总利润带来的影响:

增加的利润 = 4500 美元 − 3750 美元
= 750 美元(增加 5 小时)
= 150 美元(每增加 1 小时)

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 1.66667 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 13 | ≤ | 13 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 1.667 | 6.5 | | | $3,750 |

**图 5.16**　将工厂 2 的可变工时从 12 小时(如图 5.1 所示)增加到 13 小时,总利润增长 150 美元。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 0 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 0 | 9 | | | $4,500 |

**图 5.17**　在图 5.16 基础上,将工厂 2 的可用工时从 13 再增加到 18 小时时,总利润将增加 750 美元(也就是每小时增加 150 美元)。

现在管理者需要考虑增加新产品可用工时和减少其他产品可用工时的平衡问题。

将可用工时继续增加,利润会不会继续增长?图 5.18 显示了如果工厂 2 每周有 20 小时可用工时的情况。最优解和总利润都与图 5.17 所示的一样。这表明将可用工时从 18 小时增加到 20 小时,不会带来利润的增长(原因是工厂 3 的 18 小时可用工时只能每周生产 9 扇窗,所以工厂 2 只会使用 18 小时的工时)。因此,可以认为 18 小时可用工时是工厂 2 的最大值。

但是,将新产品的可用工时从 12 小时增加到 18 小时将会带来利润的增长并不意味着就应该增加新产品的可用工时。两种新产品的可用工时只有在减少其他产品的可用工时的基础上才能实现。因此,管理者在作出增加新产品可用工时的决策前,必须衡量减少其他产品可用工时带来的影响(这会带来利润损失和其他不可见的坏处)。这样的分析也可能带来减少一个工厂或几个工厂的新产品可用工时的情况。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 0 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 18 | ≤ | 20 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 0 | 9 | | | $4,500 |

**图 5.18** 在图 5.17 的基础上再增加两个可用工时，从 18 小时增长为 20 小时，总利润没有变化，因为最优解没有用到这些多余工时。

## 用 Solver 表格进行分析

一般约束条件的影子价格显示了约束条件右端值的改变给目标单元格带来的增长率。它在右端值在允许变化范围内保持正确。

Solver 表格可以用来系统分析对约束条件中的一个参数进行多次改变的情况。在图 5.19 中，我们用 Solver 表格显示了当工厂 2 的可用工时在 4～20 之间变化时，给可变单元格和总利润带来的变化。在第一列（B19：B35）中列出了可用工时的试算值。相关的输出单元格是门产量（C12）、窗产量（D12）和总利润（G12），用到这些单元格的公式在表格的第一行（C18：E18）中显示。运行 Solver 表格（G8 作为输入列，列出工厂 2 的可用工时），然后在表格（C19：E35）中填入数值。我们在 F 列中计算了利润增长数，也就是每工厂 2 每增加 1 小时可用工时给利润带来的增长量。

在增长利润数列中明显地显出了有趣的规律。从目前的 12 可用工时开始，每增加 1 个可用工时，利润就会增长 150 美元（一直到 18 工时）。同样，如果减少 1 个可用工时，利润就会减少 150 美元（一直到 6 工时）。这种利润的变化量因增加或减少约束条件右端值而产生，被称为影子价格。

在给定线性规划模型的最优解和目标函数相应值的条件下，影子价格（shadow price）就是约束常数增加微小的量 1，使得目标函数值增加的量。

与 5.3 节描述的目标函数系数的允许变化范围比较，这个允许变化范围关注右端值以及相应的影子价格。

但是，工厂 2 约束条件的影子价格 150 美元只在 12 附近的范围内有效（也就是在 6 工时到 18 工时之间），如果可用工时增加到 18 小时以上，增长的利润将为 0。降低到 6 小时以下时，利润的减少会加速到每小时 250 美元。所以，用 RHS 表示右端值，则影子价格 150 美元有效的范围是：

$$6 \leqslant \text{RHS} \leqslant 18$$

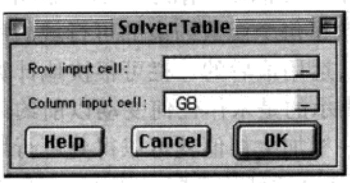
这个范围就是右端值允许变化范围（简称允许变化范围）。

函数约束的右端值允许变化范围就是保持约束条件的影子价格有效时右端值变化的范围。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 2 | 6 | | | $3,600 |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | | Time Available in | Optimal Units Produced | | Total | Incremental | |
| 17 | | Plant 2 (hours) | Doors | Windows | Profit | Profit | |
| 18 | | | 2 | 6 | $3,600 | | |
| 19 | | 4 | 4 | 2 | $2,200 | | Select these cells (B18:E35) before choosing the Solver Table. |
| 20 | | 5 | 4 | 2.5 | $2,450 | $250 | |
| 21 | | 6 | 4 | 3 | $2,700 | $250 | |
| 22 | | 7 | 3.667 | 3.5 | $2,850 | $150 | |
| 23 | | 8 | 3.333 | 4 | $3,000 | $150 | |
| 24 | | 9 | 3 | 4.5 | $3,150 | $150 | |
| 25 | | 10 | 2.667 | 5 | $3,300 | $150 | |
| 26 | | 11 | 2.333 | 5.5 | $3,450 | $150 | |
| 27 | | 12 | 2 | 6 | $3,600 | $150 | |
| 28 | | 13 | 1.667 | 6.5 | $3,750 | $150 | |
| 29 | | 14 | 1.333 | 7 | $3,900 | $150 | |
| 30 | | 15 | 1 | 7.5 | $4,050 | $150 | |
| 31 | | 16 | 0.667 | 8 | $4,200 | $150 | |
| 32 | | 17 | 0.333 | 8.5 | $4,350 | $150 | |
| 33 | | 18 | 0 | 9 | $4,500 | $150 | |
| 34 | | 19 | 0 | 9 | $4,500 | $0 | |
| 35 | | 20 | 0 | 9 | $4,500 | $0 | |

| | C | D | E |
|---|---|---|---|
| 16 | Optimal Units Produced | | Total |
| 17 | Doors | Windows | Profit |
| 18 | =DoorsProduced | =WindowsProduced | =TotalProfit |

| | F |
|---|---|
| 16 | Incremental |
| 17 | Profit |
| 18 | |
| 19 | |
| 20 | =E20-E19 |
| 21 | =E21-E20 |
| 22 | =E22-E21 |
| 23 | =E23-E22 |




| Range Name | Cell |
|---|---|
| DoorsProduced | C12 |
| TotalProfit | G12 |
| WindowsProduced | D12 |

图 5.19　Solver 表格显示工厂 2 可用工时的变化带来的影响。

## 运用灵敏性报告获得关键信息

同样,用 Solver 表格计算约束条件的影子价格比较直接,在影子价格保持有效的情况下寻找函数约束的右端值的允许变化范围也比较容易。同时,Solver 灵敏度报告也能提供较简易的方法来获得这些信息。图 5.20 显示了由 Solver 得出的原伟恩德公司问题的灵敏度报告,其中上半部分是图 5.7 已经给出的允许变化范围,下部分是关于函数约束的,包括第四栏中所显示的各约束的影子价格。前面三栏分别为:(1)图 5.1 中 E7 到 E9 的输出单元格;(2)给出各个工厂每周可用于生产的以小时计的生产时间;(3)这些单元格的终值分别为 2、12、18(如图 5.1 的 E 栏所示)(最后三栏内容将在后面讨论)。

可变单元格

| Cell | Name | Final Value | Reduced Cost | Objective Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$12 | DoorsProduced | 2 | 0 | 300 | 450 | 300 |
| $D$12 | WindowsProduced | 6 | 0 | 500 | 1E+30 | 300 |

限制条件

| Cell | Name | Final Value | Shadow Price | Constraint R. H. Side | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$7 | Plant 1 Used | 2 | 0 | 4 | 1E+30 | 2 |
| $E$8 | Plant 2 Used | 12 | 150 | 12 | 6 | 6 |
| $E$9 | Plant 3 Used | 18 | 100 | 18 | 6 | 6 |

图 5.20 由 Excel Solver 生成的最初的伟恩德问题的完整的灵敏度报告,该问题模型如图 5.1 所示。

第四栏的影子价格告诉我们约束右端值的数字(单元格 G7、G8、G9)每增加 1,目标函数值(图 5.1 的 G12 单元格)相应的增加量。同样,也告诉我们约束右端值的数字每减少 1,目标函数值相应的减少量。工厂 1 约束的影子价格为 0,因为该工厂使用的工作时间(2 小时)低于可获得工作时间(4 小时),所以,若增加工厂 1 可获得的工作时间,不会增加收益。但是,工厂 2 和工厂 3 都将可获得的所有工作时间用于生产新产品。因此,不管增加工厂 2 还是工厂 3 可获得的生产时间,都将增加总收益,这一点是显而易见的。

> 影子价格显示了利润和工厂可用生产时间之间的关系。

该问题的目标函数值(图 5.1 的单元格 G12)表示每周可以从两种新产品上获得的以美元计的总利润。函数约束右端值表示各个工厂可用于生产新产品的以小时计的工作时间。因此,通过函数约束的影子价格,管理者可以知道各工厂的生产时间每增加 1 个小时,新产品的总利润会增加多少。同样,影子价格也显示各工厂的生产时间每减少 1 个小时,新产品的总利润会减少多少。在生产时间的变动不是很大的情况下,是可以应用这一方法的。

> 这是如何从灵敏度报告中寻找右端值允许变化范围。

特别地,生产时间的变动在允许变化范围的情况下,影子价格保持正确。Solver 的灵敏度报告实际上包含了每个函数约束的可行域的所有数据,回到图 5.20 报告的最后一部分,运用最后的三栏可很快地计算出可行域。"Constraint R. H. side"一栏表示的是未作任何变动以前约束右端值的初值。将"Allowable increase"一栏加上初值就可以得到可行域的上限,同样,在初值中减去"Allowable decrease"就可以得到可行域的下限。用 1E+30 表示无穷大,这些可行域的计算可表示如下:

工厂 1 约束：$4-2 \leqslant RHS_1 \leqslant 4+\infty$，　因此 $2 \leqslant RHS_1$（无上限）
工厂 2 约束：$12-6 \leqslant RHS_2 \leqslant 12+6$，　因此 $6 \leqslant RHS_2 \leqslant 18$
工厂 3 约束：$18-6 \leqslant RHS_3 \leqslant 18+6$，　因此 $12 \leqslant RHS_3 \leqslant 24$

图 5.21 的图形更进一步说明了为什么在工厂 2 中，$6 \leqslant RHS \leqslant 18$ 是影子价格的有效区域。原问题的最优解 $(D,W)=(2,6)$ 处在直线 B 与直线 C 的交点，直线 B 的方程式为 $2W=12$，因为该直线表示的是工厂 2 的约束边界（$2W \leqslant 12$）。但是，如果改变该方程的右端值（$RHS_2=12$），直线 B 将会上升（增加 $RHS_2$）或者下降（减少 $RHS_2$）。随着直线 B 的移动，可行域会相应改变而只要直线 B 没有移动过多，与直线 C 相交，最优解始终保持在直线 B 与直线 C 的交点上。每次 $RHS_2$ 增加（或减少）1，交点的移动就使利润增长（或减少）影子价格的数量（150 美元）。图 5.21 表明，在 $RHS_2$ 从 12 增加到 18 的过程中，这一交点一直都是可行并且是最优的，因为可行域也跟着直线 B 的上移而扩大。但是，如果 $DHS_2$ 大于 18，交点就不再可行，因为此时门的生产量 $D$ 为负。所以在 18 以上再增加 1 不会带来利润按影子价格的增长。同样，将 $RHS_2$ 从 12 减少到 6，因为直线 B 对应的下降，交点将保持可行和最优。但是，当 $RHS_2$ 小于 6 时，交点也不再可行，因为此时违背了工厂 1 的约束（$D \leqslant 4$），该约束用直线 A 表示。所以在 6 以下再减少 1 不会带来利润按影子价格的减少。这样，$6 \leqslant RHS \leqslant 18$ 可行域表明了影子价格有效的区域。

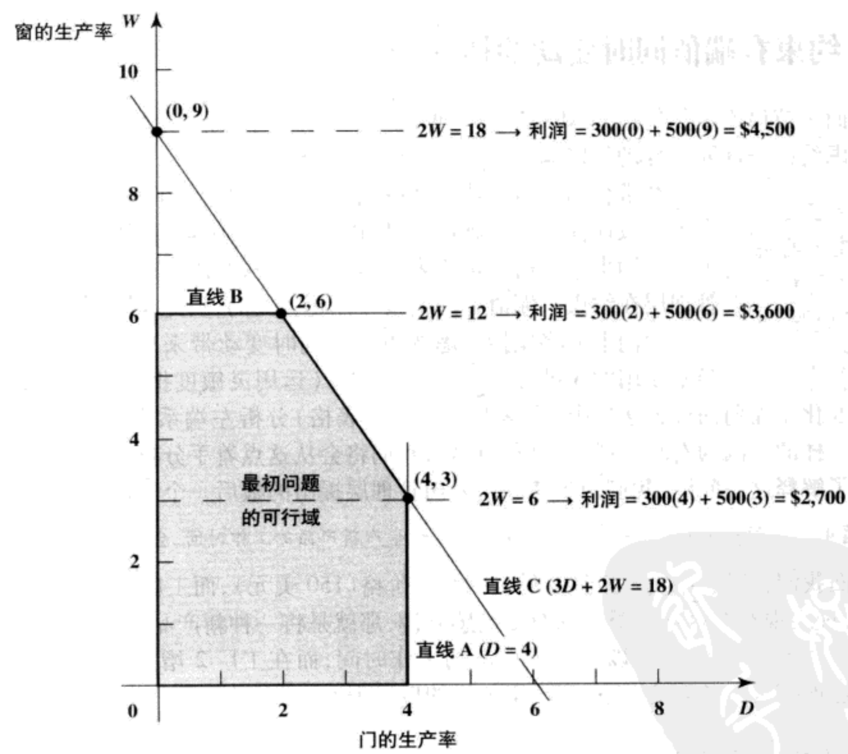



图 5.21　工厂 2 约束右端值的可行域 $6 \leqslant RHS \leqslant 18$ 的图形解释。

## 小　结

总结一下，约束的右端值表示的是各工厂每周可用于生产新产品的工作时间。影子价

格显示各工厂的生产时间每增加 1 个小时，新产品的总利润会增加多少。生产时间的变动在允许变化范围的情况下，影子价格保持正确。因此，管理层可以利用影子价格来评价改变工作时间的各种决策，但是要求这些决策改变的幅度不大，在影子价格的有效域内。同时还要考虑新产品可用工时的变化会给其他产品的生产率和利润所带来的影响。

### 问题回顾

1. 为什么要研究函数约束条件的变化带来的影响？
2. 为什么函数约束的右端值可能改变？
3. 影子价格的含义是什么？
4. 用电子表格如何找到影子价格？用 Solver 表格呢？用灵敏度报告呢？
5. 为什么管理者会对影子价格感兴趣？
6. 影子价格是否也同样适用于减少函数约束右端值的数值的情况？
7. 影子价格为 0 对管理者来说是什么意思？
8. Solver 的灵敏度报告中哪一栏可用于找到函数约束右端值的可行域？
9. 为什么管理层会对可行域感兴趣？

## 5.6 约束右端值同时变动的情形

前面一节讨论了如何运用 what-if 分析研究一个约束条件的变化带来的影响。现在我们来考虑约束条件同时变动的影响。

> 管理层在约束右端值上的决策往往是相关的，因此需要同时考虑。

经常会出现需要我们考虑约束条件同时变动的情况。函数约束中的多个参数往往都有不确定性，所以当多个参数都偏离估计值时问题就产生了。约束右端值经常代表的是管理决策，当决策改变时问题就产生了。管理层在约束右端值上的决策往往是相关的，因此需要同时考虑。

我们下面将概括考虑约束条件同时变动带来的影响时 what-if 分析经常使用的 3 种方法。第 3 种方法（运用灵敏度报告）只能用来分析右端值的变化。而前两种方法（用电子表格和 Solver 表格）分析左端系数和右端值的变化时过程是一样的。因为右端值的变化更为重要，我们将会从这点着手分析。

为了解释这一问题，我们回到伟恩德公司管理层提出的最后一个 what-if 问题：

**问题 4**：如果同时改变伟恩德公司所有工厂可用于生产新产品的工作时间，会造成怎样的影响？

前面我们已经知道工厂 2 具有最大的影子价格（150 美元），而工厂 3 的影子价格为 100 美元，管理层现在对这样一类的同时变动感兴趣，那就是将一种新产品的生产从一个工厂转移到另一个工厂。例如，可以减少工厂 3 的工作时间，而在工厂 2 增加相同数量的工作时间。在这种同时变动的情况下，会产生怎样的后果呢？

### 用电子表格进行分析

根据影子价格，将 1 个小时的工作时间从工厂 3 移到工厂 2，所产生的结果如下所示：

| | | |
|---|---|---|
| $RHS_2: 12 \rightarrow 13$ | 总利润的变化量 = 影子价格 | = 150 美元 |
| $RHS_3: 18 \rightarrow 17$ | 总利润的变化量 = − 影子价格 | = −100 美元 |
| | 总利润的净变量 | = 50 美元 |

我们现在检验在右端值同时发生大改变时，影子价格是否保持有效。

但是，我们现在还不能确定，两个约束右端值这样改变以后，原先的影子价格是否依然有效。

检验有效性的一种方便快捷的方法就是将这些数据代入图 5.1 电子表格的相应单元格中去，接着按下 Solver 求解按钮。图 5.22 所示的电子表格显示出总利润的净增量确实为 50 美元（从 3600 美元增加到 3650 美元），因此，影子价格在上面约束右端值同时变动的情况下是有效的。

如果我们继续将工厂 3 的工作时间移到工厂 2，结果会是如何呢？我们可以每次反复替换表格中的右端值然后重新求解。但是下面会描述用 Solver 表格更系统地来解决问题。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 1.33333 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 13 | ≤ | 13 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 17 | ≤ | 17 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 1.333 | 6.5 | | | $3,650 |

**图 5.22**　修正的伟恩德问题，其中 1 个小时的工作时间从工厂 3 移到工厂 2，从而改变了图 5.1 的 G 栏，对改变后的模型求解。

## 用 Solver 表格进行分析

这种用电子表格逐步测试数据的方法有时是相当累人和不实际的，特别是有多个约束右端值同时变动的情况之下。让我们看看如何用 Solver 表格（在管理科学课件中提供）更系统地进行分析。

我们可以用两维的 Solver 表格来研究工厂 2 和工厂 3 可用工时的不同组合值给总利润和最优生产率带来的影响。但是，在这个案例中我们并不研究所有的工时组合，而只研究将工厂 3 的工时移到工厂 2 的情况。对于该分析，一维的 Solver 表格就足够了。

对于工厂 3 每减少 1 个工时，工厂 2 就增加 1 个工时。因此工厂 2 的可用工时是一个关于工厂 3 可用工时的函数。因为两个工厂共有 30 个可用工时（$RHS_2 + RHS_3 = 30$），所以工厂 2 可用工时（$RHS_2$）可以表示为：

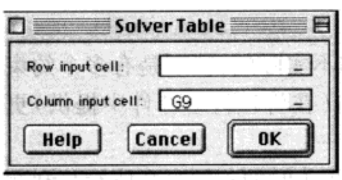
$$RHS_2 = 30 - RHS_3$$

通过在一个单元格内输入有关另一个单元格的公式，一维 Solver 表格可以用来解决相关的单元格的试算值。

图 5.23 显示了伟恩德公司问题的电子表格，工厂 2 可用工时的数值由以上公式代替。因为这个公式，当工厂 3 可用工时减少时，工厂 2 的可用工时会自动增加同样的值。现在一维的 Solver 表格能被用来研究工厂 3 的可用工时取不同值时带来的影响（工厂 2 的可用工时会自动调节）。在图 5.23 所示的电子表格的底部（C20：C26）显示了工厂 3 可用工时的试算值。我们对输

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem** | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours | |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available | |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 4 | Total (Plants 2 & 3) |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 | 30 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit | |
| 12 | | Units Produced | 2 | 6 | | | $3,600 | |
| 13 | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | |
| 17 | | Time Available in | Time Available in | Optimal Units Produced | | Total | Incremental | |
| 18 | | Plant 2 (hours) | Plant 3 (hours) | Doors | Windows | Profit | Profit | |
| 19 | | | | 2 | 6 | $3,600 | | |
| 20 | | 12 | 18 | 2 | 6 | $3,600 | | |
| 21 | | 13 | 17 | 1.333 | 6.5 | $3,650 | $50 | |
| 22 | | 14 | 16 | 0.667 | 7 | $3,700 | $50 | |
| 23 | | 15 | 15 | 0 | 7.5 | $3,750 | $50 | |
| 24 | | 16 | 14 | 0 | 7 | $3,500 | -$250 | |
| 25 | | 17 | 13 | 0 | 6.5 | $3,250 | -$250 | |
| 26 | | 18 | 12 | 0 | 6 | $3,000 | -$250 | |

Select these cells (C19:F26), before choosing the Solver Table.




| Range Name | Cells |
|---|---|
| DoorsProduced | C12 |
| TotalProfit | G12 |
| WindowsProduced | D12 |

| | G | H |
|---|---|---|
| 5 | Hours | |
| 6 | Available | |
| 7 | 4 | Total (Plants 2 & 3) |
| 8 | =H8-G9 | 30 |
| 9 | 18 | |

| | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | Time Available in | Time Available in | Optimal Units Produced | | Total | Incremental |
| 18 | Plant 2 (hours) | Plant 3 (hours) | Doors | Windows | Profit | Profit |
| 19 | | | =DoorsProduced | =WindowsProduced | =TotalProfit | |
| 20 | =$H$8-C20 | 18 | 2 | 6 | $3,600 | |
| 21 | =$H$8-C21 | 17 | 1.333 | 6.5 | $3,650 | =F21-F20 |
| 22 | =$H$8-C22 | 16 | 0.667 | 7 | $3,700 | =F22-F21 |
| 23 | =$H$8-C23 | 15 | 0 | 7.5 | $3,750 | =F23-F22 |
| 24 | =$H$8-C24 | 14 | 0 | 7 | $3,500 | =F24-F23 |
| 25 | =$H$8-C25 | 13 | 0 | 6.5 | $3,250 | =F25-F24 |
| 26 | =$H$8-C26 | 12 | 0 | 6 | $3,000 | =F26-F25 |

**图5.23** 通过在单元格G8输入公式使工厂2和工厂3的总可用工时等于30，这个一维Solver表格可以用来解决不断地将工厂3的工作时间转移到工厂2的问题。

出单元格门产量(C12)、窗产量(D12)、总利润(G12)感兴趣,所以这些单元格的公式被输入表格的第一行(D19:F19)。运行 Solver 表格(G9 作为输入单元格,输入工厂 3 可用工时),在表格(D20:F26)中填入其他值。我们在 G 栏中计算出了每将 1 可用工时从工厂 3 移到工厂 2 时带来的利润增长。

再次增长的利润有一个规律。每将 1 可用工时从工厂 3 移到工厂 2 时带来的利润增长为 50 美元(一直到 3 工时)。但是,当超过 3 工时,利润增长变为 -250 美元。因此,看起来最好将 3 小时的可用工时从工厂 3 移到工厂 2,不能再多了。

虽然一维 Solver 表格只能用来研究一个数据格的试算值变化的情况,但你现在一定发现通过在一个单元格内输入有关另一个单元格的公式,一维 Solver 表格也可以用来解决两个单元格的值同时发生变化的问题。上述的两个单元格都是约束条件的右端值,但是也可以用来研究左端系数发生变化的情况。甚至也可以用来解决多个数据单元格数值改变的情况。另外,用两维 Solver 表格,两个数据单元格的值可以同时变化,而其他单元格的值可以用这两个单元格表示。

## 从灵敏度报告中获得其他信息

虽然 Solver 表格的用处很多,但对一些问题它却不能解决。最重要的一个是当管理者改变政策决策时,右端值发生多样的变化的问题。虽然电子表格能够用来分析同时变化的组合值带来的影响,但是当右端值发生一系列许多变化时,用电子表格进行分析就会耗时太多。幸运的是,灵敏度报告对此类问题提供了有效的解决方法。特别是用百分百法则(与 5.4 节中说的类似)可以解决此类问题的分析。

回想一下,5.4 节中介绍的百分百法则可用来检验目标函数系数的同时变动。现在要介绍的百分百法则是用来检验约束右端值的同时变动的,但是,两者的处理方法相似。

在伟恩德公司的例子中,运用百分百法则所需要的数据在图 5.20 灵敏度报告的最后三栏中给出。必须牢记,只有在其他约束右端值都不变的情况下,某一约束右端值才允许在其整个可行域内变动。当几个约束右端值同时变动时,就需要分析每个变动在允许增加或减少值中的百分比。如果所有变动在允许增加或减少值中的百分比之和不超过 100%,根据百分百法则,就可以判定这些变动是在可行域内的。

> 约束右端值同时变动的百分百法则(the 100 percent rule for simultaneous changes in right-hand sides):同时改变几个或所有函数约束的约束右端值,如果这些变动的幅度不大,那么可以用影子价格预测变动产生的影响。为了判别这些变动的幅度是否允许,计算每一变动占可行域所允许的增加值或减少值的百分比,如果所有的百分比之和不超过 100%,那么,影子价格还是有效的,如果所有的百分比之和超过 100%,那就无法确定影子价格是否有效。

为了解释这一法则,考虑图 5.22 中的情形,将 1 个小时的工作时间从工厂 3 移到工厂 2。按照百分百法则,计算如下:

$RHS_2$:12→13

$$\text{占允许增加量的百分比} = 100\left(\frac{13-12}{6}\right)\% = 16\tfrac{2}{3}\%$$

$RHS_3$:18→17

$$\text{占允许增加量的百分比} = 100\left(\frac{18-17}{6}\right)\% = 16\tfrac{2}{3}\%$$

$$\text{总和} = 33\tfrac{1}{3}\%$$

因为变动百分比之和 $33\frac{1}{3}\%$ 小于 100%，所以用影子价格来预测这些变动的影响是有效的，从图 5.22 可以看出。

上面求得的变动百分比之和为 $33\frac{1}{3}\%$，表明即使将原先的变动扩大 3 倍，也不会使影子价格失效。为了检验这一点，扩大变动幅度，重新计算可得，

$RHS_2$：18→15

$$\text{占允许增加量的百分比} = 100\left(\frac{15-12}{6}\right)\% = 50\%$$

$RHS_3$：12→15

$$\text{占允许增加量的百分比} = 100\left(\frac{18-15}{6}\right)\% = 50\%$$

$$\text{总和} = 100\%$$

变动百分比之和刚好等于 100%，而没有超过 100%，所以影子价格依然有效，但这一变动幅度是最大的，大于这一幅度的变动，就不能保证影子价格有效了。图 5.23 表明在更大的变动下，影子价格就不再能预测变动对函数值的影响。

### 问题回顾

1. 为什么要研究约束条件同时发生变化的情况？
2. 如何运用电子表格研究约束条件同时发生变化的情况？
3. Solver 表格有哪些功能来研究约束条件同时发生变化的情况？
4. 为什么管理层会对约束右端值同时变动的情形感兴趣？
5. 研究约束条件右端值同时变化的百分百法则是什么？
6. 运用约束右端值同时变动的百分百法则需要哪些数据？
7. 如果约束右端值的变动占允许变动量的百分比之和不超过 100%，就可以确定得出什么结论？
8. 如果约束右端值的变动占允许变动量的百分比之和超过 100%，可以得出怎样的结论？

## 5.7 本章小结

what-if 分析是在求得基本模型的最优解之后进行的，这些分析可以为管理层决策提供非常有用的信息。本章讨论了如何对线性规划问题进行 what-if 分析。在这类分析中，模型的电子表格、在管理科学课件中提供的 Solver 表格和 Solver 的灵敏度报告起了很关键的作用。

目标函数的系数在建模时往往只是粗略的估计值。如果其中有一个估计值与实际值的差距太大，最后所求得的最优解可能就不是最优的。在电子表格上可以很快地检测出某一系数变动会生产的影响，而根据每个系数的允许变化范围，就可以判断最优解是否正确。用 Excel Solver 生成的灵敏度报告上的数据可以很快计算出允许变化范围。

如果两个或两个以上的目标函数系数不准确，会产生怎样的后果呢？明确的系数变动

可通过电子表格测算出，而通过使用 Solver 灵敏度报告中的数据，运用目标函数系数的百分百法则，可进一步方便地检验所有的同时变动情况。

what-if 分析通常扩展到研究函数约束的变化带来的影响。偶尔会考虑约束条件系数的变化，因为对他们原始的估计不确定，但更多的情况是右端值的变化。约束右端值往往体现的是管理层的政策决策，因此，通过影子价格分析，发现改变决策会产生的影响，从而为管理层更好地决策提供指导。运用电子表格、Solver 表格和 Solver 的灵敏度报告很容易找到影子价格。

在函数约束右端值变动不大的情况下，影子价格会有效地显示出变动产生的影响。如果只有一个约束右端值变动，那么变动的约束右端值的允许变化范围表明了该约束右端值允许变动的范围。如果有几个约束右端值同时变动，则可用约束右端值变动的百分百法则来判断这些变动的幅度是否太大。Solver 的灵敏度报告为计算允许变化范围和运用百分百法则提供了关键的信息。电子表格和 Solver 表格有时也能提供对这类同时变化问题的分析。

## 专业术语

**目标函数系数的允许变动范围**（Allowable range for an objective function coefficient）：在原模型的最优解保持不变的条件下，目标函数的系数允许变动的范围。（5.3 节）

**右端值允许变动的范围**（Allowable range for the right-hand side）：在约束的影子价格有效的前提下，约束函数的右端值允许变动的范围。（5.5 节）

**模型的参数**（Parameters of the model）：线性规划模型的参数是约束函数和目标函数中的常数（系数或右端值）。（5.1 节）

**敏感参数**（Sensitive parameter）：如果一个系数值的微小变动都会引起最优解的变动，这个系数就称为敏感系数。（5.1 节）

**灵敏度分析**（Sensitive analysis）：模型单个参数的 what-if 分析称为灵敏度分析，通过这一分析可以判断最优解对每个参数的灵敏度。（5.1 节）

**影子价格**（Shadow price）：约束函数的影子价格是指约束右端值增加一个微小的量时，所引起的目标函数最优值的增加值。（5.5 节）

**what-if 分析**（what-if analysis）：如果模型的假设条件发生各种变化，会对最优解产生怎样的影响，这类分析称为 what-if 分析。（本章引言）

## 本章管理科学课件的学习辅助

**“Ch. 5—线性规划的 what-if 分析”Excel 文件：**
- 伟恩德公司例子
- 利博公司例子

**Excel 加载宏：**
- Premium Solver
- Solver Table

**管理科学互动模型：**
- 线性规划图解和敏感性分析模型

## 习　题

在必须使用 Excel 的问题之前标有 E*，题号上打有星号表示书后给出了该题的部分或全部答案。

5.1.* G. A. T 公司的产品之一是一种新式玩具，该产品的估计单位利润为 3 美元。因为该产品具有极大的需求，公司决定增加该产品原来每天 1000 件的生产量。但是从卖主那里可以购得的玩具配件（A，B）是有限的。每一玩具需要两个 A 类配件，而卖主只能将其供应量从现在的每天 2000 增加到 3000。同时，每一玩具需要一个 B

类的配件,但卖主却无法增加目前每天1000的供应量。

因为目前无法找到新的供货商,所以公司决定自己开发一条生产线,在公司内部生产玩具配件A和B。据估计,公司自己生产的成本将会比从卖主那里购买增加2.5美元每件(A,B)。管理层希望能够确定玩具以及两种配件的生产组合以取得最大的利润。

将该问题视为资源分配问题,公司的一位管理者为该问题建立如下的参数表:

| 资　源 | 每种活动的单位资源使用量 | | 可获得的资源总量 |
|---|---|---|---|
| | 生产玩具 | 生产配件 | |
| 配件A | 2 | -1 | 3000 |
| 配件B | 1 | -1 | 1000 |
| 单位利润 | 3美元 | -2.50美元 | |

E* a. 为该问题建立电子表格模型并求解。

E* b. 因为两类活动的单位利润是估计的,所以管理层希望能够知道,为了保持最优解不变,估计值允许的变动范围。针对第一个活动(生产玩具),运用电子表格和Solver生成数据表,显示出该活动的单位利润从2美元增加到4美元每次增加50美分时问题的最优解和总利润。在最优解保持不变的前提下,单位利润可以偏离其初值3美元多少?

E* c. 针对第二个活动(生产配件)重复b的分析,该活动的单位利润从-3.50美元增加到-1.50美元,生成数据表(第一种活动的单位利润固定在3.00美元)。

E* d. 用Solver表格系统地生成b、c部分要求的数据(每次增加25美分)。利用这些数据改进你对b、c问题的答案。

e. 用管理科学课件内的线性规划图解和敏感性分析模型来决定在不改变最优解的情况下,每个活动的单位利润最多能变化多少(在其他活动单位利润不变的情况下)。用这一结果表明每个活动的单位利润允许变化范围。

E* f. 运用Excel灵敏度报告来找到每个活动单位利润的允许变化范围。

E* g. 用两维Solver表格系统地生成当b、c部分的两个活动的单位利润同时变化时的总利润。

h. 运用Excel灵敏度报告来描述在最优解不变的前提下,两个活动的单位利润最多同时能改变多少。

2.5. 考虑具有如下参数表的资源分配问题:

| 资　源 | 每种活动的单位资源使用量 | | 可获得的资源总量 |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | |
| 1 | 1 | 2 | 10 |
| 2 | 1 | 3 | 12 |
| 单位利润 | 2美元 | 5美元 | |

该问题的目标是通过确定各种活动的水平,实现最大总利润。在what-if的分析中得知,对单位利润的估计在50%的范围内波动,也就是说,两个活动单位利润的可能值分别在1~3美元和2.50~7.50美元。

E* a. 基于最初的单位利润估计为该问题建立电子表格模型,然后,用Solver求得最优解并生成灵敏度报告。

E* b. 运用电子表格和Solver检验,如果活动1的单位利润从2美元减少到1美元,以及从2美元增加到3美元的情况下,最优解是否保持不变。

E* c. 同样,固定活动1的单位利润为2美元,运用电子表格和Solver检验,如果活动2的单位利润从5美元减少到2.50美元,以及从5美元增加到7.50美元的情况下,最优解是否保持不变。

E* d. 用Solver表格系统分析当活动1的单位利润从1美元增加到3美元时的最优解和总利润(活动2单位利润不变)。然后同样分析当活动2单位利润从2.50美元增加到7.50美元时的情况(活动1单位利润不变)。用这些结果表示每一活动单位利润的允许变动范围。

e. 用管理科学课件内的线性规划图解和敏感性分析模型来求解每一活动单位利润的允许变动范围。

f. 运用灵敏度报告,找出每个单位利润的允许变化范围,然后用求得的允许变化范围检验b~e的结果是否正确。

E* g. 用两维Solver表格系统地生成当d部

分的两个活动的单位利润同时变化时的总利润。

h. 运用线性规划图解和敏感性分析模型进一步解释 g 的结果。

E*5.3. 考虑 4.4 节中的大 M 公司的问题，包括图 4.5 给出的该问题的电子表格模型和最优解。

每一条运输路线的单位运输成本还存在着一些不确定性，因此，在采用图 4.5 的最优解之前，管理层希望知道如果这些估计不准的话，会产生怎样的后果。

运用 Excel Solver 产生的灵敏度报告分析以下问题：

a. 图 4.5、表 4.5 中哪一个单位运输成本的估计最不可能影响最优解的正确性，而哪一个估计值最可能影响最优解？

b. 每一个单位运输成本的允许变化范围分别是多少？

c. 应该怎样向管理层解释单位运输成本的允许变化范围？

d. 如果不止一个运输成本估计值变动，如何通过灵敏度报告来确定最优解是否会改变？

E*5.4. 考虑 4.3 节中的联合航空公司问题，包括图 4.3 给出的该问题的电子表格模型和最优解。

公司管理层正准备和代表客户服务代理商的工会协商，协商的结果可能会改变表 4.4 给出的不同轮班的每个代理商每天的成本。分别考虑下面几种可能的变动。管理层希望知道在作出相应的变动之后，图 4.3 的最优解是否会改变。使用电子表格和 Solver 直接回答 a ~ e 提出的问题，并记录新的最优解。

a. 轮班 2 每个代理商一天的成本从 160 美元增加到 165 美元。

b. 轮班 4 每个代理商一天的成本从 180 美元减少到 170 美元。

c. a、b 中的变动同时发生。

d. 轮班 2、4、5 每个代理商一天的成本均增加 4 美元，而轮班 1、3 每个代理商一天的成本减少 4 美元。

e. 所有轮班每个代理商一天的成本均增加 2%。

f. 使用 Solver 生成该问题的灵敏度报告，假设不能用电脑中的电子表格考虑上面的几个问题，那么，应该如何运用灵敏度报告检验最优解是否保持最优？

g. 对 5 个航班依次用 Solver 表格系统生成：当每个代理的日成本从现在的 15 美元增长或减少 3 美元时的最优解和总成本。

E*5.5. 考虑 4.2 节中的梦大发展公司的例子，包括图 4.2 给出的该问题的电子表格模型和最优解。将表 4.2 中各个项目的净现值作如下的变动，使用电子表格和 Solver 检验最优解是否保持不变，如果改变的话，计算出新的最优解（每次变动单独考虑）：

a. 项目 1 的净现值增加 200000 美元。

b. 项目 2 的净现值增加 200000 美元。

c. 项目 1 的净现值减少 500 万美元。

d. 项目 3 的净现值减少 200000 美元。

e. b、c、d 中的变动同时发生。

f. 项目 1、2、3 的净现值分别变为 4600 美元、6900 万美元、4900 万美元。

g. 项目 1、2、3 的净现值分别变为 5400 万美元、8400 万美元、6000 万美元。

h. 使用 Solver 生成该问题的灵敏度报告，假设不能用电脑中的电子表格考虑上面的几个问题，那么，应该如何运用灵敏度报告检验最优解是否保持最优？

i. 用 Solver 表格系统地依次分析每个项目当净现值从现在的值每增加或减少 100 万美元（分析到 500 万美元），对最优解和总净现值的影响。

5.6. K&L 公司为其冰激凌经营店供应三种口味的冰激凌：巧克力、香草和香蕉。因为天气炎热，对冰激凌的需求大增，而公司库存的原料已经不够了。这些原料分别为：牛奶、糖和奶油。公司无法完成接收的订单，但是，为了在资源有限的条件下使利润最大化，公司需要确定各种口味产品的最优组合。

巧克力、香草和香蕉三种口味的冰激凌的销售利润分别为每加仑 1.00 美元、0.90 美元和 0.95 美元。公司现在有 200 加仑牛奶、150 磅糖和 60 加仑奶油的存货。这一问题代数形式的线性规划表示如下：

假设

$C$ = 巧克力冰激凌的产量（加仑）

$V$ = 香草冰激凌的产量（加仑）

$B$ = 香蕉冰激凌的产量(加仑)

最大化

利润 $=1.00C+0.90V+0.95B$

约束条件

牛奶:$0.45C+0.50V+0.40B\leqslant 200$ (加仑)

糖: $0.50C+0.40V+0.40B\leqslant 50$ (加仑)

奶油:$0.10C+0.15V+0.20B\leqslant 60$ (加仑)

且

$C\geqslant 0 \qquad V\geqslant 0 \qquad B\geqslant 0$

使用 Excel Solver 求解,求解后的电子表格和灵敏度报告如下图所示(注意,因为在 f 中将会讨论牛奶约束,所以该部分在下面的讨论中省去了)。

不用 Excel Solver 重新求解,尽可能详尽地回答下列问题,注意,各个部分是互不干扰、相互独立的。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 巧克力 | 香草 | 香蕉 | | | |
| 2 | 单位利润 | \$1.00 | \$0.90 | \$0.95 | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | 原料 | 每加仑冰激凌所用原料 | | | 所需原料 | | 可用原料 |
| 5 | 牛奶 | 0.45 | 0.5 | 0.4 | 180 | ≤ | 200 |
| 6 | 糖 | 0.5 | 0.4 | 0.4 | 150 | ≤ | 150 |
| 7 | 奶油 | 0.1 | 0.15 | 0.2 | 60 | ≤ | 60 |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | | 巧克力 | 香草 | 香蕉 | | | 总利润 |
| 10 | 每加仑 | 0 | 300 | 75 | | | \$341.25 |

**可调单元格**

| 单元格 | 名称 | 最终价值 | 成本削减 | 目标系数 | 增加上限 | 降低下限 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| \$C\$10 | 每加仑巧克力用量 | 0 | -0.0375 | 1 | 0.0375 | 1E+30 |
| \$D\$10 | 每加仑香草用量 | 300 | 0 | 0.9 | 0.05 | 0.0125 |
| \$E\$10 | 每加仑香蕉用量 | 75 | 0 | 0.95 | 0.0214 | 0.05 |

**约束**

| 单元格 | 名称 | 最终价值 | 影子价格 | 右端值 | 增加上限 | 降低下限 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| \$F\$5 | 所用牛奶量 | | | | | |
| \$F\$6 | 所用糖量 | 150 | 1.875 | 150 | 10 | 30 |
| \$F\$7 | 所用奶油量 | 60 | 1 | 60 | 15 | 3.75 |

a. 最优解和总利润是多少?

b. 假设香蕉冰激凌每加仑的利润变为 1.00 美元,最优解是否改变,对总利润又会产生怎样的影响?

c. 假设香蕉冰激凌每加仑的利润变为 92 美分,最优解是否改变,对总利润又会产生怎样的影响?

d. 公司发现有 3 加仑的库存奶油已经变质,只能扔掉,最优解是否改变,对总利润又会产生怎样的影响?

e. 假设公司有机会购得 15 磅糖,总成本 15 美元,公司是否应该购买这批糖,为什么?

f. 在灵敏度报告中加入牛奶的约束,并解释如何减少各种产品的产量?

5.7. 大卫、莱蒂娜和莉迪亚是一家生产钟表的公司业主以及员工,大卫、莱蒂娜每周最多工作 40 个小时,而莉迪亚每周最多只能工作 20 个小时。

该公司生产两种不同的钟表:落地摆钟和墙钟。大卫是机械工程师,负责装配钟表内部的机械部件,而莉迪亚是木工,负责木质外壳的手工加工,莉迪亚负责接收订单和运货。每一项工作所需时间如

下表所示：

| 任　务 | 所需时间(小时) | |
|---|---|---|
| | 落地摆钟 | 墙　钟 |
| 组装机械配件 | 6 | 4 |
| 雕刻木质外壳 | 8 | 4 |
| 运输 | 3 | 3 |

每生产并销售一个落地摆钟产生的利润是 300 美元，每个墙钟为 200 美元。

现在，三个业主希望能够得到各种产品产量的最优组合，以使得利润最大化。

a. 为该问题建立线性规划模型。

b. 使用管理科学互动模型中的线性规划图解和敏感性分析模型对该模型求解。然后用该模型检验如果落地摆钟的单位利润从 300 美元增加到 375 美元，而模型的其他不变，最优解是否会改变。然后用该模型检验如果挂钟的单位利润也从 200 美元变动到 175 美元，最优解是否会改变。

E* c. 在电子表格上建立和求解该问题的原始模型。

E* d. 使用 Excel Solver 检验 b 中的变化效果。

E* e. 使用 Excel Solver 系统分析如果落地摆钟的单位利润在 150 美元到 450 美元之间每增加 20 美元给最优解和总利润带来的影响(挂钟单位利润不变)。然后同样分析当挂钟的单位利润在 50 美元到 350 美元之间每增加 20 美元给最优解和总利润带来的影响(落地摆钟单位利润不变)。而模型的其他不变，运用灵敏度报告确定最优解是否会改变？用这些信息来估计每种钟单位利润允许取值范围。

E* f. 用两维 Solver 表格分析如果两种钟的单位利润同时变动，像 e 中表示的一样，只是每增加 20 美元变为每增加 50 美元，给最优解(与图 5.13 相似)带来的影响。

E* g. 依次对每个业主用 Solver 表格分析如果他们决定将各自的最大可用工时增加 5 小时一周，那么给最优解和总利润带来的影响。

E* h. 用 Excel Solver 系统分析如果只是大卫将最大可用工时变为 35、37、39、41、43、45 时最优解和总利润的变化。然后同样分析莱蒂娜将可用工时进行上述改变时的情况。最后分析当莉迪亚将最大可用工时变为 15、17、19、21、23、25 时最优解和总利润的变化。

E* i. 生成 Excel 灵敏度报告，用它来决定每种钟的单位利润允许变化范围和每个业主的最大可用工时的允许变化范围。

j. 为了增加总利润，三个业主同意增加他们三人中的一个人的工作时间，增加该人的工作时间必须能够最大限度地增加总利润。运用灵敏度报告，确定应该选择哪一个人(假设模型的其他部分没有任何的变动)。

k. 解释为什么有一个人的影子价格为 0。

l. 如果莉迪亚将工作时间从每周的 20 小时增加到 25 小时，是否可以用影子价格分析该变动对结果的影响？如果影子价格有效，总利润将增加多少？

m. 在 l 中加入另一变动，即大卫的工作时间从每周 40 小时减少到 35 小时，重新分析。

n. 使用图形证明 m 中的结论。

E*5.8.* 重新考虑习题 5.1。在与配件的卖主协商之后，G. A. T 公司的管理层得知，如果公司能够提高买价，两个卖主都会愿意考虑增加原来的供货量(A 类配件每天 3000，B 类配件每天 1000)。增付的买价将由双方协商而定。如果能够生产出的话，每天可销售 2500 件玩具，假设最初的单位利润的估计是准确的，解答下列问题：

a. 在原先的最大供货水平约束的基础上，再加入每天最多销售 2500 的限制，建模并求解。

b. 不考虑增加买价，使用电子表格和 Solver 确定约束 A 的影子价格，运用求解得到的影子价格确定公司愿意为 A 类配件多支付多少？

c. 针对 B 类配件，重复 b 的分析。

d. 在保持 b 求出的影子价格有效的前提下，估计 A 类配件最大供货量的变动范围，将最大供货量从 3000 增加到 4000，每次增加 100，生成包括最优解和总利润的数据表。

e. 将 B 类配件的最大供货量从 1000 增加到 2000，每次增加 100，生成如 d 的数据表。

f. 运用 Solver 灵敏度报告确定每一配件约束的影子价格，以及每个函数约束右端值的可行域。

E*5.9. 重新考虑习题 5.2，在 what-if 分析后，可以发现两个函数约束右端值的估计值在 50% 的范围内变动，也就是说，这两个数字可能的值分别在 5 ~ 15 和 6 ~ 18 之间。

a. 求解最初的电子表格模型，增加第一个函数约束右端值的数值，增加值为 1，重新求解，从而确定该约束右端值的影子价格。

b. 将第一个函数约束右端值的数值从 5 增加到 15，每次增加值为 1，生成包括最优解和总利润的数据表。运用该数据表估计约束右端值的允许取值范围，也就是 a 部分获得的影子价格的有效区域。

c. 针对第二个函数约束重复 a 部分的问题。

d. 针对第二个函数约束重复 b 部分的问题，其中约束右端值从 6 增加到 18，每次增加 1 个单位。

e. 使用 Solver 的灵敏度报告确定每个函数约束的影子价格以及每个约束右端值的可行域。

5.10. 考虑具有如下参数表的资源分配问题：

| 资源 | 每种活动所需的单位资源使用量 | | 可获得资源数量 |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | |
| 1 | 1 | 3 | 8 |
| 2 | 1 | 1 | 4 |
| 单位利润 | 1 美元 | 2 美元 | |

该问题的目标是确定各种活动的单位数量使得总利润最大。

a. 使用作图法求解该模型。

b. 增加 1 个单位的可获得的资源数量，用作图法再次求解，从而确定各种资源的影子价格。

E* c. 对 a 和 b 部分用电子表格建模并求解。

E* d. 用 Solver 依次对各个资源分析当可用资源的数量从低于原始值 4 到高于原始值 6 的范围内每增加 1 单位对最优解和总利润的影响。运用结果估计可用资源量的允许取值范围。

E* e. 运用 Solver 的灵敏度报告求得影子价格。同样用该报告找到在影子价格保持正确的前提下可用资源的允许范围。

f. 描述一下为什么在管理层有权改变可获得的资源量时，影子价格是很有用的。

5.11. 考虑具有如下参数表的资源分配问题，该问题的目标也是确定各种活动的单位数量使得总利润最大。根据 5.10 的要求对该题作同样的分析。

| 资源 | 每种活动的单位资源使用量 | | 可获得的资源数量 |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | |
| 1 | 1 | 0 | 4 |
| 2 | 1 | 3 | 15 |
| 3 | 2 | 1 | 10 |
| 单位利润 | 3 美元 | 2 美元 | |

E*5.12* 考虑 4.1 节中的超级食品公司的例子，包括图 4.1 的电子表格模型以及最优解。运用 Excel Solver 生成灵敏度报告，然后，运用该报告分析下面的问题。

a. 广告预算每增加 1000 美元，总的感知量会增加多少？

b. a 中每次增加的感知量在预算变动多大的范围内有效？

c. 规划预算每增加 1000 美元，总的感知量会增加多少？

d. b 中每次增加的感知量在规划预算变动多大的范围内有效？

e. 如果广告预算和规划预算同时增加 100000 美元，a、c 中求得的数据是否还有效？

f. 如果广告预算和规划预算只能有一个增加 100000 美元，增加哪一个会产生较大的收益？

g. 如果将 100000 美元的预算从广告预算转移到规划预算，或者相反，哪一种造成的损失少些。

E*5.13. 按照 5.12 的要求对 4.5 节中超级食品公司的例子进行分析，包括图 4.6 的电子表格以及最优解。

E*5.14. 考虑 4.3 节中联合航空公司问题，包括图

4.3 的电子表格以及最优解。

管理层现在希望增加表 4.4 最右一栏的数据，增大 1 个或 2 个单位，这些数据表示不同时间需要的最小数目的代理商。为了指导决策，管理层要知道这样变动将会对总成本产生的影响。

运用 Excel Solver 生成灵敏度报告，为分析下面的问题做准备。

a. 增加表 4.4 最右一栏中哪一些数据，增加多少，不会引起总成本增加，假设其他条件均不变。

b. 对于上面增加数值会引起成本增加的数据，数值每增加 1%，所增加的总成本是多少？对于每一个这样的数据，表示出在保持增加量不变的条件下，数值可以增加的范围。

c. 如果 b 中每个数值都同时增加 1 个单位，b 中得出的答案是否还有效？

d. 如果所有的 10 个数据同时增加 1 个单位，b 中得出的答案是否还有效？

e. 在保证 b 的答案有效的前提下，10 个数据可以同时增加多少？

## 案例 5.1　销售肥皂

回顾一下 2.7 节中给出的利博公司的例子。我们要对三个关键产品：去污剂、液体洗涤剂、洗衣粉进行广告促销。管理者制定了如下政策决策，规定了在促销活动中所要达到的目标。

- 去污剂市场份额增加至少 3%
- 液体洗涤剂市场份额增加至少 18%
- 洗衣粉市场份额增加至少 4%

该问题最初的线性规划模型如图 2.21 所示。通过促销活动要获得的三种产品市场份额增加的最小值在数据单元格最小增长额（G8:G10）中给出。可变单元格广告数量（C14:D14）中的最优解表明该次促销活动应该采用 4 个电视广告和 3 个印刷媒体上的广告。目标单元格总成本（G14）显示该次活动的总成本为 1000 万美元。

得到这些信息后，利博公司的管理层现在想分析一下增加三种产品的市场份额得到的相应收益与总广告成本间的平衡问题。因此布置给一个管理科学小组（也就是你们）继续收集需要的信息来分析管理层是否应该改变原先在市场份额上的决策。特别的管理层必须先知道改变原先在市场份额上的决策对总成本的影响。

a. 对三种产品依次用图形分析如果产品市场份额的最小增加值为 1% 给总成本带来的影响（分析一种产品时，其他两种产品的产品市场份额增加的最小值不变）。

b. 用图 2.21 所示的电子表格模型（可在光盘中获得）来分析 a 中的问题。

c. 对三种产品依次用 Solver 表格（可在光盘中获得）分析如果产品市场份额增加的最小值发生一系列变化给最优解和总成本带来的影响（分析一种产品时，其他两种产品的产品市场份额增加的最小值不变）。对每一种情况从 0 开始到初始值的两倍，每隔 1% 进行分析。

d. 用 Solver 表格生成灵敏性报告，并表明报告如何反映 a 中的信息。同样用该报告分析每种产品市场份额增加的最小值的允许变化范围。解释允许变化范围与 c 中得到的结果的关系。

e. 假设在最小增长单元格（G8:G10）中的初始值增加相同的量，为了使灵敏性报告给出的影子价格保持正确，这个量最大不能超过多少？

f. 下面是管理科学小组准备交给管理者的备忘录的开始部分，提供了平衡问题的分析的信息。根据你前面得出的结论将备忘录续写完。用清晰简短的管理语言表述你的信息。不要用专业术语，比如影子价格、允许取值范围等。

### 备忘录

**致：**利博公司的管理层

**作者：**管理科学小组

**主题：**广告支出与市场份额之间的平衡问题

按照指示，我们继续对这次大型促销活动的规划进行分析，本次促销活动涉及的主要产品为喷式洗前去污剂、新式液体洗涤剂和洗衣粉。

我们在最近的报告中给出了初步的结论，即为了以最小的成本完成市场份额的目标，在各种媒体上的广告应该这样分配：

电视广告 400 万美元。

印刷媒体上的广告 600 万美元。

*广告总成本:1000 万美元。*

*估计这样可以增加的市场份额为:*

*去污剂:3%*

*液体洗涤剂:18%*

*洗衣粉:8%*

你们曾经要求这三种产品的最小市场份额增加值为3%、18%和4%,现在,前面两种产品市场份额的最低水平刚刚好达到,而第三种超出了要求的最低水平。

但是,你们说明过,在最小市场份额增加量(3%、18%、4%)上的管理决策只是初步的,会根据情况的需要作出调整。现在我们可以给出与广告成本和市场份额增加量有关的更多信息,你们可以试着改变决策,测试一下改变决策是否会提高广告成本与市场份额之间的平衡。

为了帮助你们决策,我们就平衡问题对每个函数约束都作了分析。我们的最优估计如下所示。

## 案例 5.2 控制大气污染

如4.3节中所述的N&L公司是一家全球著名的钢铁制造商,位于钢铁之城。该公司目前雇用了50000名员工,是当地的主要劳动力雇用者,因此整个城市都因这家公司而繁荣与发展起来,这里的人们也一直都认为凡是对公司有利的必然对整个城市有利。但是现在人们的观点发生了一定的变化:公司锅炉中排放出的气体因未加治理,正破坏着城市的风貌并日益危及着城市居民的身体健康。

最近的一次股东大会选举产生了一个较为英明的新董事会,其中的董事成员正与城市官员和居民讨论如何处理空气污染的问题,他们一起制定出了很严格的大气排放质量标准。

所排放的污染气体中三种主要的成分是:大气微尘、氧化硫和碳氢化合物。新制定的排放气体质量标准要求公司降低这些污染气体的排放量,具体要求如下表所示:

| 污染物 | 要求每年排放减少量(百万磅) |
|---|---|
| 大气微尘 | 60 |
| 氧化硫 | 150 |
| 碳氢化合物 | 125 |

董事会已经指示公司的管理人员召集工程人员,用最经济的方法降低污染气体的排放量。

公司的污染气体主要来自于两个方面,一是铸生铁的鼓风炉,一是炼钢的敞口式反射炉。在这两方面,工程师都认为最有效的降低污染的方法是:(1)增加烟囱的高度①;(2)在烟囱中加入过滤装置;(3)在燃料中加入清洁的高级燃料。三种方法都有其技术限制(例如,烟囱可增加的高度是有限的),但可以考虑在各自的技术限制内,采取一定程度的措施。

下表显示了在技术允许的范围内,最大限度地使用各种方法可以降低两个炉子污染气体的排放量。

**运用各种降污方法最大限度可减少的每种污染气体的年排放量**

| 污染气体 | 增加烟囱高度 | | 加入过滤装置 | | 加入高级燃料 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 鼓风炉 | 反射炉 | 鼓风炉 | 反射炉 | 鼓风炉 | 反射炉 |
| 大气微尘 | 12 | 9 | 25 | 20 | 17 | 13 |
| 氧化硫 | 35 | 42 | 18 | 31 | 56 | 49 |
| 碳氢化合物 | 37 | 53 | 28 | 24 | 29 | 20 |

为了方便分析,假设各种方法也可以在技术允许的范围内部分实施,从而达到一定程度地减少污染气体的效果。此外,各种方法在两个炉子上的实施比例可以不同,且在效果上也是互不影响的。

在分析了上面的数据之后,可以发现,没有一种方法可以实现全部的降污要求,而另一方面,在两个炉子上都同时最大限度地使用各种方法的组合,会超额完成降污任务,但这样做的费用是昂贵的,不利于公司的产品保持竞争力。因此,工程师认为,应该在考虑各种方法的成本与效益的基础上,合理地组合各种方法。此外,因为两个炉子的情况并不相同,

① 在本次研究之后,这一方法引起了人们的争议。因为,增加烟囱的高度,只不过是通过将污染的范围扩大而减少近距离的污染。环境专家认为,硫化物长久的留在大气中极易引起酸雨。最后,美国的环境保护协会制定新的规则,规定不许使用增加烟囱高度的方法来减少污染。

所以针对两个炉子的治理方法也将不同。

分析每种方法的一年总成本，该成本包括运营和维护费用，以及因为使用降污方法而致使生产效率降低，进而减少了的收入。此外，最大的成本是安装设备的启动成本。为了使一开始的启动成本与今后的年成本可以相互比较，必须考虑货币的时间价值，将年成本折现。这样可以生成下面的数据表，该表表示的是最大限度地使用各种方法估计的年成本。并且，各种方法的使用成本与可获得的降污能力是成比例的，也就是说，要取得一定比例的降污效果，所实施方法的成本在总成本中占同样的比例。

**最大限度地使用各种方法估计的年成本（百万美元）**

| 污染气体 | 鼓风炉 | 反射炉 |
|---|---|---|
| 大气微尘 | 8 | 10 |
| 氧化硫 | 7 | 6 |
| 碳氢化合物 | 11 | 9 |

现在，可以制定出降污规划大致的框架了，即，这一规划必须确定在两个炉子上使用哪几种方法，每种方法的实施程度。

假设你被任命为管理科学小组的组长，管理层要求你以最小的成本实现降低各种污染气体的年排放量要求。

a. 口头描述该线性规划问题的各个组成部分。

b. 在电子表格上建模。

c. 求得最优解并产生灵敏度报告。

现在，管理层希望能在你的帮助之下进行一些 what-if 分析。因为管理层对这几种治理方法都没有经验。所以各种方法的成本只是一个大致的估计，实际值可能在10%的范围内。此外，第二个表格的数据也还存在一些不确定性，尽管这些不确定性或许比第三个表格中的要小一些。第一个表格中的数据是政策标准，但是，这些数据是在不知道成本的情况下确定的一些暂时性的数值，公司与政府的官员都认为，应该在成本与收益分析的基础上来确定最终的决策。政府官员估算出如果将每一张表中的政策标准增加10%，对整个城市的价值是350万美元。因此，政府决定，公司每提高10%的降污标准（表中的所有数据，直到50%），将可获得350万美元的降税。

最后，对政策标准中各种污染气体的相对值还存在一点分歧，如第一个表所示，要求减少的大气微尘的数量还不到其他两种的一半，因此，有些人提出，是否减少这一差距。而另一些认为应该增大差距，因为氧化硫和碳氢化合物的危害比大气微尘大得多。最后，人们同意在获得最优的成本收益平衡解之后，再对这一点探讨一下，增加一种污染气体的数量同时减少另一种，看看会有怎样的影响。

d. 判断线性规划模型中哪些系数是敏感系数，并说明哪些系数，如果可能的话，应该作进一步精确的估计。

e. 分析第三张表中的成本参数如果不准确的话会造成怎样的影响，如果实际值比估计值少10%，是否会影响最优解？实际值比估计值多10%，又将如何？为进一步的参数估计工作提出建议。

f. 对于每一种污染气体，求出所要求排放减少量的微小变动会引起的成本的变化量。排放减少量在多大的范围内变动，成本变化量会保持不变？

g. 在保持总成本不变的前提下，政策中大气微尘标准的每一单位的变动，可能会引起氧化硫排放标准多大的变动，又或者会引起碳氢化合物排放标准多大的变动？如果氧化硫和碳氢化合物同时因此而变动，且两者变动的幅度相同，该变动的幅度又是多少？

h. 假设以 θ 表示每一张表中标准的增加百分比，θ = 10，20，30，40，50，分别求出该修正的线性规划问题的最优解。考虑税收上的优惠，管理者将会选择那一个 θ？

i. 根据上面计算出的 θ，生成灵敏度报告，并重复 f 和 g 的分析，为污染标准中三种气体的相对量作出最终的决策。

## 案例5.3 农场管理

普拉夫家族拥有并经营着一家世代相传的640亩的农场，他们必须在农场上辛苦地工作才能维持

生活和度过难关。这个家族的相当一部分历史是先辈们如何与洪水、旱灾和其他灾害做斗争的历史。但是,这个家族的成员很满意这种自力更生的生活方式,当时,许多的家庭都放弃了农场或者被大的农业公司收购,但是普拉夫的成员为能够继续保持传统的生活而感到满足和自豪。

约翰·普拉夫是目前农场经理,他的妻子尤妮斯管理着家务和财政,约翰的父亲还住在农场上,并且将大部分时间都投入农场的劳动中去。约翰和尤妮斯的较年长的儿子——弗兰克、菲力斯和卡尔放学之后都要干很重的农活。

整个家族在冬、春两季可提供4000个人工(每人每小时),而夏、秋两季可提供4500个人工。如果不需要这么多的劳动力,弗兰克、菲力斯和卡尔会到临近的农场打工,冬、春季节每小时5美元,夏、秋季节每小时5.50美元。

该农场饲养了奶牛和蛋鸡,同时种植三种农作物:大豆、玉米和小麦(这三种农作物都可以售出换回现金,但玉米可用于喂牛,而小麦可用于喂鸡)。农作物在夏末和秋天收割,在冬天,约翰、尤妮斯和他们的父亲决定下一年要生产的牲畜和农作物。

现在,这个家族正经历了一次大丰收,拥有了20000美元可用于购买更多的牲畜(其他的一些现金将会用于将来的开支,包括农作物的种植)。他们现在总共有价值35000美元的30头牛和价值5000美元的2000只鸡,他们希望能够保存这些牲畜并再购买一些。如果要购买的话,每头牛的价格是1500美元,而每只鸡的价格是3美元。

一年之后,每头牛会增值10%,而鸡由于老化会贬值25%。每头牛需要有两亩地的草,以及每月10个人工,每年可净收入现金850美元。鸡相对应的数字就显得微不足道了,一只鸡每月0.05个人工,每年净收入4.25美元。由于鸡舍和牛圈的限制,最多可饲养5000只鸡和42头牛。

下表给出了种植三种农作物的每亩地的相关数据,包括在上半年和下半年需要的人工以及净收入的大致估计。

**种植三种农作物的每亩地的相关数据**

| | 大 豆 | 玉 米 | 小 麦 |
|---|---|---|---|
| 冬春季节(人工数) | 1.0 | 0.9 | 0.6 |
| 夏秋季节(人工数) | 1.4 | 1.2 | 0.7 |
| 净值(美元) | 70 | 60 | 40 |

为了给牲畜提供足够的饲料,约翰决定在下一年为每头牛种植至少一亩的玉米,而为每只鸡种植至少0.05亩的小麦。

约翰、尤妮斯和父亲现在正在讨论每年应该种植多少农作物以及饲养多少头牛和多少只鸡。他们讨论的目的是为了明年年底能够拥有最多的现金(牲畜的收入加上农作物的收入加上原有的货币资产加上年底所拥有的牲畜的价值减去明年40000美元的生活费)。

a. 口头描述该线性规划问题的各个组成部分。

b. 在电子表格上建模。

c. 求得最优解并生成灵敏度报告,通过该模型可预测明年年底的货币资产是多少?

d. 计算三种农作物每一亩的净值允许取值范围。

上面每亩农作物的净值是在假设气候良好的条件下得出的,如果气候不好的话,会严重影响农作物的收成。他们最担心的自然灾害是旱、涝、早霜以及干旱和早霜、涝灾和早霜一起来。在这些情况下,估计的净值如下表所示。

| 气候条件 | 每亩净值(美元) | | |
|---|---|---|---|
| | 大 豆 | 玉 米 | 小 麦 |
| 旱 | -10 | -15 | 0 |
| 涝 | 15 | 20 | 10 |
| 早霜 | 50 | 40 | 30 |
| 干旱和早霜 | -15 | -20 | -10 |
| 涝灾和早霜 | 10 | 10 | 5 |

e. 针对上面的每种情况,对线性规划模型作些调整,然后求出最优解,并估计年底该家族拥有的货币资产。

f. 对于上面6种情况(包括气候良好)得出的最优

解，如果另外 5 种情况中的一种也同时发生，计算各种情况下家族年底的货币资产。根据你自己的判断，该家族应该作怎样的决定才能最有效地平衡气候良好条件下的好收成和气候不好条件下的坏收成？

父亲对往年的气候作了一番研究，并得到了下面的一些数据。

| 气候条件 | 概率(%) |
|---|---|
| 好天气 | 40 |
| 旱 | 20 |
| 涝 | 10 |
| 早霜 | 15 |
| 干旱和早霜 | 10 |
| 涝灾和早霜 | 5 |

基于这些数据，家族决定作出如下的畜牧和种植决策。不再假设良好的气候条件会持续下去，而是按照上表的概率计算净收入在所有情况下的平均值。

g. 调整 b 中线性规划模型，以适应新的方法。

h. 对调整过的模型重复 c 的问题。

i. 应用 h 中求得的影子价格分析如果家族能够获得 10% 利息的银行贷款，是否值得贷款购买更多的牲畜？

j. 对于每一种农作物，运用 h 中生成的灵敏度报告，分析在最优解不变的条件下，每一个净值估计可能错误的幅度。其中哪两个净值必须进一步估计，如果两个估计值同时不准确，这两个估计值必须精确到怎样的程度，才能保持最优解不变？用两维 Solver 表格系统地分析当两个净现值同时比原先的估计值增加 2 倍时的最优解不变的取值。

各种类型的组织都可能遇到类似的问题，即，每个组织都面对着不确定的未来，会发生多种情形的一种，而到底哪种情况发生，管理层是无法控制的。组织者必须确定各种活动的水平，但是各种活动对总绩效测度的单位贡献是受所发生的情形影响的，在这样的情况下，各种活动的最优组合是什么？

k. 考虑一下还有哪种情形与农场管理相同，描述一个你的例子。

# 案例 5.4　学校分配学生(再述)

重新考虑案例 4.3。斯普林费尔德学校董事会还是决定为所有距离超过 1 英里的学生提供公交服务。另一个政策是如果能够降低成本，可以将同一区域的学生分在不同的学校里(这一政策在案例 9.4 中会改变)。但是，在采取 4.3 案例中基于 a 和 b 得出的公交规划之前，管理层还想作一些 what-if 分析。

a. 如果你在案例 4.3 中没有做 a 和 b 部分的题目，为该问题建立电子表格模型并求解。

b. 用 Solver 生成灵敏度报告。

学校董事会担心的一点是 6 区的道路建设，该区的道路建设影响着学校的公交，可能会增加公交成本 10%。

c. 假设其他地区的公交成本不变，运用灵敏度报告，检验在最优解不变的情况下，6 区到学校 1 的公交可以增加的成本。如果求出可以增加的成本不能超过 10%，用 Solver 求一个允许增加 10% 的最优解。

d. 针对学校 2 重复 c 的问题(假设其他的成本均不变)。

e. 现在假设 6 区到所有学校的公交成本都以同等百分比增加，运用灵敏度报告分析最优解不变的条件下，增加的百分比允许多大。如果求出可以增加的成本不能超过 10%，用 Solver 求一个允许增加 10% 的最优解。

学校董事会可以租一些简易的教室，来增加一个或几个学校的容量，但是这样做的成本很高，除非可以降低总成本，不然学校不会采取这一措施。每个简易教室可容纳 20 名学生，每年的租费是 2500 美元。为了分析这一决策选项，学校董事会决定假设 6 区的道路建设不会进一步影响、增加学校的公交费用。

f. 对于每一个学校，使用灵敏度报告中的影子价格，确定是否需要租用简易教室。

g. 对于租用简易教室的学校，运用灵敏度报告分析影子价格有效的范围(假设只有一个学校租用简易教室)。

h. 如果有几所学校需要租用简易教室，确定在影子价格有效的前提下，每个学校租用教室的数目的组合。然后，用影子价格确定其中哪种组合的公交和租费总成本最小。使用 Solver 找到该问题对应的最优解。

i. 如果 h 中的结果可行，在影子价格最大的学校增加一个简易教室，使用 Solver 求得最优解，并生成相应的灵敏度报告。利用这些信息，判断 h 中的结果是否最优，如果不是，找出最优解。

CHAPTER

# 6 运输问题和指派问题

## 学习目标

完成本章学习后，你应该掌握：

1. 描述运输问题的特征。
2. 根据运输问题的描述，建立该问题的电子表格模型。
3. 同样能够解决运输问题的一些变形问题。
4. 给出两种能够解决 Excel Solver 不能解决的大型运输问题的算法名字。
5. 研究运输问题及其变形问题的各种应用。
6. 描述指派问题的特征。
7. 知道运输问题与指派问题的关系。
8. 根据指派问题的描述，建立该问题的电子表格模型。
9. 同样能够解决指派问题的一些变形问题。
10. 给出一种能够解决 Excel Solver 不能解决的大型指派问题的算法名字。

在上一章之中，你已经看到了线性规划在启发管理者处理众多种类的问题时有多么大的帮助。在这一章中，我们将继续介绍线性规划的应用，以此来拓展我们的视野。我们研究的重点是两个互相联系的特殊类型线性规划问题。这两个问题非常重要，我们分别把它们叫做运输问题和指派问题。这两个问题都属于第 4 章中我们介绍过的线性规划的第三种类型：网络配送问题。

运输问题之所以得名主要是因为它的许多应用都涉及到确定如何以最优的方式运输货物。然而，你也将看到有许多应用和运输并没有什么关系。

指派问题之所以得名是因为它的许多应用都涉及到如何将任务指派给人员的问题，同样在本章中你也将看到和指派没有什么关系的应用。

从案例研究入手，这一章的一开始描述了运输问题以及这些问题的变形的特征，说明如何用电子表格模型解决此类问题，并研究每一种问题类型的各种应用。接下去的章节中对指派问题作了同样的分析。

## 6.1 案例研究:P&T 公司的配送问题

道格拉斯·文斯敦十分担忧。公司成本正在迅速增长而利润却没有得到同样的增长。如果这种趋势继续发展下去的话,股东们会对下一个收益报告非常不满。作为 P&T 公司的首席执行官,他知道是资金上出了问题。他已经找出了一种控制成本的方法。

道格拉斯突然拿起了电话,打给他的配送经理理查德·鲍沃斯。

**道格拉斯(CEO):** 理查德,我是道格拉斯·文斯敦。

**理查德(配送经理):** 你好,道格拉斯。

**道格拉斯:** 理查德,刚才我正在仔细研究一些成本数据,一个数据令我非常吃惊。

**理查德:** 是吗? 什么数据?

**道格拉斯:** 我们豌豆罐头的运输成本。上个季度是 178000 美元。我记得在几年前这个数字还只是 100000 美元。这是怎么回事?

**理查德:** 是的,你说的对。这些成本确实一直在上升。其中一个因素就是我们的运量增长了一点,但是主要原因还是我们雇用的货车司机的要价暴涨了许多。对于这一点,我们也抱怨过,但是他们却说是他们和代表司机的工会之间的新合同使他们的成本增长了很多,而且他们的保险费用也上升了。

**道格拉斯:** 你有没有考虑过重新找一些货车司机呢?

**理查德:** 当然考虑过。事实上,我们已经为即将来临的下季度找到了新的货车司机。

**道格拉斯:** 好的,那么下个季度我们的运输成本是不是会下降很多呢?

**理查德:** 我们的计划是这一成本保持在 165000 美元左右。

**道格拉斯:** 哦,这还是太高。

**理查德:** 但这已经是我们所能够得到的最好结果了。

**道格拉斯:** 好吧,让我们从另外的一个角度看这个问题。你是不是从我们的三个罐头厂把豌豆罐头运送到我们的四个仓库中?

**理查德:** 是的。

**道格拉斯:** 那你是如何确定从罐头厂到仓库的成本的?

**理查德:** 我们有一个使用了很多年的标准策略。

**道格拉斯:** 这个策略能够使你的总运输成本达到最低吗?

**理查德:** 我想在这个方面这个策略已经发挥了极好的作用。

**道格拉斯:** 但是这个策略是否使用了数学算法生成保证总运输成本最低的运输计划?

**理查德:** 不,不是这样的。我想我们还做不到这一点。有什么办法可以那样做吗?

**道格拉斯:** 是的,我想管理科学技术可以帮助我们做到这一点。这是我在面试我们上个月聘用的 MBA 毕业生金·贝克时学到的。金认为这项技术能直接用于我们公司。我们聘用金就是希望他能帮助我们将商学院教授的最好的技术应用到公司。我认为我们应该把你的运输计划提交给金,看看她是不是能够对这个计划作一些改进。

**理查德:** 有道理。

**道格拉斯:** 那好吧。我想你最好和金联系一下并且尽快给我一份报告。

**理查德:** 好的。

谈话很快结束了。

## 背 景

P&T 公司是一家由家族经营的小公司。它收购生菜并在食品罐头厂中把它们加工成为罐头,然后再把这些罐头食品分销到各地卖出去。

这个公司的一个主要产品是豌豆罐头。这些豌豆罐头在三个食品罐头厂(靠近华盛顿的贝林翰、俄勒冈州的尤基尼、明尼苏达州的艾尔贝·李)加工,然后用卡车把它们运送到美国西部的四个分销仓库(加利福尼亚州的萨克拉门托、犹他州的盐湖城、南达科他州的赖皮特城、新墨西哥州的奥尔巴古)。如图 6.1 所示。

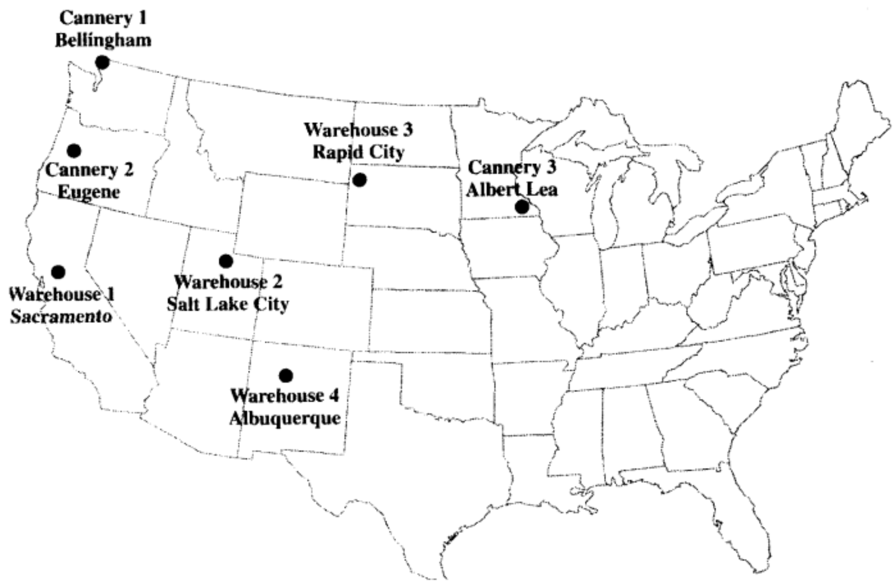



图 6.1 P&T 公司问题中的仓库和加工厂位置图。

## 公司目前的做法

许多年来,公司一直用下面的策略确定需要从每个罐头加工工厂运送多少罐头食品到各个仓库。

**当前的运输策略:**

1. 因为在贝林翰的罐头厂距离仓库最远,所以把它的产品运送到最近的一个仓库。也就是萨克拉门托的那个仓库。如果还有剩余的话,就把它们运送到盐湖城的仓库中去。
2. 因为在奥尔巴古的仓库距离食品罐头厂最远,所以就要从最近的一个罐头厂(艾尔贝·李的罐头厂)中运送产品到奥尔巴古。如果还有剩余的话,就要运送到赖皮特城的仓库中。
3. 用尤基尼的罐头厂满足其他仓库的剩余需求。

对于即将来临的收获季度,每一个罐头厂的产量都进行了估计,并且每一个仓库都从豌豆罐头总供应量中分配到了一定的比例。这些数据如表 6.1 所示。

表 6.1　P&T 公司的运输数据表(单位:车)

| 罐头加工厂 | 产　量 | 仓　库 | 分配量 |
|---|---|---|---|
| 贝林翰 | 75 | 萨克拉门托 | 80 |
| 尤基尼 | 125 | 盐湖城 | 65 |
| 艾尔贝·李 | 100 | 赖皮特城 | 70 |
| | | 奥尔巴古 | 85 |
| 合　计 | 300 | 合　计 | 300 |

把当前运输策略应用表 6.1 的数据,得到表 6.2 所示的运输计划。在这个即将来临季节中每车的运输成本如表 6.3 所示。

表 6.2　P&T 公司的当前运输计划(单位:车)

| 从 \ 至 | 仓　库 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 萨克拉门托 | 盐湖城 | 赖皮特城 | 奥尔巴古 |
| 食品罐头厂 | | | | |
| 贝林翰 | 75 | 0 | 0 | 0 |
| 尤基尼 | 5 | 65 | 55 | 0 |
| 艾尔贝·李 | 0 | 0 | 15 | 85 |

表 6.3　P&T 公司的单位卡车的运输成本(单位:美元)

| 从 \ 至 | 仓　库 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 萨克拉门托 | 盐湖城 | 赖皮特城 | 奥尔巴古 |
| 食品罐头厂 | | | | |
| 贝林翰 | 464 | 513 | 654 | 867 |
| 尤基尼 | 352 | 416 | 690 | 791 |
| 艾尔贝·李 | 995 | 682 | 388 | 685 |

合并表 6.2 和表 6.3 得到即将来临的季节中,当前运输计划下的总运输成本:

总的运输成本 = 75(464 美元) + 5(352 美元) + 65(416 美元) + 55(690 美元)
　　+ 15(388 美元) + 85(685 美元)
　= 165595(美元)

金现在所要做的是要检查当前的运输计划,看看是否能够制定出一个新的运输计划,使总运输成本下降到一个绝对最小值。

## 管理科学方法

金立即就意识到这个问题是一个典型的运输问题,可直接使用这种方法对这个问题进行规划。并且使用电脑软件可以很快得到一个最优解决方案。这就使得金在第二天就能够将新的运输计划提交给管理层。这个新的运输计划可以使总运输成本降低超过 13000 美元。

在介绍完运输问题更多的背景知识后,下一节我们将完整地讲述这个故事。

## 问题回顾

1. 在这个案例中,P&T 公司的首席执行官特别关心的问题是什么?
2. 公司要求金作些什么?

# 6.2 运输问题的特征

## 运输问题的模型

为了描述运输问题的模型,我们应该使用比 P&T 公司问题更具有一般性的条件。总体来讲,运输问题关心的是(确实的或是比喻的)以最低的总配送成本把供应中心[称为出发地(sources)]的任何产品运送到每一个接收中心[称为目的地(destinations)]。运输问题的具体应用——P&T 公司问题与运输问题的一般模型之间在术语上的对应关系如表 6.4 所示。

**表 6.4 运输问题的术语**

| P&T 公司问题 | 一般模型 |
|---|---|
| 豌豆罐头的车数 | 商品数量 |
| 食品罐头厂 | 出发地 |
| 仓库 | 目的地 |
| 罐头厂的产量 | 出发地的供应量 |
| 对仓库的分配 | 目的地的需求量 |
| 从罐头厂到仓库的每车运输成本 | 从出发地到目的地的单位配送成本 |

就像在这个表中第四行和第五行所表示的,每一个出发地都有一定的供应量(supply)配送到目的地,每一个目的地都有需要从一定的需求量(demand),接收从出发地发出的产品。运输问题的这个模型在供应量和需求量两方面作出了如下的假设:

运输问题关心的是将出发地的产品运送到目的地,满足他们的需求。

**需求假设**(The Requirements Assumption):每一个出发地都有一个固定的供应量,所有的供应量都必须配送到目的地。与之相类似,每一个目的地都有一个固定的需求量,整个需求量都必须由出发地满足。

这个送出量正好等于接收量的假设意味着所有出发地的总供应量与所有目的地的总需求量之间需要有一个平衡。

**可行解特性**(The Feasible Solutions Property):当且仅当供应量的总和等于需求量的总和时,运输问题才有可行解。

幸好表 6.1 表明 P&T 公司问题中总供应量和总需求量都是 300 车,因此总供应量等于总需求量。

在某些实际的问题中,供应量实际上代表着所要配送的产品的最大数量(而不是一个固定的数值),同时,需求实际上也是代表着所接受的最大数量(也不是一个固定的数值)。这些问题并不符合运输问题模型,因为它们不满足需求假设。所以它们是运输问题的变形。

很幸运的是，如果我们使用 Excel Solver 对这些问题进行处理的话，就可以很容易而且直截了当地得到这些变形的电子表格模型。这些内容我们将在 6.3 节中举例说明。

表 6.4 的最后一行给出了配送货物的单位成本，这一成本对于任何一个运输问题都有下面的一个基本假设。

**成本假设**（The Cost Assumption）：从任何一个出发地到任何一个目的地的货物配送成本和所配送的数量成线性比例关系，因此这个成本就等于配送的单位成本乘以所配送的数量。

运输问题所需要的数据仅仅是供应量、需求量和单位成本。这些就是模型参数。所有的这些参数都可总结在一个表格中，这个表格就叫做参数表。P&T 公司问题的参数表如表 6.5 所示。这个表对问题的模型进行了总结（包括每一行和每一列标题的描述）。

供应量、需求量和单位成本提供了运输问题所需要的一切数据。

**模型**：如果一个问题可以：(1) 完全描述成如表 6.5 所示的参数表形式，明确出发地、目的地、供应量、需求量和单位成本，(2) 符合需求假设和成本假设，那么这个问题（不管其中是否涉及到运输）都适用于运输问题模型，最终目的都是要使配送的总成本最小。

因此，把一个问题规划成运输问题只需要填好一张如表 6.5 所示的参数表。我们并不需要建立一个正式的数学模型（虽然今后我们会为了举例而建立这种模型）。

**表 6.5　P&T 公司问题的参数表**

| 目的地（仓库） | 单位成本（美元） | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 萨克拉门托 | 盐湖城 | 赖皮特城 | 奥尔巴古 | 供　应 |
| 出发地（罐头厂） | | | | | |
| 贝林翰 | 464 | 513 | 654 | 867 | 75 |
| 尤基尼 | 352 | 416 | 690 | 791 | 125 |
| 艾尔贝·李 | 995 | 682 | 388 | 685 | 100 |
| 需　求 | 80 | 65 | 70 | 85 | |

在 4.4 节中提到的大 M 公司的运输网络问题也是运输问题的一个例子。在这个例子中，公司需要将在两个工厂中生产的车床运往三个顾客处，目标是使总运输成本最小。表 4.5 用与表 6.5 以同样的格式提供了该问题需要的数据，工厂即是出发地，它们的产量是供应量，顾客是目的地，它们的订货量是需求量。

## 使用 Excel 来描述和解决运输问题

这个运输问题的电子表格模型用两张分开的表格显示单位成本数据和可变单元格（运输量），在两张表中使用相同的行号和列号。在可变单元格旁边表明了约束条件。

4.4 节描述了如何为大 M 公司的问题建立电子表格模型。我们现在会为 P&T 公司建立相同的模型。

所要作的决策是将多少豌豆罐头从罐头厂运往各个仓库。约束条件是每个罐头厂的总配送量要等于其产量（供给量），每个仓库的配送量要等于其分配量（需求量）。绩效评估是总运输成本，所以目标是使运输成本最小。

根据这些信息建立了如图 6.2 所示的电子表格模型。表 6.5 提供的所有数据都在如下单元格内显示：单位成本（D5:G7）、供应量（J12:J14）、需求量（D17:G17）。运输量的决策由可变单元格运输量

(D12:G14)给出。输出单元格是总运出量(H12:H14)和总运入量(D15:G15),输入这些单元格的 SUM 函数在图 6.2 底部显示。约束条件总运出量(H12:H14) = 供应量(J12:J14)、总运入量(D15:G15) = 需求量(D17:G17)已经在表格中表明并被输入了 Solver 对话框。目标单元格是总成本(J17),在图 6.2 的右下角显示了它的 SUMPRODUCT 函数。Solver 对话框表明目标是使目标单元格最小化。其中一个 Solver 选项(假设非负)说明所有运输量必须是非负的。另外一个 Solver 选项(采用线性模型)说明这个运输问题同样也是一个线性规划问题(这一点我们将在本节稍后部分进行讨论)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | P & T Co. Distribution Problem | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | Unit Cost | | | Destination (Warehouse) | | | | | |
| 4 | | | | Sacramento | Salt Lake City | Rapid City | Albuquerque | | | |
| 5 | | Source | Bellingham | $464 | $513 | $654 | $867 | | | |
| 6 | | (Cannery) | Eugene | $352 | $416 | $690 | $791 | | | |
| 7 | | | Albert Lea | $995 | $682 | $388 | $685 | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | Shipment Quantity | | | Destination (Warehouse) | | | | | |
| 11 | | (Truckloads) | | Sacramento | Salt Lake City | Rapid City | Albuquerque | Total Shipped | | Supply |
| 12 | | Source | Bellingham | 0 | 20 | 0 | 55 | 75 | = | 75 |
| 13 | | (Cannery) | Eugene | 80 | 45 | 0 | 0 | 125 | = | 125 |
| 14 | | | Albert Lea | 0 | 0 | 70 | 30 | 100 | = | 100 |
| 15 | | | Total Received | 80 | 65 | 70 | 85 | | | |
| 16 | | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 17 | | | Demand | 80 | 65 | 70 | 85 | | | $152,535 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalCost

Equal To: ○ Max ● Min ○

By Changing Cells:

ShipmentQuantity

Subject to the Constraints:

TotalReceived = Demand
TotalShipped = Supply

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cell |
|---|---|
| Demand | D17:G17 |
| ShipmentQuantity | D12:G14 |
| Supply | J12:J14 |
| TotalCost | J17 |
| TotalReceived | D15:G15 |
| TotalShipped | H12:H14 |
| UnitCost | D5:G7 |

| | H |
|---|---|
| 11 | Total Shipped |
| 12 | =SUM(D12:G12) |
| 13 | =SUM(D13:G13) |
| 14 | =SUM(D14:G14) |

| | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | Total Received | =SUM(D12:D14) | =SUM(E12:E14) | =SUM(F12:F14) | =SUM(G12:G14) |

| | J |
|---|---|
| 16 | Total Cost |
| 17 | =SUMPRODUCT(UnitCost,ShipmentQuantity) |

图 6.2 作为一个运输问题的 P&T 公司电子表格描述,包括目标单元格总成本(J17)和其他输出单元格总运出量(H12:H14)和总运入量(D15:G15)以及建立 Solver 所需要的说明。可变单元格运输量(D12:G14)显示了 Solver 求解得到的最优运输计划。

开始求解时,对于每一个可变单元格来说,可以输入任意数值(例如 0)。在按下 Solver 按键之后,Solver 就会使用单纯形法来解决运输问题,并确定出每一个决策变量的具体数值。最优解如图 6.2 中单元格运输量(D12:G14)所示,所得到的目标单元格总成本(J17)为 152535 美元。

## 运输问题的网络表述

一种用图形方式直观表示一个运输问题的非常好的方法就是使用网络表述。这种表述忽略了出发地和目的地在地理上的布局，它只是在左端把出发地列成为一列（使用符号"$S$"来表示出发地），在右端把目的地列成了一列（使用符号"$D$"来表示目的地）。图 6.3 显示了 P&T 公司运输问题的网络表述。有关于出发地（罐头厂）和目的地（仓库）的各种数据在图 6.1 中已经给出。箭头表示了运输豌豆罐头的可能途径。箭头上面的数字表示了在这个途径之中每一车的运输成本（单位：美元）。由于这些数据还包括了供应量和需求量，所以表 6.5 参数表中的所有数据都有了。因此，这种网络表述为总结运输问题模型提供了另外一个可行的途径。

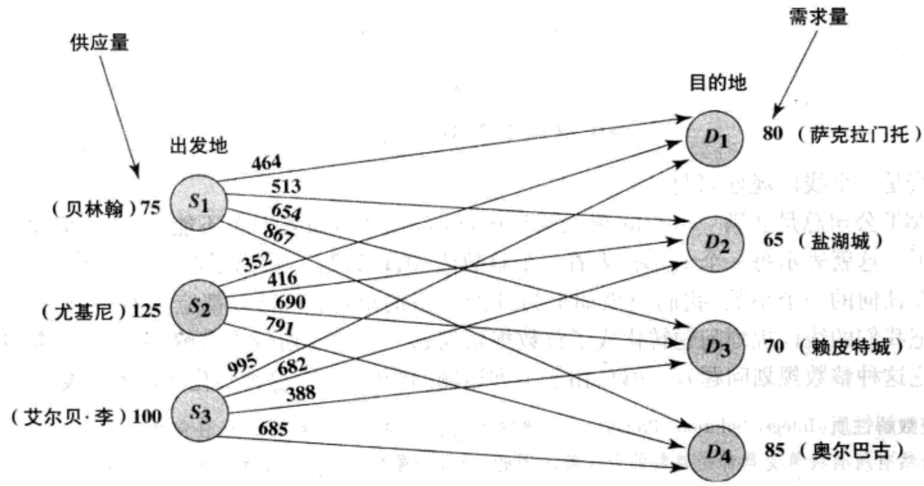



图 6.3　P&T 公司运输问题的网络表述用图形方式显示了表 6.5 中的所有数据。

> 运输问题是网络配送问题的一种特殊形式，后者是线性规划问题的一种主要类型。

因为 4.4 节描述的大 M 公司问题也是一个运输问题，它也有像图 6.3 那样的网络表述，如图 4.4 所示。

对于比 P&T 公司运输问题规模更大的问题来说，要想画出完整的网络图并标示出所有数据不是很方便。因此，网络表述主要是一种形象化的工具。

我们还记得，在 4.4 节中我们曾经描述了通过配送网络进行的配送，它是线性规划问题中的一种主要类型。图 4.4 和图 6.3 的网络只是配送网络之中比较简单的一种。在此图中每一条配送途径都仅仅是从出发地直接连接到目的地。因此，运输问题是一种特殊的网络配送问题

在第 7 章里，你将会看到关于其他网络配送问题的更多网络表述。

## 运输问题是一种线性规划问题

为了证明事实上 P&T 公司问题（或者是其他的运输问题）是一个线性规划问题，我们就需要用代数的形式来建立它的数学模型。

使用图 6.1 中的罐头加工厂和仓库的数据，令 $x_{ij}$ 为从第 $i$ 个 罐头加工厂运送到第 $j$ 个

仓库的车数。其中 $i=1,2,3,j=1,2,3,4$。我们的目标是选择这 12 个决策变量的值,使得:

$$\text{最小化}\quad \text{成本}=464x_{11}+513x_{12}+654x_{13}+867x_{14}+352x_{21}+416x_{22}+690x_{23}+791x_{24}+995x_{31}+682x_{32}+388x_{33}+685x_{34}$$

约束条件

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &= 75\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &= 125\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &= 100\\
&x_{11}+x_{21}+x_{31} &= 80\\
&x_{12}+x_{22}+x_{32} &= 65\\
&x_{13}+x_{23}+x_{33} &= 70\\
&x_{14}+x_{24}+x_{34} &= 85
\end{aligned}$$

并且

$$x_{ij}\geqslant 0\quad (i=1,2,3;j=1,2,3,4)$$

这确实是一个线性规划问题。

P&T 公司总是装满一卡车的豌豆罐头进行运输,因为如果卡车不能装满的话,就很不经济了。这就表示每一个 $x_{ij}$都代表着一个整数值(0,1,2,3,…),为了避免在得到的最优解中存在任何的一个小数,我们应该加上另外的一组约束:每一个 $x_{ij}$都应该有一个整数值。这就把我们的线性规划问题转化成了整数规划问题。这种规划较难求解(我们将在第 9 章中讨论这种整数规划问题)。幸好,由于下列运输问题的性质,这种转化变得不必要了。

**整数解性质**(Integer Solutions Property):只要它的供应量和需求量都是整数,任何有可行解的运输问题必然有所有决策变量都是整数的最优解。因此,没有必要加上所有变量都是整数的约束条件。

> 这种性质保证最优解为整数,就没有必要增加约束条件(因为取整的错误,Excel 有时会出现非常接近整数解的非整数解,你可以自己很容易地变为整数解)。

当处理运输问题时,处理者一般都不会自找麻烦以代数形式列出完整的线性规划模型。因为所有的基本数据都可以在如表 6.5 的表格或相应的电子表格模型中简单明了地表示出来。

在处理这个线性规划模型之前,我们着重研究一下等号左边的那些函数约束条件。我们注意到,每一个系数不是 0(这个变量不存在)就是 1。而且,我们还注意到了系数 1 特殊的出现位置。这些特殊的位置表明每一个系数为 1 的变量正好在两个约束条件中出现。这些独特的特征非常重要,能够为高效地解决运输问题起到关键作用。

## 求解运输问题

由于运输问题是一类特殊的线性规划问题,所以可以使用单纯形法(Excel Solver 用来解决线性规划问题的一种方法)来解决。然而,由于前面所讲到的函数约束条件之中系数的独特特征,我们可以对单纯形法进行简化,更加简便地求解运输问题。单纯形法的这种简化形式就叫作运输单纯形法(transportation simplex method)。有时候用这种简化的方法来处理一些大型的问题要比使用常规的单纯形法速度快上不止 100 倍。但是这种方法只能用在运输问题中。

不论是运输单纯形法还是网络单纯形法都可以用来解决那些用 Solver 单纯形法不能解决的大型运输问题。

就像我们在前面讲到的运输问题一样，其他的网络配送问题在它们的函数约束中系数也存在类似的特征。因此，单纯形法同样可以像运输单纯形法一样经过简化快速求解任何一个网络配送问题（也包含运输问题）。这种简化后的单纯形法叫作网络单纯形法（network simplex method）。

线性规划软件之中通常包含有网络单纯形法，也可能包含运输单纯形法。当软件包中只有网络单纯形法的时候，它提供了另一种解决运输问题的很好途径。事实上近些年来网络单纯形法与运输单纯形法相比，越来越具有竞争力。

在得到最优解之后，就要像在第 5 章中所讲到的其他线性规划问题一样对运输问题进行假设分析。不管是运输单纯形法还是网络单纯形法，对于目标函数中的每一个系数都可以得到一个最优解的范围。现在对右边的（供应量和需求量）变化进行处理就变得更为复杂了，因为供应量的和与需求量的和必须相等。因此，供应量的变化必然同时伴随着需求量的变化，反之亦然。

因为 Excel Solver 不是用来解决实践中经常会遇到的大型的线性规划问题，它是简单地使用单纯形法解决运输问题以及本书中所包含的其他网络配送问题（以及相当大的问题同样能够），因此我们将继续使用 Solver 而不去使用运输单纯形法和网络单纯形法。

## 完成 P&T 公司的案例研究

现在，我们可以得到故事的结局——P&T 公司管理科学小组将如何改进表 6.2 中所示的当前运输计划。这个计划的总运输成本是 165595 美元。

虽然现在的运输计划看起来是最佳的，但通过电子表格求解使总成本下降了 8%。

你已经看到了金 · 贝克如何写好表 6.5 的参数表把这个问题转化成运输问题。相应的电子表格描述如图 6.2 所示。应用 Solver 可以得到在单元格运输量（D12:G14）中的最优解。

注意，这个最优解并不符合直觉。虽然送到奥尔巴古的单位成本比送到其他仓库多得多（每车 867 美元），在贝林翰供应的 75 车罐头中，还是有 55 车送到了奥尔巴古。然而，牺牲罐头加工厂 1 使得罐头厂 2 和 3 能够以低成本运输。虽然使用手工的方法找到最优解是很困难的，但是使用 Excel Solver 中的单纯形法能够很快地找出最优解。

如同目标单元格总成本（J17）中所给出的，这个最优计划的总运输成本是：

$$
\begin{aligned}
\text{总运输成本} &= 20(513\text{ 美元}) + 55(867\text{ 美元}) + 80(352\text{ 美元}) + 45(416\text{ 美元}) \\
&\quad + 70(388\text{ 美元}) + 30(685\text{ 美元}) \\
&= 152535\text{ 美元}
\end{aligned}
$$

与当前计划相比，减少了 13060 美元。理查德 · 鲍沃斯很高兴地把这个成本的降低告诉公司首席执行官道格拉斯 · 文斯敦。道格拉斯祝贺他以及金 · 贝克取得了如此显著的节约。

## 运输问题的一个获奖应用

除了规模比较小以外，P&T 公司问题是许多公司都会遇到的把货物从制造工厂运送给顾客的问题之中典型的一个。

例如，我们可以看看获奖的宝洁公司管理科学研究（Interfaces 1997 年 1 ~2 月号）。在

进行研究之前，宝洁公司的供应链中包含有成百上千个供应商、50 多个产品类别、超过 60 个工厂、15 个配送中心以及超过 1000 个的顾客群体。然而，由于公司进入了国际市场，管理人员意识到很有必要合并其中的一些工厂是，以达到减少制造成本、提高进入市场速度以及减少资金投入的目的。因此，研究就着重于重新设计公司在北美地区的制造和配送体系。最终得到的结果是北美工厂数减少了 20%，并且公司每年节省了 2 亿美元的税前费用。

这个研究的一个重要部分就是为每个单独的产品种类设计并求解运输问题。对于针对还在运行的工厂的每一个选择，为每一个产品种类解决相应的运输问题体现了从这些工厂运送产品到配送中心或顾客区所需要的配送成本是多少。在找出最好的新生产和配送系统的过程之中解决了许多这样的运输问题（有关此管理科学应用的文章可以在 www. mhhe. com/hillier2e/articles 下载）。

**问题回顾**

1. 用一句话来描述什么叫运输问题？
2. 运输问题模型所需要的数据有哪些？
3. 把一个问题设计成运输问题需要做哪些工作？
4. 要使一个运输问题拥有可行解，需要哪些条件？
5. 在什么情况下，运输问题会自动地得到一个所有决策变量都是整数的最优解？
6. 说出在解决运输问题过程中，比一般的单纯形法要快得多的两种计算方法的名字。

## 6.3 各种运输问题变体的建模

P&T 公司问题是一个十分典型的运输问题，符合运输问题的每一个条件。但是在现实生活中这种情况很少出现。一个近似但其中的一个或者几个特征却并不符合运输问题条件的运输问题在线性规划问题中经常出现。下面是我们将在本节中要讨论的一些特征。

1. 供应总量超出了需求总量。于是每一个供给量代表了从这个出发地中配送出去的最大数量（而不是一个固定的数值）。
2. 供应总量小于需求总量。于是每一个需求量代表了在这个目的地中所接收到的最大数量（而不是一个固定的数值）。
3. 一个目的地同时存在着最小需求和最大需求，于是所有在这两个数值之间的数量都是可以接收的。
4. 在配送中不能使用特定的出发地—目的地组合。
5. 目标是使与配送数量有关的总利润最大而不是使成本最小。

对于任何一个这样的特征来说，有可能以更加聪明的方式重新描述这个问题，使得它符合运输问题的形式。当在处理一个真正大型的问题（一个包含成百上千个出发地和目的地的问题）中采用这种方法时，由于不管是用运输单纯形法还是网络单纯形法解决这种问题的速度都要比用单纯形法快上许多（有时候要快上超过 100 倍），这会变得非常有用。

然而，当一个问题并不是很大的时候，用单纯形法仍然能够在可以接受的时间里求解一般的线性规划问题。因此，包含了单纯形法而没有运输单纯形法或者网络单纯形法的基本软件包（例如 Excel Solver）可以应用于这类问题之中，不需要把它们的形式转化成为运输问

题形式。这也就是我们要用的方法。特别地，本节展示了为具有以上特征的运输问题变形建立电子表格模型。

我们的第一个例子考虑特征 1 和特征 4。第二个例子考虑其他的特征。

## 例 1：指定工厂生产产品

求佳产品公司决定使用三个有生产余力的工厂进行四种新产品的生产制造。每单位产品需要等量的工作，所以工厂的有效生产能力以每天生产的任意种产品的数量来衡量。这些数据在表 6.6 最右边一列给出。最后一行给出了要求的产品生产率（每天生产的产品数量），以满足计划的销售量。每一家工厂都可以制造这些产品，除了工厂 2 不能生产产品 3 以外。然而，每种产品在不同工厂中的单位成本是有差异的。如表 6.6 所示。

**表 6.6　求佳 产品公司问题中的数据**

| | 单位成本（美元） | | | | | 生产能力 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 产品： | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 工厂 | | | | | | |
| 1 | | 41 | 27 | 28 | 24 | 75 |
| 2 | | 40 | 29 | — | 23 | 75 |
| 3 | | 37 | 30 | 27 | 21 | 45 |
| 要求的产量 | | 20 | 30 | 30 | 40 | |

现在管理者需要决定的是在哪个工厂里生产哪种产品。产品生产分解，也就是在不只一个工厂里生产同样的一种产品，是允许的（在后面的 6.7 节中，我们仍然会讨论这个例子来研究不允许产品生产分解的情况。当然，这种情况需要使用一种不同的描述）。

**电子表格模型的描述**

这个问题也差不多是一个运输问题。事实上，如果替换了在表 6.6 中的行和列的术语（供应、需求等等），那么这个表基本上符合运输问题的形式，如表 6.7 所示。但是这个问题有两个方面不同于运输问题。

**表 6.7　运输问题的变形：求佳产品 公司问题的数据**

| 目的地（产品） | 单位成本（美元） | | | | 供应量 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 出发地（工厂） | | | | | |
| 1 | 41 | 27 | 28 | 24 | 75 |
| 2 | 40 | 29 | — | 23 | 75 |
| 3 | 37 | 30 | 27 | 21 | 45 |
| 需求量 | 20 | 30 | 30 | 40 | |

其中一个（较小的）不同是，运输问题需要每一个出发地—目的地组合的单位成本，而在此问题之中工厂 2 不能生产产品 3，所以也就没有什么单位成本。另外一个不同是，如表 6.7 所示，总供应量（75 + 75 + 45 = 195）超出了总需求量（20 + 30 + 30 + 40 = 120），因此，由可行解性质可知，表 6.7 所表示的这个问题不会有可行解。需求假设（6.2 节）表明了每一个出发地的供应都应该使用。

实际上，为了满足产品销售需求，表 6.7 中这些代表生产能力的供应量不会全部都使

用。因此,这些供应量在数量上是使用量的上限。

图 6.4 所示的这个问题的电子表格模型和图 6.2 所示的 P&T 公司运输问题模型有两个非常关键的不同。第一,因为工厂 2 不能够生产产品 3,所以在单元格 E5 中输入了一条短横线,在 Solver 对话框中包含了约束 E12 = 0;第二,因为供应量是上限,所以在单元格 H11:H13 中我们就要用"≤"而不是使用"=",相应地在 Solver 对话框中的约束是:工厂生产量(G11:G13)≤生产能力(I11:I13)。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Better Products Co. Production Planning Problem | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | Unit Cost | Product 1 | Product 2 | Product 3 | Product 4 | | | |
| 4 | | Plant 1 | $41 | $27 | $28 | $24 | | | |
| 5 | | Plant 2 | $40 | $29 | – | $23 | | | |
| 6 | | Plant 3 | $37 | $30 | $27 | $21 | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | Produced | | |
| 10 | | Daily Production | Product 1 | Product 2 | Product 3 | Product 4 | at Plant | | Capacity |
| 11 | | Plant 1 | 0 | 30 | 30 | 0 | 60 | ≤ | 75 |
| 12 | | Plant 2 | 0 | 0 | 0 | 15 | 15 | ≤ | 75 |
| 13 | | Plant 3 | 20 | 0 | 0 | 25 | 45 | ≤ | 45 |
| 14 | | Products Produced | 20 | 30 | 30 | 40 | | | |
| 15 | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 16 | | Required Production | 20 | 30 | 30 | 40 | | | $3,260 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalCost

Equal To: ○ Max ◉ Min ○ Value

By Changing Cells:

DailyProduction

Subject to the Constraints:

$E$12 = 0
ProducedAtPlant <= Capacity
ProductsProduced = RequiredProduct...

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cell |
|---|---|
| Capacity | I11:I13 |
| DailyProduction | C11:F13 |
| ProducedAtPlant | G11:G13 |
| ProductsProduced | C14:F14 |
| RequiredProduction | C16:F16 |
| TotalCost | I16 |
| UnitCost | C4:F6 |

| | G |
|---|---|
| 9 | Produced |
| 10 | at Plant |
| 11 | =SUM(C11:F11) |
| 12 | =SUM(C12:F12) |
| 13 | =SUM(C13:F13) |

| | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | Products Produced | =SUM(C11:C13) | =SUM(D11:D13) | =SUM(E11:E13) | =SUM(F11:F13) |

| | I |
|---|---|
| 15 | Total Cost |
| 16 | =SUMPRODUCT(UnitCost, DailyProduction) |

**图 6.4** 将求佳产品公司问题作为运输问题变形的电子表格描述,包括目标单元格总成本(I16)和其他输出单元格工厂生产(G11:G13)、产量(C14:F14)和其他建立模型需要的说明。可变单元格日产量(C11:F13)显示了通过 Solver 得到的最优生产方案。

使用 Excel Solver,我们最终在可变单元格日产量(C11:F13)中得到了每一个工厂每种产品生产率的最优解。这种解答使得从 195 单位的总供应量中配送 120 单位来满足四个目的地 120 个单位需求的成本最小。目标单元格总成本(I16)给出的总成本为每天 3260 美元。

## 例 2:选择顾客

耐芙迪公司在 3 个工厂中专门生产一种产品。这种产品有着优良的品质,所以现在公司接到了许多的订单,产品供不应求。公司也正在努力扩大生产,甚至计划要建立一个新的工厂,但是这个新的工厂要到明年才能投入运营。

在未来的 4 个月中,有四个处于国内不同区域的潜在顾客(批发商)很有可能大量订购。顾客 1 是公司最好的顾客,所以它的全部订购量都应该满足;顾客 2 和顾客 3 也是公司很重要的顾客,所以营销经理认为作为最低限度至少要满足他们订单的 1/3;对于顾客 4,销售经理认为并不需要进行特殊考虑,所以不想向这位顾客供应货物。这样就有足够的货物满足最少数量。

需要作出卖给每个顾客多少和使用怎样的运输计划的决策。

主要是由于运输成本上的差异,销售一个产品得到的净利润也不同,很大程度上取决于哪个工厂供应哪个顾客。因此,向每一个顾客供应多少的货物(比营销经理所确定的最少量要多)的最终决策应该基于利润最大化。

每一种工厂—顾客组合的单位利润如表 6.8 所示。最右边的一列中给出了下个月中每个工厂生产的单位数(总量为 20000);最后一行显示了顾客订购量(总量为 30000);倒数第二行给出了基于上面营销经理的决策的最少供应量(总量为 12000)。

**表 6.8　耐芙迪公司问题中的数据**

| 顾　　客 | 单位利润(美元) | | | | 产　　量 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 工厂 | | | | | |
| 1 | 55 | 42 | 46 | 53 | 8000 |
| 2 | 37 | 18 | 32 | 48 | 5000 |
| 3 | 29 | 59 | 51 | 35 | 7000 |
| 最小采购量 | 7000 | 3000 | 2000 | 0 | |
| 要求采购量 | 7000 | 9000 | 6000 | 8000 | |

营销经理现在需要确定的是需要向每一位顾客供应的产品的数量(考虑这些最小量)以及每一个工厂向每一位顾客供应多少单位的货物才能使利润最大化。

### 电子表格模型描述

我们现在有顾客必须接受的数量范围。

这个问题也差不多就是一个运输问题。因为这些工厂可以看成是出发地,而那些顾客可以看成是目的地,这里工厂的生产数量是出发地的供应数量。

如果这个问题完全是个运输问题,那么顾客想要购买的产品数量就是每一个目的地的需求。然而,事实却并非如此,因为需求假设(6.2 节)规定了需求量必须是接受从出发地发出的一个固定的数量。除了顾客 1 之外,其他的顾客所能够购买的产品数量是处于表 6.8 最后两行最大采购量和最小采购量之间的一个数量。事实上,我们的目的之一就是要在这些购买数量中确定一个最希望出现的值。

图 6.5 显示了这个运输问题变形的电子表格模型。与参数表和求解表最后一行表示需

求的行不同,在此图中我们使用了两行表示最大采购量和最小采购量。Solver 对话框中相应的约束为总运量(C17:F17)≤最大采购量(C19:F19)和总运量(C17:F17)≥最小采购量(C15:F15),以及一些通常的供应约束。我们的目的是得到最大的总利润而不是得到最小的成本,这一点在 Solver 对话框中表示出来就是要使目标单元格总利润(I17)得到最大值。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Nifty Co. Product-Distribution Problem | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | Unit Profit | Customer 1 | Customer 2 | Customer 3 | Customer 4 | | | |
| 4 | | Plant 1 | $55 | $42 | $46 | $53 | | | |
| 5 | | Plant 2 | $37 | $18 | $32 | $48 | | | |
| 6 | | Plant 3 | $29 | $59 | $51 | $35 | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | Total | | Production |
| 10 | | Shipment | Customer 1 | Customer 2 | Customer 3 | Customer 4 | Production | | Quantity |
| 11 | | Plant 1 | 7,000 | 0 | 1,000 | 0 | 8,000 | = | 8,000 |
| 12 | | Plant 2 | 0 | 0 | 0 | 5,000 | 5,000 | = | 5,000 |
| 13 | | Plant 3 | 0 | 6,000 | 1,000 | 0 | 7,000 | = | 7,000 |
| 14 | | | | | | | | | |
| 15 | | Min Purchase | 7,000 | 3,000 | 2,000 | 0 | | | |
| 16 | | | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | | | Total Profit |
| 17 | | Total Shipped | 7,000 | 6,000 | 2,000 | 5,000 | | | $1,076,000 |
| 18 | | | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | | | |
| 19 | | Max Purchase | 7,000 | 9,000 | 6,000 | 8,000 | | | |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalProfit

Equal To: ● Max ○ Min ○ Val

By Changing Cells:

Shipment

Subject to the Constraints:

TotalProduction = ProductionQuantity
TotalShipped <= MaxPurchase
TotalShipped >= MinPurchase

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cell |
|---|---|
| MaxPurchase | C19:F19 |
| MinPurchase | C15:F15 |
| ProductionQuantity | I11:I13 |
| Shipment | C11:F13 |
| TotalProduction | G11:G13 |
| TotalProfit | I17 |
| TotalShipped | C17:F17 |
| UnitProfit | C4:F6 |

| | G |
|---|---|
| 9 | Total |
| 10 | Production |
| 11 | =SUM(C11:F11) |
| 12 | =SUM(C12:F12) |
| 13 | =SUM(C13:F13) |

| | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | Total Shipped | =SUM(C11:C13) | =SUM(D11:D13) | =SUM(E11:E13) | =SUM(F11:F13) |

| | I |
|---|---|
| 16 | Total Profit |
| 17 | =SUMPRODUCT(UnitProfit,Shipment) |

**图6.5** 图6.5将耐芙迪公司问题作为一个运输问题变形的电子表格描述,包括目标单元格总利润(I17)和其他输出单元格总产量(G11:G13)、总运出量(C17:F17)以及其他建立模型要说明的内容。可变单元格运输量(C11:F13)显示的是通过 Solver 得到的最优生产配送计划。

点击了 Solver 按键之后,得到如图 6.5 所示的最优解。单元格总运量(C17:F17)说明了要向每一位顾客供应的产品的数量。在可变单元格运量(C11:F13)中列出了每一个工厂向每一位顾客所提供的货物的数量;在目标单元格总利润(I17)之中得到了总利润为 1076000 美元。

## 问题回顾

1. 如果一个问题是运输问题的变形，并且满足条件：每一个出发地的供应量是一个最大值而不是从这个出发地配送的固定数量，在这种情况下我们应该怎样建立电子表格模型？
2. 如果一个问题是运输问题的变形，并且满足条件：每一个目的地的需求可以是处于最大值和最小值之间任意值而不是一个固定的数量，在这种情况下我们应该怎样建立电子表格模型？

## 6.4　运输问题变形的一些其他应用

到目前为止，我们已经就运输问题及其变形举了三个方面的例子：

1. 运送货物（P&T 公司问题）。
2. 指定工厂生产产品（求佳产品公司问题）。
3. 选择顾客（耐芙迪公司问题）。

在这一节中我们将举例说明运输问题及其变形在其他一些领域的应用（但远远不是全部）。

### 分配自然资源

米德罗水管站（Metro Water District）是一个主管着广阔地域的水资源分配的机构。由于这个地域十分干燥，所以这个机构需要从外地引水。这些引入的水来自于科伦坡、塞克隆以及卡路里河这三条河流。引入这些水之后，这个机构把水转卖给这个地区的用户。它的主要客户是布都、劳斯戴维斯、圣哥以及豪利格拉斯等城市的供水部门。

> 需要作出的决策是从每条河引入多少水，如何分配给每个城市。

除了从卡路里河引入的水不能供给豪利格拉斯之外，从这三条河流之中引入的水都可以供给这四个城市。然而由于这个地区输水管和城市地理分布上的差异，这个机构的供水成本主要取决于水的来源以及供给的城市。对于每一个从水源到城市的可能组合，每立方英尺（acre foot）的成本在表 6.9 中给出。

如果以 100 万立方英尺为单位的话，这个表的最后一行列出了在未来一年中每一个城市的用水需求量（总量为 12.5）。最后一行中列出了每一年从每一条河流中可能引入的水量（总量为 16）。

**表 6.9　米德罗水管站的水资源数据**

| | 每立方英尺的成本（美元） | | | | 可供应量 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 布都 | 劳斯戴维斯 | 圣哥 | 豪利格拉斯 | |
| 科伦坡河 | 160 | 130 | 220 | 170 | 5 |
| 塞克隆河 | 140 | 130 | 190 | 150 | 6 |
| 卡路里河 | 190 | 200 | 230 | — | 5 |
| 需求 | 2 | 5 | 4 | 1.5 | （百万立方英尺） |

由于总供应量大于总需求量，所以管理者需要确定从每一条河流中应该引入多少水，以及从每条河流中引入多少水到每一个城市。这个问题的目标就是要在满足每一个城市用水需求的前提下使得供水的成本最小。

**建模并求解**

> 没有必要使用每条河流的所有可供应量。

图 6.6 显示了这个运输问题变形的电子表格模型。因为卡路里河不能够供给城市豪利格拉斯，所以在 Solver 对话框中包含了约束 F13 = 0。在 I 列所列出的供应量是最大供应量而不是固定的供应量。所以，在相应的约束河流供应量（G11 : G13）≤ 可获得量（I11 : I13）之中，使用的是"≤"而不是"="。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Metro Water District Distribution Problem** | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | **Unit Cost ($millions)** | Berdoo | Los Devils | San Go | Hollyglass | | | |
| 4 | | Colombo River | 160 | 130 | 220 | 170 | | | |
| 5 | | Sacron River | 140 | 130 | 190 | 150 | | | |
| 6 | | Calorie River | 190 | 200 | 230 | — | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | **Water Distribution** | | | | | Total | | |
| 10 | | **(million acre-feet)** | Berdoo | Los Devils | San Go | Hollyglass | from River | | Available |
| 11 | | Colombo River | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | ≤ | 5 |
| 12 | | Sacron River | 2 | 0 | 2.5 | 1.5 | 6 | ≤ | 6 |
| 13 | | Calorie River | 0 | 0 | 1.5 | 0 | 1.5 | ≤ | 5 |
| 14 | | Total to City | 2 | 5 | 4 | 1.5 | | | |
| 15 | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 16 | | Needed | 2 | 5 | 4 | 1.5 | | | ($millions) |
| 17 | | | | | | | | | 1,975 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalCost

Equal To: ○ Max ◉ Min ○

**By Changing Cells:**

WaterDistribution

**Subject to the Constraints:**

$F$13 = 0
TotalFromRiver <= Available
TotalToCity = Needed

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cell |
|---|---|
| Available | I11:I13 |
| Needed | C16:F16 |
| TotalCost | I17 |
| TotalFromRiver | G11:G13 |
| TotalToCity | C14:F14 |
| UnitCost | C4:F6 |
| WaterDistribution | C11:F13 |

| | G |
|---|---|
| 9 | Total |
| 10 | from River |
| 11 | =SUM(C11:F11) |
| 12 | =SUM(C12:F12) |
| 13 | =SUM(C13:F13) |

| | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | Total to City | =SUM(C11:C13) | =SUM(D11:D13) | =SUM(E11:E13) | =SUM(F11:F13) |

| | I |
|---|---|
| 15 | Total Cost |
| 16 | ($millions) |
| 17 | =SUMPRODUCT(UnitCost,WaterDistribution) |

**图 6.6** 将米德罗水管站问题作为一个运输问题变形的电子表格模型描述，包括目标单元格总成本（I17）和其他输出单元格河流总供应量（G11 : G13）、流入城市量（C14 : F14）和其他建立模型需要的说明。可变单元格运输量（C11 : F13）给出了通过 Solver 得到的最优水资源分配方案。

接着，Excel Solver 在求解表中给出了最优解。单元格河流总供给量（G11 : G13）表示科伦坡和塞克隆这两条河流应该全力供给，而具有供应 500 万立方英尺能力的卡路里河只能

供应 150 万立方英尺。可变单元格水运输量(C11:F13)提供了每一条河流向每一个城市所供给的数量。目标单元格总成本(I17)给出了总的供水成本为 19.75 亿美元。

## 生产进度安排

北方飞机制造公司为全世界的航空公司生产各种商务飞机。制造过程最后的一步是生产喷气发动机并把它们安装到已经完成的飞机框架之中去(非常快的一个操作)。按照公司的一些订单合同,不久公司要交付使用相当多数量的飞机。所以有必要现在为未来 4 个月这些飞机喷气发动机的生产制定计划。

为了保证按时交付,公司必须要按照表 6.10 第二列的数量来供应需要安装的发动机。因此,在 1 ~4 月的月末需要完成的发动机数量分别是 10、25、50、70 台。

由于在此期间,根据其他产品制造、保养以及维修工作安排的不同,这种发动机的生产能力也有不同。在正常时间(没有加班)内每月的最大生产能力如表 6.10 第三列所示。能够在加班时间内生产的数量第四列中给出。在正常时间以及加班时间内每生产一台发动机的成本分别在第五列和第六列中给出。

**表 6.10　北方飞机制造公司问题的生产进度安排数据**

| 月　份 | 计划安装量 | 最大产量 | | 单位生产成本(百万美元) | | 单位存储成本(美元) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 正常时间 | 加班时间 | 正常时间 | 加班时间 | |
| 1 | 10 | 20 | 10 | 1.08 | 1.10 | 15000 |
| 2 | 15 | 30 | 15 | 1.11 | 1.12 | 15000 |
| 3 | 25 | 25 | 10 | 1.10 | 1.11 | 15000 |
| 4 | 20 | 5 | 10 | 1.13 | 1.15 | |

> 目标是制定使总成本最小的生产进度。

由于生产成本的不同,我们可以在成本比较低的那个月在进行安装之前多生产一些发动机。但是这种方法也有缺点,这些发动机在进行安装之前应该被存放起来(由于飞机框架不能提前准备好),而每周每台发动机的储存成本为 15000 美元(包括所花费资金的利息)①。如表 6.10 中最右边一列所示。

生产管理人员需要制定出一个每月生产多少发动机的计划,使制造和存储的总成本达到最小。

**建模和求解**

> 像前面的例子一样在供给约束条件中用≤符号代替=符号,使该问题成为运输问题的变形问题。

图 6.7 显示了这个运输问题变形的模型。喷气发动机的出发地是这四个月中每个月正常时间以及加班时间生产的喷气发动机。它们的供应如表 6.10 中第三列与第四列所示。这些发动机的目的地是这 4 个月中每月进行的安装。所以,它们的需求如表 6.10 第二列所示。

在发动机生产出来之前进行安装是绝对不可能的。所以在 Solver 对话框中包含了这样的约束:在这种情况下,所插入的数字应该是 0。类似地,这种情况下,在参数表中就应该插入短横线。结合表 6.10 第五列和第六列的单位成本以及最后一列的存储成本(每单位每月存储费用

① 为了便于建立模型,我们假设存对于那些存放到下个月才使用的发动机,它的存储成本发生在月末。因此,在某一个月内生产出的发动机如果在同一个月内安装时,我们假设它没有存储成本。

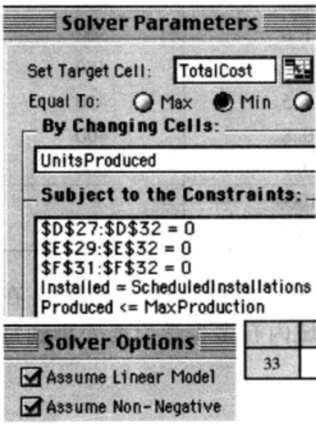
15000 美元)就可以得到在参数表中的单位成本[输入单元格单位成本(D13:G20)的公式在图 6.7 的表格后面给出]。由于求解表中的最大生产量(J25:J32)的供应量代表了可以生产的最大数量,所以在 I 列中使用了≤。Solver 对话框中相应的供应约束为产量(H25:H32)≤ 最大生产量(J25:J32),以及一些通常的需求约束。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Northern Airplane Co. Production-Scheduling Problem** | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | **Production Cost** | | Regular | | | **Storage Cost** | | | |
| 4 | | **($millions)** | | Time | Overtime | | **($millions per month)** | | | |
| 5 | | | Month 1 | 1.08 | 1.10 | | 0.015 | | | |
| 6 | | | Month 2 | 1.11 | 1.12 | | | | | |
| 7 | | | Month 3 | 1.10 | 1.11 | | | | | |
| 8 | | | Month 4 | 1.13 | 1.15 | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | **Unit Cost** | | | Month Installed | | | | | |
| 12 | | **($millions)** | | 1 | 2 | 3 | 4 | | | |
| 13 | | | 1 (RT) | 1.080 | 1.095 | 1.110 | 1.125 | | | |
| 14 | | | 1 (OT) | 1.100 | 1.115 | 1.130 | 1.145 | | | |
| 15 | | | 2 (RT) | – | 1.110 | 1.125 | 1.140 | | | |
| 16 | | Month | 2 (OT) | – | 1.120 | 1.135 | 1.150 | | | |
| 17 | | Produced | 3 (RT) | – | – | 1.100 | 1.115 | | | |
| 18 | | | 3 (OT) | – | – | 1.110 | 1.125 | | | |
| 19 | | | 4 (RT) | – | – | – | 1.130 | | | |
| 20 | | | 4 (OT) | – | – | – | 1.150 | | | |
| 21 | | | | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | | | | |
| 23 | | | | | Month Installed | | | | | Maximum |
| 24 | | **Units Produced** | | 1 | 2 | 3 | 4 | Produced | | Production |
| 25 | | | 1 (RT) | 10 | 5 | 5 | 0 | 20 | ≤ | 20 |
| 26 | | | 1 (OT) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≤ | 10 |
| 27 | | | 2 (RT) | 0 | 10 | 0 | 0 | 10 | ≤ | 30 |
| 28 | | Month | 2 (OT) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≤ | 15 |
| 29 | | Produced | 3 (RT) | 0 | 0 | 10 | 15 | 25 | ≤ | 25 |
| 30 | | | 3 (OT) | 0 | 0 | 10 | 0 | 10 | ≤ | 10 |
| 31 | | | 4 (RT) | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | ≤ | 5 |
| 32 | | | 4 (OT) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≤ | 10 |
| 33 | | | Installed | 10 | 15 | 25 | 20 | | | |
| 34 | | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 35 | | | Scheduled Installations | 10 | 15 | 25 | 20 | | | ($millions) |
| 36 | | | | | | | | | | 77.4 |

图 6.7　将北方飞机制造公司问题作为运输问题变形的电子表格模型描述,包括目标单元格总成本(J36)和其他输出单元格单位成本(D13:G20)、产量(H25:H32)、安装量(D33:G33)以及其他一些建立模型需要说明的内容。可变单元格单位产量(D25:D32)表示了通过 Solver 得到的最优生产进度计划。

在可变单元格单位产量(D25:G32)中显示了这个问题的最优解。表 6.11 总结了这个最优解的一些关键特征:加班只使用了一次(在 3 月中),虽然存储发动机成本很高,但是在 1 月和 3 月中还是多生产了一些发动机,存储起来以供今后安装使用。虽然 2 月的生产成本要比在 3 月高,但 2 月还是生产了足够的发动机,其中 5 台发动机放到了 3 月安装。如果人工安排的话,很难找到这个生产计划。然而,使用 Excel Solver 却可以很容易地平衡包含

| | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | Unit Cost | | | Month Installed | | |
| 12 | ($millions) | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 13 | | 1 (RT) | =D5 | =D5+StorageCost | =D5+2*StorageCost | =D5+3*StorageCost |
| 14 | | 1 (OT) | =E5 | =E5+StorageCost | =E5+2*StorageCost | =E5+3*StorageCost |
| 15 | | 2 (RT) | – | =D6 | =D6+StorageCost | =D6+2*StorageCost |
| 16 | Month | 2 (OT) | – | =E6 | =E6+StorageCost | =E6+2*StorageCost |
| 17 | Produced | 3 (RT) | – | – | =D7 | =D7+StorageCost |
| 18 | | 3 (OT) | – | – | =E7 | =E7+StorageCost |
| 19 | | 4 (RT) | – | – | – | =D8 |
| 20 | | 4 (OT) | – | – | – | =E8 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| Installed | D33:G33 |
| MaxProduction | J25:J32 |
| Produced | H25:H32 |
| ProductionCost | D5:E8 |
| ScheduledInstallations | D35:G35 |
| StorageCost | G5 |
| TotalCost | J36 |
| UnitCost | D13:G20 |
| UnitsProduced | D25:G32 |

| | H |
|---|---|
| 24 | Produced |
| 25 | =SUM(D25:G25) |
| 26 | =SUM(D26:G26) |
| 27 | =SUM(D27:G27) |
| 28 | =SUM(D28:G28) |
| 29 | =SUM(D29:G29) |
| 30 | =SUM(D30:G30) |
| 31 | =SUM(D31:G31) |
| 32 | =SUM(D32:G32) |

| | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|
| 33 | Installed | =SUM(D25:D32) | =SUM(E25:E32) | =SUM(F25:F32) | =SUM(G25:G32) |

| | J |
|---|---|
| 34 | Total Cost |
| 35 | ($millions) |
| 36 | =SUMPRODUCT(UnitCost,UnitsProduced) |

图 6.7(续)

的所有因素，使总成本下降到一个绝对最小值，如图 6.7 中目标单元格总成本(J36)所示的 7740 万美元。

**表 6.11　北方飞机制造公司的最优生产进度安排**

| 月　份 | 产　量 | 安 装 量 | 储 存 量 |
|---|---|---|---|
| 1(RT) | 20 | 10 | 10 |
| 2(RT) | 10 | 15 | 5 |
| 3(RT) | 25 | 25 | 5 |
| 3(OT) | 10 | 0 | 10 |
| 4(RT) | 5 | 20 | 0 |

## 划分学生入学区域

米德尔城学区(Middletown School District)开办了第三所中学，需要为每一所学校重新划定这个城市内的服务区域。

在初步的计划中，这个城市被分成了拥有大致相同数量人口的 9 个区域(在进一步细化的计划之中，就把城市分成了超过 100 个更小的区域)。表 6.12 给出了每一所学校与每一个区域之间的近似距离。最右一列给出了明年每一个区域的高中学生数量(这些数字在

未来几年之内估计会有缓慢的增长)。最下面的两行表示了每一所学校所能够安排的最少和最多的学生数量。

表 6.12 米德尔学区问题的数据

| 学校 | 距离学校的距离(英里) | | | 高中学生数量 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 区域 | | | | |
| 1 | 2.2 | 1.9 | 2.5 | 500 |
| 2 | 1.4 | 1.3 | 1.7 | 400 |
| 3 | 0.5 | 1.8 | 1.1 | 450 |
| 4 | 1.2 | 0.3 | 2.0 | 400 |
| 5 | 0.9 | 0.7 | 1.0 | 500 |
| 6 | 1.1 | 1.6 | 0.6 | 450 |
| 7 | 2.7 | 0.7 | 1.5 | 450 |
| 8 | 1.8 | 1.2 | 0.8 | 400 |
| 9 | 1.5 | 1.7 | 0.7 | 500 |
| 最小招生数 | 1200 | 1100 | 1000 | |
| 最大招生数 | 1800 | 1700 | 1500 | |

学区管理者认为划分入学区域界限的适当目标是要使学生到学校的平均路程最短。在这个初步的计划之中,他们要确定为了实现这一目标每一个区域内有多少学生要安排到每一所学校中,同时又要满足表 6.12 最后两行规定的约束条件。

## 建模和求解

使学生所走的平均路程最短,就是说使每一个学生所走的路程的和最小。因此,这个问题也是一个运输问题的变形——只是单位成本变成了距离。

由于每一所学校都有一个最大的和最小的学生容量,就像在 6.3 节耐芙迪公司的案例中一样,我们在图 6.8 电子表格模型可变单元格的底下给出了最小值行和最大值行。相应的约束以及一些供应约束也包含在 Solver 对话框中。点击 Solver 按钮就会得到最优解,如可变单元格学生数量(C17:E25)所示。

这个最优解给出了下面的一些安排:

把区域 2 和 3 安排给学校 1。

把区域 1、4、7 安排给学校 2。

把区域 6、8、9 安排给学校 3。

把区域 5 分成两个部分,其中 350 个学生安排给学校 1150 个学生安排给学校 2。

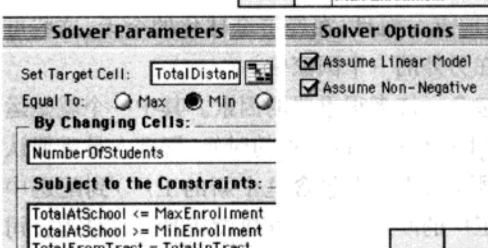
如同目标单元格总距离(H30)中所示,所有学生到学校的总路程为 3530 英里(平均每一个学生为 0.872 英里)。

## 以经济的方式满足能源需求

源丰公司(Energetic Company)需要为新的建筑物建立起能源系统。

建筑物的能源需求主要来自于下面三个方面:(1)电;(2)热水;(3)建筑物内取暖。每天这三类用途的能源需求(以相同的单位衡量)分别是 10 个单位、20 个单位和 30 个单位。

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Middletown School District Zoning Problem | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | Distance (Miles) | School 1 | School 2 | School 3 | | | |
| 4 | | Tract 1 | 2.2 | 1.9 | 2.5 | | | |
| 5 | | Tract 2 | 1.4 | 1.3 | 1.7 | | | |
| 6 | | Tract 3 | 0.5 | 1.8 | 1.1 | | | |
| 7 | | Tract 4 | 1.2 | 0.3 | 2 | | | |
| 8 | | Tract 5 | 0.9 | 0.7 | 1 | | | |
| 9 | | Tract 6 | 1.1 | 1.6 | 0.6 | | | |
| 10 | | Tract 7 | 2.7 | 0.7 | 1.5 | | | |
| 11 | | Tract 8 | 1.8 | 1.2 | 0.8 | | | |
| 12 | | Tract 9 | 1.5 | 1.7 | 0.7 | | | |
| 13 | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | |
| 15 | | Number of | | | | Total | | Total |
| 16 | | Students | School 1 | School 2 | School 3 | from Tract | | in Tract |
| 17 | | Tract 1 | 0 | 500 | 0 | 500 | = | 500 |
| 18 | | Tract 2 | 400 | 0 | 0 | 400 | = | 400 |
| 19 | | Tract 3 | 450 | 0 | 0 | 450 | = | 450 |
| 20 | | Tract 4 | 0 | 400 | 0 | 400 | = | 400 |
| 21 | | Tract 5 | 350 | 150 | 0 | 500 | = | 500 |
| 22 | | Tract 6 | 0 | 0 | 450 | 450 | = | 450 |
| 23 | | Tract 7 | 0 | 450 | 0 | 450 | = | 450 |
| 24 | | Tract 8 | 0 | 0 | 400 | 400 | = | 400 |
| 25 | | Tract 9 | 0 | 0 | 500 | 500 | = | 500 |
| 26 | | | | | | | | |
| 27 | | Min Enrollment | 1,200 | 1,100 | 1,000 | | | |
| 28 | | | ≤ | ≤ | ≤ | | | Total Distance |
| 29 | | Total at School | 1,200 | 1,500 | 1,350 | | | (Miles) |
| 30 | | | ≤ | ≤ | ≤ | | | 3,530 |
| 31 | | Max Enrollment | 1,800 | 1,700 | 1,500 | | | |




| Range Name | Cell |
|---|---|
| MaxEnrollment | C31:E31 |
| Miles | C4:E12 |
| MinEnrollment | C27:E27 |
| NumberOfStudents | C17:E25 |
| TotalAtSchool | C29:E29 |
| TotalDistance | H30 |
| TotalFromTract | F17:F25 |
| TotalInTract | H17:H25 |

| | F |
|---|---|
| 15 | Total |
| 16 | from Tract |
| 17 | =SUM(C17:E17) |
| 18 | =SUM(C18:E18) |
| 19 | =SUM(C19:E19) |
| 20 | =SUM(C20:E20) |
| 21 | =SUM(C21:E21) |
| 22 | =SUM(C22:E22) |
| 23 | =SUM(C23:E23) |
| 24 | =SUM(C24:E24) |
| 25 | =SUM(C25:E25) |

| | H |
|---|---|
| 28 | Total Distance |
| 29 | (miles) |
| 30 | =SUMPRODUCT(Miles,NumberOfStudents) |

| | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 29 | Total at School | =SUM(C17:C25) | =SUM(D17:D25) | =SUM(E17:D25) |

**图 6.8** 将米德尔城学区问题作为一个运输问题变形的电子表格模型描述，包括目标单元格总距离(H30)和其他输出单元格总区域输出量(F17:F25)、总学校输入量(C29:E29)及其他建立模型需要说明的内容。可变单元格学生数量(C17:E25)显示了通过 Solver 得到的最优分区方案。

满足这些需求的三个可能的能源来源是：电、天然气和安装在屋顶上的太阳能加热装置。房屋屋顶的大小决定了太阳能加热装置每天所能够提供的能源量。但是对于电和天然气来说没有这种限制。

电的需求只能够通过购买电来满足。但是对于其他的两种能源需求(热水和建筑物内取暖)来说,可以通过这三个能量来源中的一个或者是几个组合得到满足。

通过这些能源来源来满足能源需求的单位成本如表 6.13 所示。管理层想要达到的目标是使得满足这些能源需求的成本最小。

**表 6.13 源丰公司问题中的成本数据**

| 能源需求 | 单位成本(美元) | | |
|---|---|---|---|
| | 电能 | 水加热 | 筑物内取暖 |
| **能源来源** | | | |
| 电能 | 400 | 500 | 600 |
| 天然气 | — | 600 | 500 |
| 太阳能加热 | — | 300 | 400 |

**建模和求解**

图 6.9 给出了这个运输问题变形的描述。可变单元格日能源使用量(D12:F14)给出了每种能源应该使用多少来满足每一种能源需求的最优解。目标单元格总成本(I18)显示了每天的总成本为 24000 美元。

## 选　址

许多公司的管理人员都面临着一个非常重要的决策:在什么地方设置一个新的重要设施。这个新的设施有可能是一个新的工厂、一个新的配送中心、一个新的管理中心或者其他的建筑物。这些新的建筑物可能是由原址扩建而建设的。在其他情况下,公司必须要避免一些令人不满意的选址。

一般来说,一个建筑物都有几个可供选择的地点。而且,在经济全球化的今天,这些可供选择的潜在地点很有可能已经超越了国界而在另外的一个国家中。

> 决定在哪里建厂时要考虑的重要因素是运输成本,所以解决运输问题成为关键的分析之一。

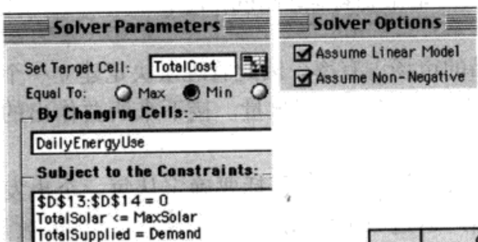
在形成决策的过程之中包含了许多很重要的因素。其中一个就是运输成本。例如,在为一个新的工厂评估建设地点的时候,管理人员需要认真考虑选择这个地点之后从所有工厂(也包含这个新的工厂)到配送中心的运送成本。在远离现有工厂的配送中心附近建设新的工厂可为公司省下一大笔运输成本,同时减少了从现有工厂运送货物的成本。管理人员需要知道根据新工厂的每一个备选的建设地点,按照最优运输计划得到的总运输成本是多少。

同样,还有另外一个有关运输成本的问题是:在每一个备选地点上,从各个不同的原料产地向工厂(包含新的工厂)运送原料的运输成本。

运输问题(或其变形)通常可以为这些问题提供一个合适的模型。针对每一个备选地点解出模型,可以向管理人员提供关键信息。管理人员必须评估这些信息以及其他的相关因素以作出最终的选址决策。

下一节的案例分析说明了这种应用。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Energetic Co. Energy-Sourcing Problem | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | Energy Need | | | | |
| 4 | | Unit Cost ($/day) | | Electricity | Water Heating | Space Heating | | | |
| 5 | | Source | Electricity | 400 | 500 | 600 | | | |
| 6 | | of Energy | Natural Gas | – | 600 | 500 | | | |
| 7 | | | Solar Heater | – | 300 | 400 | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |
| 10 | | Daily Energy Use | | | Energy Need | | Total | | |
| 11 | | Source | | Electricity | Water Heating | Space Heating | Used | | |
| 12 | | of Energy | Electricity | 20 | 0 | 0 | 20 | | |
| 13 | | | Natural Gas | 0 | 0 | 10 | 10 | | Max Solar |
| 14 | | | Solar Heater | 0 | 10 | 20 | 30 | ≤ | 30 |
| 15 | | | Total Supplied | 20 | 10 | 30 | | | |
| 16 | | | | = | = | = | | | Total Cost |
| 17 | | | Demand | 20 | 10 | 30 | | | ($/day) |
| 18 | | | | | | | | | 24,000 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| DailyEnergyUse | D12:F14 |
| Demand | D17:F17 |
| MaxSolar | I14 |
| TotalCost | I18 |
| TotalSolar | G14 |
| TotalSupplied | D15:F15 |
| TotalUsed | G12:G14 |
| UnitCost | D5:F7 |

| | G |
|---|---|
| 10 | Total |
| 11 | Used |
| 12 | =SUM(D12:F12) |
| 13 | =SUM(D13:F13) |
| 14 | =SUM(D14:F14) |

| | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|
| 15 | Total Supplied | =SUM(D12:D14) | =SUM(E12:E14) | =SUM(F12:F14) |

| | I |
|---|---|
| 16 | Total Cost |
| 17 | ($/day) |
| 18 | =SUMPRODUCT(UnitCost,DailyEnergyUse) |

**图 6.9**　将源丰公司问题作为一个运输问题变形的电子表格模型描述。包括目标单元格总成本(I18)和其他输出单元格总使用量(G12:G14)、总供应量(D15:F15)以及其他建立模型需要说明的内容。可变单元格日能源使用量(D12:F14)显示了通过 Solver 得到的能源来源计划最优方案。

## 问题回顾

1. 在本节中,我们举例说明了运输问题变形的哪几种应用?
2. 在米德罗水管站问题中管理层的目标是什么?
3. 在北方飞机制造公司生产进度安排问题中,出发地和目的地各是什么?
4. 在米德尔城学区问题中代替"单位成本"的是什么?
5. 在源丰公司的问题中,管理层的目标是什么?

## 6.5　案例研究:特塞格公司的选址问题

特塞格公司(Texago Corporation)是一家设在美国本土的大型一体化石油公司。这家公

司大部分的石油在公司自己的油田中生产,所需的其他部分从中东地区进口。公司拥有大型配送网络,把石油运送到公司的炼油厂,然后再把石油产品从炼油厂运送到公司的配送中心。这些设施的所在地如表 6.14 所示。

**表 6.14 特塞格公司目前设施的所在地**

| 设施种类 | 所处的位置 |
|---|---|
| 油田 | 1. 有几个在得克萨斯州<br>2. 有几个在加利福尼亚<br>3. 有几个在阿拉斯加州 |
| 炼油厂 | 1. 在路易斯安那州的新奥尔良附近<br>2. 在南卡罗莱纳州的查尔斯顿附近<br>3. 在华盛顿州的西雅图附近 |
| 配送中心 | 1. 在宾夕法尼亚州的匹兹堡<br>2. 在佐治亚州的亚特兰大<br>3. 在密苏里州的堪萨斯城<br>4. 在加利福尼亚州的旧金山 |

特塞格公司正在持续增加其几种主要产品的市场占有率。因此管理层决定建立一个新的炼油厂来增加公司的产量,同时增加从中东地区进口石油的数量。接下来所要作出的决策就是确定在什么地方建设新的炼油厂。

新炼油厂的加入对整个配送系统将产生巨大的影响,其中包括要确定从每一个出发地运输到炼油厂的原油数量,以及从每一个炼油厂运送石油制品到每一个配送中心的数量。因此,影响管理者选择新炼油厂建设地点的三个关键因素是:

1. 从出发地运送原油到所有炼油厂(包括新炼油厂)的成本。
2. 从所有炼油厂(包括新炼油厂)运送石油制品到每一个配送中心的成本。
3. 新的炼油厂的运作成本,包括劳动力成本、赋税、原料(不包括原油)成本、能源成本、保险成本,等等(资金成本并不是一个所要关注的因素,因为任何地点的资金成本几乎都是相同的)。

管理层决定成立一个特别工作小组来专门研究在什么地点建造这个新炼油厂的问题。经过大量的研究,特别工作组确定出了三个非常有潜力和吸引力的备选地点。这些地点以及每一个地点的主要优势如表 6.15 所示。

**表 6.15 特塞格公司新炼油厂的备选建造地点以及它们的主要优势**

| 备选地点 | 主要优势 |
|---|---|
| 靠近加州的洛杉矶 | 1. 靠近加州的油田<br>2. 可以从阿拉斯加的油田取得原油<br>3. 十分靠近旧金山配送中心 |
| 靠近德州的加尔维斯敦 | 1. 靠近得克萨斯油田<br>2. 可以从中东进口原油<br>3. 靠近公司总部 |
| 靠近密苏里州的圣路易斯 | 1. 较低的运营成本<br>2. 处于配送中心的中央地域<br>3. 已经有了穿过密西西比河的输油途径 |

## 收集必要的数据

特别工作组需要收集大量的数据，其中一些数据甚至需要进行大量的挖掘工作，以此来对管理层所提出的问题——新炼油厂的选址问题进行分析。

管理者希望所有的炼油厂（包括新炼油厂）都能够满负荷运转。因此，特别工作组需要确定这种条件下每一个炼油厂每年所需要的原油数量是多少。使用百万桶为计量单位，这些需求量的数据如表 6.16 左半边所示。表的右半边显示了各个油田每年的石油产量。这些数字在未来几年中预计将保持稳定。由于炼油厂所需要的原油总量为 3.6 亿桶，而公司的油田只能自己生产出 2.4 亿桶，所以不得不从中东进口 1.2 亿桶原油。

**表 6.16　特塞格公司的生产数据**

| 炼油厂 | 每年所需原油量（百万桶） | 油　田 | 每年原油产量（百万桶） |
|---|---|---|---|
| 新奥尔良 | 100 | 得克萨斯 | 80 |
| 查尔斯顿 | 60 | 加利福尼亚 | 60 |
| 西雅图 | 80 | 阿拉斯加 | 100 |
| 新的炼油厂 | 120 | 总　量 | 240 |
| 总　量 | 360 | 所需进口量 = 360 − 240 = 120 | |

由于不管炼油厂建在什么地点，原油需求量是不会改变的，也就是公司自己生产以及所需购买的原油量不变。特别工作组以此得出结论：相关的生产和购买成本（不包括运输成本）与新炼油厂的选址无关；另一方面，原油从出发地运输到炼油厂的运输成本和新炼油厂的建立地点紧密相关。表 6.17 给出了从原油产地到现有三个炼油厂以及三个备选炼油厂地点的运输成本。

**表 6.17　特塞格向炼油厂运输原油的运输成本数据**

| | 向炼油厂或潜在炼油厂运输原油的运输成本（百万美元每百万桶） | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 新奥尔良 | 查尔斯顿 | 西雅图 | 洛杉矶 | 加尔维斯敦 | 圣路易斯 |
| **出发地** | | | | | | |
| 得克萨斯 | 2 | 4 | 5 | 3 | 1 | 1 |
| 加利福尼亚 | 4 | 5 | 3 | 1 | 3 | 4 |
| 阿拉斯加 | 5 | 7 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| 中东地区 | 2 | 3 | 5 | 4 | 3 | 4 |

> 对于三个候选地，都需要考虑所有炼油厂的总成本（包括新建的）以及运送原油和产成品的总运输费用与新炼油厂的运营成本。

另一个紧密联系的因素是把石油制品从炼油厂运送到公司配送中心的运输成本。如果我们加工一个单位原油就可以得到一个单位石油制品（中间没有什么损耗）的话，我们可以列出这些运输成本，如表 6.18 所示，单位是百万桶。这个表的最后的一行显示了每一个配送中心所需要的石油制品数量。

**表 6.18 特塞格公司把石油制品运送到配送中心的运输成本数据**

| | 把石油制品运输到配送中心的单位成本(百万美元) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 匹兹堡 | 亚特兰大 | 堪萨斯城 | 旧金山 |
| **炼油厂** | | | | |
| 新奥尔良 | 6.5 | 5.5 | 6 | 8 |
| 查尔斯顿 | 7 | 5 | 4 | 7 |
| 西雅图 | 7 | 8 | 4 | 3 |
| **未来的炼油厂** | | | | |
| 洛杉矶 | 8 | 6 | 3 | 2 |
| 加尔维斯敦 | 5 | 4 | 3 | 6 |
| 圣路易斯 | 4 | 3 | 1 | 5 |
| 所需要的单位数 | 100 | 80 | 80 | 100 |

最后一个关键数据是每一个备选地点新炼油厂的运营成本。要对这些数据进行估计就要派出几名特别工作组的成员来收集相关的劳动力成本、赋税等详细数据。参照一个现在正在运营的炼油厂运营成本,可以帮助我们对这些数据进行提炼。而且特别工作组还要收集在这个地点建设新炼油厂所需要的土地成本、建设成本以及其他成本,然后以年金的形式摊销这些成本,就可以得到如表 6.19 所示的计算结果。

**表 6.19 特塞格公司在每一个备选地点建造新炼油厂的估计运营成本数据**

| 地　　点 | 每年的运营成本(百万美元) |
|---|---|
| 洛杉矶 | 620 |
| 加尔维斯敦 | 570 |
| 圣路易斯 | 530 |

## 分析(运输问题的六个应用)

有了这些数据以后,特别工作组现在需要为管理层提供下面两个关键的财务信息:

1. 每一个新炼油厂建造地点选择带来的总原油运输成本。
2. 每一个新炼油厂建造地点选择带来的总石油制品运输成本。

对于这两种成本来说,一旦确定了建造地点,最优的运输计划也就确定了。因此,为了找出潜在选择地点的每一种成本,有必要为每一种情况都作出一个最优运输计划,然后再计算出相应的成本。

特别工作组意识到对于每一个新炼油厂的选择地点来说,确定最优运输计划的问题就是一个运输问题。特别地,对于原油运输来说,图 6.10 显示了这个运输问题的电子表格模型。图中输入的数据的内容就是直接来源于表 6.16 和表 6.17。在"新地点"(单元格 G5:G8)一列中的内容来源于表 6.17 最后三列中的某一列。这取决于要对哪一个地点进行评估。在输入这一列的数据并点击 Solver 按钮之前,可变单元格运量(D13:G16)中每一个运输数量的结果都是 0。

图 6.11、图 6.12、图 6.13 都用了与图 6.10 相同的运输问题电子表格模型。

图 6.11、图 6.12、图 6.13 中的可变单元格显示了对于建立新炼油厂的每一个选择的最优运输计划。目标单元格总成本(J20)给出了每年总的运输成本,单位是百万美元。例如,如果选择洛杉矶建造新的炼油厂(图 6.11),最优运输计划之

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Texago Corp. Site-Selection Problem (Shipping to Refineries) | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | Refineries | | | | | |
| 4 | | Unit Cost ($millions) | | New Orleans | Charleston | Seattle | New Site | | | |
| 5 | | | Texas | 2 | 4 | 5 | | | | |
| 6 | | Oil | California | 5 | 5 | 3 | | | | |
| 7 | | Fields | Alaska | 5 | 7 | 3 | | | | |
| 8 | | | Middle East | 2 | 3 | 5 | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | Shipment Quantity | | | Refineries | | | | | |
| 12 | | (millions of barrels) | | New Orleans | Charleston | Seattle | New Site | Total Shipped | | Supply |
| 13 | | | Texas | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 80 |
| 14 | | Oil | California | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 60 |
| 15 | | Fields | Alaska | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 100 |
| 16 | | | Middle East | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 120 |
| 17 | | | Total Received | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 18 | | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 19 | | | Demand | 100 | 60 | 80 | 120 | | | ($millions) |
| 20 | | | | | | | | | | 0 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalCost

Equal To: Max ● Min

By Changing Cells:

ShipmentQuantity

Subject to the Constraints:

TotalReceived = Demand

TotalShipped = Supply

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Demand | D19:G19 |
| ShipmentQuantity | D13:G16 |
| Supply | J13:J16 |
| TotalCost | J20 |
| TotalReceived | D17:G17 |
| TotalShipped | H13:H16 |
| UnitCost | D5:G8 |

| | H |
|---|---|
| 12 | Total Shipped |
| 13 | =SUM(D13:G13) |
| 14 | =SUM(D14:G14) |
| 15 | =SUM(D15:G15) |
| 16 | =SUM(D16:G16) |

| | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | Total Received | =SUM(D13:D16) | =SUM(E13:E16) | =SUM(F13:F16) | =SUM(G13:G16) |

| | J |
|---|---|
| 18 | Total Cost |
| 19 | ($millions) |
| 20 | =SUMPRODUCT(UnitCost,ShipmentQuantity) |

图 6.10　特塞格公司从油田运输原油到炼油厂运输问题的基本电子表格模型描述，包括在某一个备选地点建造的新炼油厂。目标单元格是总成本(J20)，其他输出单元格是总运出量(H13:H16)、总运入量(D17:G17)。在输入新地址的数据前按下 Solver 求解，在可变单元格运量(D13:G16)中会输入 0，作为试算值。

中每年的总原油运输成本是 8.8 亿美元；如果选择加尔维斯敦建造新的炼油厂(图 6.12)，最优运输计划之中每年的总运输成本是 9.2 亿美元；如果选择圣路易斯建造新的炼油厂(图 6.13)，最优运输计划之中每年的总运输成本是 9.6 亿美元。

对石油制品运输成本进行的分析与之相类似。图 6.14 显示了这个运输问题的电子表格模型。图 6.14 中 5～7 行直接来自于表 6.18 的前三行。在"新地点"一列中所需要填入的内容直接来自于表 6.18 接下来三行之中的某一行，这取决于要对哪一个地点进行评估。由于从炼油厂运送出的石油制品数量与所运进的原油数量是相同的，所以单元格供给量(J13:J16)中的内容直接来自于表 6.16 的左半边。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Texago Corp. Site-Selection Problem (Shipping to Refineries, Including Los Angeles)** | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | **Refineries** | | | | | |
| 4 | | **Unit Cost ($millions)** | | New Orleans | Charleston | Seattle | Los Angeles | | | |
| 5 | | | Texas | 2 | 4 | 5 | 3 | | | |
| 6 | | Oil | California | 5 | 5 | 3 | 1 | | | |
| 7 | | Fields | Alaska | 5 | 7 | 3 | 4 | | | |
| 8 | | | Middle East | 2 | 3 | 5 | 4 | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | **Shipment Quantity** | | | **Refineries** | | | | | |
| 12 | | **(millions of barrels)** | | New Orleans | Charleston | Seattle | Los Angeles | Total Shipped | | Supply |
| 13 | | | Texas | 40 | 0 | 0 | 40 | 80 | = | 80 |
| 14 | | Oil | California | 0 | 0 | 0 | 60 | 60 | = | 60 |
| 15 | | Fields | Alaska | 0 | 0 | 80 | 20 | 100 | = | 100 |
| 16 | | | Middle East | 60 | 60 | 0 | 0 | 120 | = | 120 |
| 17 | | | Total Received | 100 | 60 | 80 | 120 | | | |
| 18 | | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 19 | | | Demand | 100 | 60 | 80 | 120 | | | ($millions) |
| 20 | | | | | | | | | | 880 |

**图 6.11** 如果选择洛杉矶为新炼油厂的建造地点，可变单元格运量(D13:G16)给出了特塞格管理层在这种情况下运输原油的最优计划。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Texago Corp. Site-Selection Problem (Shipping to Refineries, Including Galveston)** | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | **Refineries** | | | | | |
| 4 | | **Unit Cost ($millions)** | | New Orleans | Charleston | Seattle | Galveston | | | |
| 5 | | | Texas | 2 | 4 | 5 | 1 | | | |
| 6 | | Oil | California | 5 | 5 | 3 | 3 | | | |
| 7 | | Fields | Alaska | 5 | 7 | 3 | 5 | | | |
| 8 | | | Middle East | 2 | 3 | 5 | 3 | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | **Shipment Quantity** | | | **Refineries** | | | | | |
| 12 | | **(millions of barrels)** | | New Orleans | Charleston | Seattle | Galveston | Total Shipped | | Supply |
| 13 | | | Texas | 20 | 0 | 0 | 60 | 80 | = | 80 |
| 14 | | Oil | California | 0 | 0 | 0 | 60 | 60 | = | 60 |
| 15 | | Fields | Alaska | 20 | 0 | 80 | 0 | 100 | = | 100 |
| 16 | | | Middle East | 60 | 60 | 0 | 0 | 120 | = | 120 |
| 17 | | | Total Received | 100 | 60 | 80 | 120 | | | |
| 18 | | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 19 | | | Demand | 100 | 60 | 80 | 120 | | | ($millions) |
| 20 | | | | | | | | | | 920 |

**图 6.12** 如果选择加尔维斯敦为新炼油厂的建造地点，可变单元格运量(D13:G16)给出了特塞格管理层在这种情况下运输原油的最优计划。

> 图 6.15、图 6.16、图 6.17 都用了如图 6.14 一样的运输问题电子表格模型。

图 6.15、图 6.16、图 6.17 中的可变单元格运量(D13:G16)显示了对于建造新炼油厂的每一个地点选择的石油制品的最优运输计划。图 6.15 目标单元格总成本(J20)表明，如果选择在洛杉矶建造新炼油厂的话，每年所需要的运输

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Texago Corp. Site-Selection Problem (Shipping to Refineries, Including St. Louis) | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | Refineries | | | | | |
| 4 | | Unit Cost ($millions) | | New Orleans | Charleston | Seattle | St. Louis | | | |
| 5 | | | Texas | 2 | 4 | 5 | 1 | | | |
| 6 | | Oil | California | 5 | 5 | 3 | 4 | | | |
| 7 | | Fields | Alaska | 5 | 7 | 3 | 7 | | | |
| 8 | | | Middle East | 2 | 3 | 5 | 4 | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | Shipment Quantity | | | Refineries | | | | | |
| 12 | | (millions of barrels) | | New Orleans | Charleston | Seattle | St. Louis | Total Shipped | | Supply |
| 13 | | | Texas | 0 | 0 | 0 | 80 | 80 | = | 80 |
| 14 | | Oil | California | 0 | 20 | 0 | 40 | 60 | = | 60 |
| 15 | | Fields | Alaska | 20 | 0 | 80 | 0 | 100 | = | 100 |
| 16 | | | Middle East | 80 | 40 | 0 | 0 | 120 | = | 120 |
| 17 | | | Total Received | 100 | 60 | 80 | 120 | | | |
| 18 | | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 19 | | | Demand | 100 | 60 | 80 | 120 | | | ($millions) |
| 20 | | | | | | | | | | 960 |

**图 6.13**　如果选择圣路易斯为新炼油厂的建造地点，可变单元格运量（D13:G16）给出了特塞格管理层在这种情况下运输原油的最优计划。

石油制品的成本是 15.7 亿美元；如果选择在加尔维斯敦（图 6.16）建造新的炼油厂的话，每年运输成本是 16.3 亿美元；如果是在圣路易斯的话（图 6.17），运输成本为 14.3 亿美元。

对于每一个候选地，用两张分开的表格来表示运输原油和产成品。但是，另外一种方法是将所有的计划用一张表格显示，然后同时使两种产品的运输计划达到最优。这就可以通过将图 6.11 与图 6.15 合并，图 6.12 与图 6.16 合并，图 6.13 与图 6.17 合并，并且将每组的运输成本求和显示在目标单元格中，使其最小化。这会带来将所有的运输计划通过一张表格即能反映的好处。在这一张的最后，案例 6.2 将会继续研究特塞格的案例，通过一张电子表格对每个候选地选择最佳运输计划。

## 提供给管理层的信息

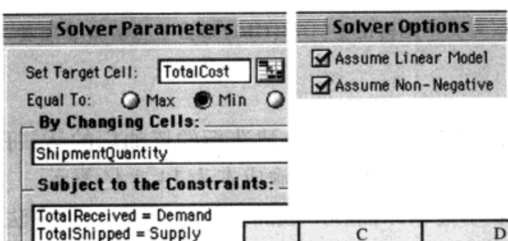
现在，特别工作组完成了对这三个建造新炼油厂备选地点的财务分析。表 6.20 显示了对于三个可能建造新炼油厂的每一个备选地点每年所有主要的可变成本。第二列表示了对于每一个选择来说，把原油从炼油厂（包括新的炼油厂）运送到配送中心的每年总运输成本（在图 6.11、图 6.12、图 6.13 中已给出）。第三列表示了对于每一个选择来说，把石油制品从炼油厂（包括新的炼油厂）运送到配送中心的每年总运输成本（在图 6.15、图 6.16、图 6.17 中已给出）。第四列显示了建造在每一个可能地点的新炼油厂的运营成本，如表 6.19 所示。

把这三列中的数据相加就得到了每一种选择下的总可变成本。

**结论**：从纯粹的财务角度来看，圣路易斯是最适合建造新炼油厂的地点。这个地点与加尔维斯敦相比，每年可以为公司节约 2 亿美元；与洛杉矶相比，每年可以节约 1.5 亿美元。

然而，与任何选址决策一样，管理者需要考虑许多的因素。其中当然也包括一些非财务

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Texago Corp. Site-Selection Problem (Shipping to D. C.'s)** | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | **Distribution Center** | | | | | |
| 4 | | **Unit Cost ($millions)** | | Pittsburgh | Atlanta | Kansas City | San Francisco | | | |
| 5 | | | New Orleans | 6.5 | 5.5 | 6 | 8 | | | |
| 6 | | Refineries | Charleston | 7 | 5 | 4 | 7 | | | |
| 7 | | | Seattle | 7 | 8 | 4 | 3 | | | |
| 8 | | | New Site | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | **Shipment Quantity** | | | **Distribution Center** | | | | | |
| 12 | | **(millions of barrels)** | | Pittsburgh | Atlanta | Kansas City | San Francisco | Total Shipped | | Supply |
| 13 | | | New Orleans | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 100 |
| 14 | | Refineries | Charleston | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 60 |
| 15 | | | Seattle | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 80 |
| 16 | | | New Site | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | = | 120 |
| 17 | | | Total Received | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 18 | | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 19 | | | Demand | 100 | 80 | 80 | 100 | | | ($millions) |
| 20 | | | | | | | | | | 0 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| Demand | D19:G19 |
| ShipmentQuantity | D13:G16 |
| Supply | J13:J16 |
| TotalCost | J20 |
| TotalReceived | D17:G17 |
| TotalShipped | H13:H16 |
| UnitCost | D5:G8 |

| | H |
|---|---|
| 12 | Total Shipped |
| 13 | =SUM(D13:G13) |
| 14 | =SUM(D14:G14) |
| 15 | =SUM(D15:G15) |
| 16 | =SUM(D16:G16) |

| | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | Total Received | =SUM(D13:D16) | =SUM(E13:E16) | =SUM(F13:F16) | =SUM(G13:G16) |

| | J |
|---|---|
| 18 | Total Cost |
| 19 | ($millions) |
| 20 | =SUMPRODUCT(UnitCost,ShipmentQuantity) |

**图 6.14** 特塞格问题中从炼油厂(包括将要建造的炼油厂)运送制成品到配送中心的基本电子表格模型描述。目标单元格是总成本(J20),其他输出单元格是总运出量(H13:H16)、总运入量(D17:G17)。在输入新地址的数据前按下 Solver 求解,在可变单元格运量(D13:G16)中会输入 0,作为试算值。

因素(例如,前面我们讲过,加尔维斯敦有一个很关键的优势就是它靠近公司的总部)。而且,如果能够找到降低表 6.20 中所示选址在加尔维斯敦和洛杉矶的成本的途径,评估结果就会改变。管理者还需要考虑的是这个地点是否可能有成本或市场变化的趋势。

**表 6.20 特塞格炼油厂每一个备选厂址所带来的年变动成本**

| 地　点 | 运输原油的总成本(百万美元) | 运输石油制品的总成本(10 亿美元) | 新炼油厂的运营成本(百万美元) | 总变动成本(10 亿美元) |
|---|---|---|---|---|
| 洛杉矶 | 880 | 1.57 | 620 | 3.07 |
| 加尔维斯敦 | 920 | 1.63 | 570 | 3.12 |
| 圣路易斯 | 960 | 1.43 | 530 | 2.92 |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Texago Corp. Site-Selection Problem (Shipping to D. C.'s When Choose Los Angeles) | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | Distribution Center | | | | | |
| 4 | | Unit Cost ($millions) | | Pittsburgh | Atlanta | Kansas City | San Francisco | | | |
| 5 | | | New Orleans | 6.5 | 5.5 | 6 | 8 | | | |
| 6 | | Refineries | Charleston | 7 | 5 | 4 | 7 | | | |
| 7 | | | Seattle | 7 | 8 | 4 | 3 | | | |
| 8 | | | Los Angeles | 8 | 6 | 3 | 2 | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | Shipment Quantity | | | Distribution Center | | | | | |
| 12 | | (millions of barrels) | | Pittsburgh | Atlanta | Kansas City | San Francisco | Total Shipped | | Supply |
| 13 | | | New Orleans | 80 | 20 | 0 | 0 | 100 | = | 100 |
| 14 | | Refineries | Charleston | 0 | 60 | 0 | 0 | 60 | = | 60 |
| 15 | | | Seattle | 20 | 0 | 0 | 60 | 80 | = | 80 |
| 16 | | | Los Angeles | 0 | 0 | 80 | 40 | 120 | = | 120 |
| 17 | | | Total Received | 100 | 80 | 80 | 100 | | | |
| 18 | | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 19 | | | Demand | 100 | 80 | 80 | 100 | | | ($millions) |
| 20 | | | | | | | | | | 1,570 |

**图6.15**　如果选择洛杉矶为新炼油厂的建造地点（在图6.14的8到16行），可变单元格运量（D13:G16）给出了特塞格管理层在这种情况下运输制成品的最优计划。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Texago Corp. Site-Selection Problem (Shipping to D. C.'s When Choose Galveston) | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | Distribution Center | | | | | |
| 4 | | Unit Cost ($millions) | | Pittsburgh | Atlanta | Kansas City | San Francisco | | | |
| 5 | | | New Orleans | 6.5 | 5.5 | 6 | 8 | | | |
| 6 | | Refineries | Charleston | 7 | 5 | 4 | 7 | | | |
| 7 | | | Seattle | 7 | 8 | 4 | 3 | | | |
| 8 | | | Galveston | 5 | 4 | 3 | 6 | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | Shipment Quantity | | | Distribution Center | | | | | |
| 12 | | (millions of barrels) | | Pittsburgh | Atlanta | Kansas City | San Francisco | Total Shipped | | Supply |
| 13 | | | New Orleans | 100 | 0 | 0 | 0 | 100 | = | 100 |
| 14 | | Refineries | Charleston | 0 | 60 | 0 | 0 | 60 | = | 60 |
| 15 | | | Seattle | 0 | 0 | 0 | 80 | 80 | = | 80 |
| 16 | | | Galveston | 0 | 20 | 80 | 20 | 120 | = | 120 |
| 17 | | | Total Received | 100 | 80 | 80 | 100 | | | |
| 18 | | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 19 | | | Demand | 100 | 80 | 80 | 100 | | | ($millions) |
| 20 | | | | | | | | | | 1,630 |

**图6.16**　如果选择加尔维斯敦为新炼油厂的建造地点（在图6.14的8到16行），可变单元格运量（D13:G16）给出了特塞格管理层在这种情况下运输石油制成品的最优计划。

在经过了认真的考虑之后，特塞格管理层最终选择了在圣路易斯建造新的炼油厂（这个问题会在案例6.2中继续探讨，要分析为了使新炼油厂的生产能力达到最大时最终决策

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Texago Corp. Site-Selection Problem (Shipping to D. C.'s When Choose St. Louis) | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | Distribution Center | | | | |
| 4 | | Unit Cost ($millions) | | Pittsburgh | Atlanta | Kansas City | San Francisco | | | |
| 5 | | | New Orleans | 6.5 | 5.5 | 6 | 8 | | | |
| 6 | | Refineries | Charleston | 7 | 5 | 4 | 7 | | | |
| 7 | | | Seattle | 7 | 8 | 4 | 3 | | | |
| 8 | | | St. Louis | 4 | 3 | 1 | 5 | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | Shipment Quantity | | | | Distribution Center | | | | |
| 12 | | (millions of barrels) | | Pittsburgh | Atlanta | Kansas City | San Francisco | Total Shipped | | Supply |
| 13 | | | New Orleans | 100 | 0 | 0 | 0 | 100 | = | 100 |
| 14 | | Refineries | Charleston | 0 | 60 | 0 | 0 | 60 | = | 60 |
| 15 | | | Seattle | 0 | 0 | 0 | 80 | 80 | = | 80 |
| 16 | | | St. Louis | 0 | 20 | 80 | 20 | 120 | = | 120 |
| 17 | | | Total Received | 100 | 80 | 80 | 100 | | | |
| 18 | | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 19 | | | Demand | 100 | 80 | 80 | 100 | | | ($millions) |
| 20 | | | | | | | | | | 1,430 |

**图 6.17** 如果选择圣路易斯为新炼油厂的建造地点(在图 6.14 的 8 到 16 行),可变单元格运量(D13:G16)给出了特塞格管理层在这种情况下的石油制品最优运输计划。

会是怎样)。

## 问题回顾

1. 在选择新炼油厂建造地点的时候,管理者必须要考虑的三个关键因素是什么?
2. 为什么原料或原油制品运入和运出现有炼油厂的运输成本需要与新炼油厂的运输成本一起考虑?
3. 为什么特塞格特别工作组发现必须要解决六个运输问题而不仅仅是一个运输问题?
4. 除了建立在解决六个运输问题之上的财务分析外,管理者还需要考虑其他哪些因素?

## 6.6 指派问题的特征

现在我们将要研究另外一种特殊的线性规划问题,称为指派问题。就像这个问题的名字所表示的一样,这个问题主要是讨论一些有关于指派的问题。在现实生活之中,我们也经常遇到指派人员做某项工作的情况。因此,指派问题的许多应用都用来帮助管理人员解决如何为一项将要开展的工作指派人员的问题。其他的一些应用也与之相类似,只是变成了为一项任务指派机器、设备或者是工厂。

### 例子:塞尔默公司的问题

塞尔默公司的营销经理将要主持召开一年一度的由营销区域经理以及销售人员参加的

销售协商会议。为了更好地安排这次会议，他雇用了四个临时工（安、伊恩、琼、肖恩），每一个人负责完成下面的一项任务：

1. 书面陈述的文字处理。
2. 制作口头和书面陈述的电脑图。
3. 会议材料的准备，包括书面材料的抄写和组织。
4. 处理与会者的提前和当场注册报名。

现在他需要确定要将哪一项任务指派给哪一个人。

虽然这四个临时工都有完成这四项任务所需的基本能力，但是在他们完成每一项任务时所表现出来的有效程度是有很大差异的。表 6.21 显示了每一个人完成每一项任务所用的时间（单位：小时）。最右一列给出了以每个人能力为基础的小时薪水。

**表 6.21　塞尔默公司问题的数据**

| 临时工 | 每一项任务所需要的时间（小时） | | | | 每小时工资（美元） |
|---|---|---|---|---|---|
| | 文字处理 | 绘图 | 材料准备 | 记录 | |
| 安 | 35 | 41 | 27 | 40 | 14 |
| 伊恩 | 47 | 45 | 32 | 51 | 12 |
| 琼 | 39 | 56 | 36 | 43 | 13 |
| 肖恩 | 32 | 51 | 25 | 46 | 15 |

**电子表格模型的描述**

图 6.18 给出了这个问题的电子表格模型。表 6.21 包含在图的上部。通过把这些所需时间和工资合并起来（参见底部单元格 D15:G18），第 15 行到第 18 行给出了每一种可能临时工工作安排方式的成本。这个成本表在其他任何指派问题中形式是一样的。我们的目标就是要确定哪一个临时工进行哪一个工作，使得相关的总成本最小。

> 用单元格成本（D15:G18），目标是使任务总成本最小。

在单元格供应量（J24:J27）之中，供应量为 1 代表在 C 列中列出的每一个人都只能完成一项任务。单元格需求量（D30:G30）为 1 代表了每一项任务也只能由一个人来完成。然后这些要求在 Solver 对话框给出的约束中进行了声明。

> 可变单元格的值为 1 表示分配相应的任务，0 表示不分配相应的任务。

在可变单元格任务（D24:G27）中每一个 1 代表进行相应的指派，数值 0 代表没有进行指派。因此，目标单元格的 Excel 等式总成本 = SUMPRODUCT（成本，任务）给出了进行这种指派带来的总成本。Solver 对话框表明问题的目标是要使这个目标单元格中的数值最小化。

通过点击 Solve 按钮，图 6.18 的可变单元格给出了最优解决方案。最优解是：

指派安准备会议材料。
指派伊恩进行计算机绘图工作。
指派琼进行登记工作。
指派肖恩进行文字处理的工作。
单元格 J30 给出总成本为 1957 美元。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Sellmore Co. Assignment Problem** | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | **Task** | | | | | |
| 4 | | **Required Time** | | Word | | | | | Hourly | |
| 5 | | **(Hours)** | | Processing | Graphics | Packets | Registrations | | Wage | |
| 6 | | | Ann | 35 | 41 | 27 | 40 | | $14 | |
| 7 | | Assignee | Ian | 47 | 45 | 32 | 51 | | $12 | |
| 8 | | | Joan | 39 | 56 | 36 | 43 | | $13 | |
| 9 | | | Sean | 32 | 51 | 25 | 46 | | $15 | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | **Task** | | | | | |
| 13 | | | | Word | | | | | | |
| 14 | | **Cost** | | Processing | Graphics | Packets | Registrations | | | |
| 15 | | | Ann | $490 | $574 | $378 | $560 | | | |
| 16 | | Assignee | Ian | $564 | $540 | $384 | $612 | | | |
| 17 | | | Joan | $507 | $728 | $468 | $559 | | | |
| 18 | | | Sean | $480 | $765 | $375 | $690 | | | |
| 19 | | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | **Task** | | | | | |
| 22 | | **Assignment** | | Word | | | | Total | | |
| 23 | | | | Processing | Graphics | Packets | Registrations | Assignments | | Supply |
| 24 | | | Ann | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | = | 1 |
| 25 | | Assignee | Ian | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| 26 | | | Joan | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | = | 1 |
| 27 | | | Sean | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| 28 | | | Total Assigned | 1 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 29 | | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 30 | | | Demand | 1 | 1 | 1 | 1 | | | $1,957 |

| | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | | | Word | | | |
| 14 | **Cost** | | Processing | Graphics | Packets | Registrations |
| 15 | | Ann | =D6*I6 | =E6*I6 | =F6*I6 | =G6*I6 |
| 16 | Assignee | Ian | =D7*I7 | =E7*I7 | =F7*I7 | =G7*I7 |
| 17 | | Joan | =D8*I8 | =E8*I8 | =F8*I8 | =G8*I8 |
| 18 | | Sean | =D9*I9 | =E9*I9 | =F9*I9 | =G9*I9 |

| | H |
|---|---|
| 22 | Total |
| 23 | Assignments |
| 24 | =SUM(D24:G24) |
| 25 | =SUM(D25:G25) |
| 26 | =SUM(D26:G26) |
| 27 | =SUM(D27:G27) |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalCost
Equal To: ○ Max ● Min ○
By Changing Cells:
Assignment
Subject to the Constraints:
TotalAssigned = Demand
TotalAssignments = Supply

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| | J |
|---|---|
| 29 | Total Cost |
| 30 | =SUMPRODUCT(Cost,Assignment) |

| | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|
| 28 | Total Assigned | =SUM(D24:D27) | =SUM(E24:E27) | =SUM(F24:F27) | =SUM(G24:G27) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Assignment | D24:G27 |
| Cost | D15:G18 |
| Demand | D30:G30 |
| HourlyWage | I6:I9 |
| RequiredTime | D6:G9 |
| Supply | J24:J27 |
| TotalAssigned | D28:G28 |
| TotalAssignments | H24:H27 |
| TotalCost | J30 |

**图 6.18** 塞尔默公司问题作为一个指派问题的电子表格模型描述。包括目标单元格总成本(J30)以及其他输出单元格成本(D15:G18)、总任务(H24:H27)和总分配(D28:G28)与建立模型需要的其他内容。可变单元格分配(D24:G27)的值 1 显示在使用 Excel Solver 得到一个将任务指派给临时工的最优安排的解答表格。

## 指派问题的模型

任何一个指派问题都可以用下面的形式表述：给定了一系列所要完成的任务（tasks）以及一系列完成任务的被指派者（assignees），所需要解决的问题就是要确定出哪一个人被指派进行哪一项任务。

> **Excel 窍门：**
> 在解决指派问题时，取整误差有时会导致 Excel 返还一个非常接近于 0 的非整数（例如，1.23 E－10 为 0.000000000123）或一个非常接近于 1 的非整数（例如，0.9999912）。为了让电子表格更加清晰，你可以用 1 或 0 取代可变单元格中这些不协调的数据表达。

为了符合指派问题的模型，需要满足下面的一些假设：

1. 被指派者的数量和任务的数量是相同的。
2. 每一个被指派者只完成一项任务。
3. 每一项任务只能由一个被指派者来完成。
4. 每一个被指派者和每一项任务的组合都会有一个相关的成本。
5. 问题的目标是要确定怎样进行指派才能使得总成本达到最小。

前面三个假设是相当严格的。许多潜在的应用并不完全符合这些假设。然而正如我们将在 6.7 节讲到的，这些问题仍然可以使用 Excel Solver 来解决。

当所有这些假设都得到了满足，把一个问题描述为指派问题所需要完成的工作是：(1)确定被指派者和任务；(2)构建一个成本表（cost table），得到每一个被指派者和每一项任务组合的相关成本。图 6.18 表示了如何使用电子表格对这个问题进行描述。对任何指派问题都包括约束条件来满足假设 2 和假设 3。在图 6.18 中，约束条件是总分配任务（H24:H27）= 供应量（J24:J27），总分配（D28:G28）= 需求量（D30:G30），单元格总供给（J24:J27）和总需求（D30:G30）中输入值 1。

## 指派问题的网络表示法

除了成本表之外，网络表示法提供了另一种表示指派问题的方法。图 6.19 给出了塞尔默公司指派问题的网络表示。在图中所有的被指派者都按照次序排列在左边，而所需要完成的任务都排列在图的右边。箭头代表每一个可能的指派。需要选择四个箭头，从每一个被指派者指向每一项任务。每一个箭头旁的数字代表如果这个指派被选中的话，其成本的大小。

这种网络表示提供了一种以图形方式直观表示指派问题的方法。在下面的一章中我们还将看到，这种网络表示还体现了指派问题与网络配送类型的其他线性规划问题之间的关系。

## 指派问题是一种特殊的运输问题

你是否发现了图 6.19 中的网络表示和图 6.3 中所表示的运输问题网络表示是十分相似的？让我们看一看。

这种相似并不是巧合。实际上，指派问题实际上就是一种特殊的运输问题。其中出发地在这里就是被指派者，目的地就是任务。而且，如在图 6.18 中的塞尔默公司问题的例子一样，每一个出发地供应量都为 1（因为每一个被指派者都只能被指派一项任务），每一个目的地需求量都为 1（因为每一项任务都只能由一个被指派者完成）。

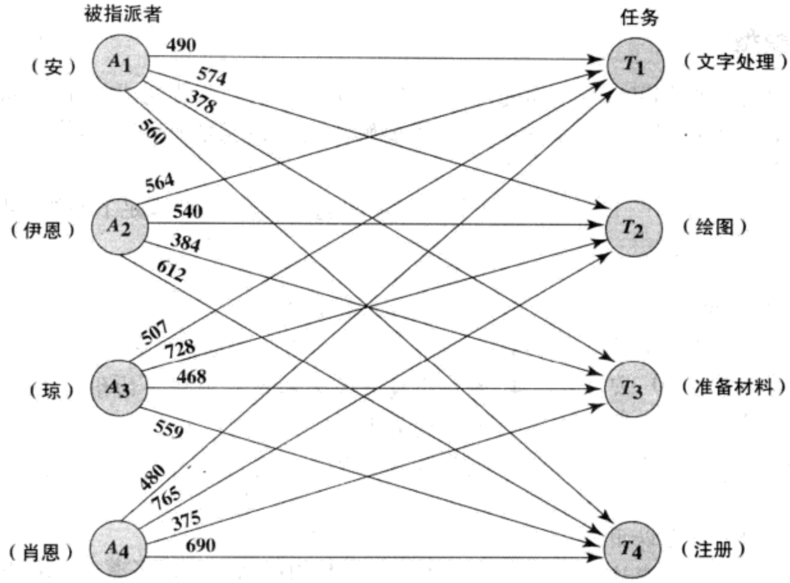



图6.19 塞尔默公司指派问题的网络表示,它用图的形式展示了所有可能的指派以及他们的任务。

而且,在6.2节中所说明的运输问题的所有特征也都适用于指派问题。

## 求解指派问题

Excel Solver 使用单纯形法来解决所有的线性规划问题,其中包括运输问题和指派问题以及它们的变形。这种方法对于本书中所讲到的这种规模大小的问题(或者更大一些)是很有用的。

然而,如同6.2节中所讲到的一样,运输单纯形法和网络单纯形法都可以很有效地解决大型的运输问题,因此,由于指派问题是一种特殊的运输问题,所以相同的算法也适用于迅速解决大型的指派问题。

但是,这些算法则并不是解决指派问题最快的方法。解决指派问题时我们有一种更为快捷的方法:匈牙利方法(Hungarian method)。在实践中,这些特殊的运算法则一般应用于解决大型的指派问题。虽然 Excel Solver 并没有像匈牙利方法这样用于解决特殊线性规划问题的特殊算法,其他的线性规划软件包却可以作到这一点。

## 问题回顾

1. 用一句话来描述指派问题。
2. 如果要成为一个指派问题,被指派者和所要完成的任务应该满足什么样的假设?
3. 在把一个问题描述为指派问题时,需要作些什么?
4. 如果将指派问题看作一种特殊的运输问题,出发地、目的地、供应量以及需求量各是什么?
5. 说出为快速求解指派问题而特别设计的运算法则的名称。

## 6.7　对指派问题变形的建模

我们经常会遇到指派问题的变形。之所以称它们为变形,因为它们都不满足上一节所讲到的指派问题模型所有假设之中的一个或者多个。我们一般要考虑下面的一些特征:

1. 有一些被指派者并不能进行某一些任务。
2. 虽然每一个被指派者完成一项任务,但是任务比被指派者多。所以其中某些任务并没有得到执行。
3. 虽然每一项任务只由一个被指派者完成,但是这里被指派者比要完成的任务多。所以,其中有一些被指派者没有指派到任务。
4. 每一个被指派者可以同时被指派给多于一个的任务。
5. 每一项任务都可以由多个被指派者共同完成。

对于上面所讲到的每一种特征来说,有一种很聪明的方法对问题进行重新描述,使得它符合一个指派问题的模型,然后可以使用极为高效的特殊目的算法(例如匈牙利方法)。但是,在本书中我们并不需要使用这种方法,除非要解决比本书考虑的问题规模大许多的问题。因此,在大多数情况下,我们将以最直接的方式建立一个电子表格模型并用 Excel Solver 求解。

下面的三个例子体现了上面的特征。第一个例子主要说明了特征 1 和特征 2 的,第二个例子组合了特征 4 和特征 3 的变形,第三个例子主要说明了特征 5。

为了举例说明运输问题和指派问题之间的紧密关系,第二个例子和第三个例子建立在前面所讲到的运输问题变形的基础上。

### 例子 1:在各个地点分派设备

娇普肖普公司(Job Shop Company)购买了三种不同类型的新设备。但是在车间里却有五个不同的地点可供安装,其中某些地点比其他的地点更为需要某些设备,原因是他们十分接近工作中心,流入和流出这些设备的工作很多(在新设备之间并没有工作流)。因此,该问题的目标是把这些设备安装到有效的地点上,使物料处理成本达到最小。每一个设备处理原料的单位成本已经在表 6.22 中列了出来。地点 2 不能安装设备 2,所以这里没有给出成本。

**表 6.22　娇普肖普公司问题中的原料处理成本数据**

| 位　　置 | 每小时成本(美元) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 机器 | | | | | |
| 1 | 13 | 16 | 12 | 14 | 15 |
| 2 | 15 | – | 13 | 20 | 16 |
| 3 | 4 | 7 | 10 | 6 | 7 |

#### 电子表格模型的描述

这个问题也基本上是一个指派问题,因为设备可以被看作是被指派者,与之相关的地点就可以看作是任务。但是它并不能很好地符合指派问题模型。因为它不符合假设 1(我们

所得到的地点数量要比设备的数量多)、假设3(一个设备并不能安装在两个地点)和假设4(在把设备2安装到地点2的时候我们没有得到一个成本)。

在约束条件中用≤符号代替=符号说明一台设备不能同时安装在两个地点。

图6.20显示了这个指派问题变形的电子表格模型,在图中成本表位于上面而求解表格位于下面。由于地点2不能够安装设备2,所以在Solver对话框中包含了这样的约束:D12 = 0,一般的供应约束:总分配任务(H11:H13) = 供应量(J11:J13)。这样我们能够确定每一个设备都能够安装到一个地点之上 。在需求约束之中,我们建立了约束总分配(C14:G14)≤需求量(C16:G16),其中的"≤"说明一台设备不能同时安装在两个地点。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Job Shop Co. Machine-Location Problem | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | Cost ($/hour) | Location 1 | Location 2 | Location 3 | Location 4 | Location 5 | | | |
| 4 | | Machine 1 | 13 | 16 | 12 | 14 | 15 | | | |
| 5 | | Machine 2 | 15 | – | 13 | 20 | 16 | | | |
| 6 | | Machine 3 | 4 | 7 | 10 | 6 | 7 | | | |
| 7 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | Total | | |
| 10 | | Assignment | Location 1 | Location 2 | Location 3 | Location 4 | Location 5 | Assignments | | Supply |
| 11 | | Machine 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | = | 1 |
| 12 | | Machine 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| 13 | | Machine 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | = | 1 |
| 14 | | Total Assigned | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | | | |
| 15 | | | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | | | Total Cost |
| 16 | | Demand | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | ($/hour) |
| 17 | | | | | | | | | | 31 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalCost

Equal To: ○ Max ◉ Min ○

By Changing Cells:

Assignment

Subject to the Constraints:

$D$12 = 0
TotalAssigned <= Demand
TotalAssignments = Supply

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cell |
|---|---|
| Assignment | C11:G13 |
| Cost | C4:G6 |
| Demand | C16:G16 |
| Supply | J11:J13 |
| TotalAssigned | C14:G14 |
| TotalAssignments | H11:H13 |
| TotalCost | J17 |

| | H |
|---|---|
| 9 | Total |
| 10 | Assignments |
| 11 | =SUM(C11:G11) |
| 12 | =SUM(C12:G12) |
| 13 | =SUM(C13:G13) |

| | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | Total Assigned | =SUM(C11:C13) | =SUM(D11:D13) | =SUM(E11:E13) | =SUM(F11:F13) | =SUM(G11:G13) |

| | J |
|---|---|
| 15 | Total Cost |
| 16 | ($/hour) |
| 17 | =SUMPRODUCT(Cost,Assignment) |

图6.20 娇普肖普公司问题作为指派问题变形的电子表格模型描述。包括目标单元格总成本(J17)和其他输出单元格总分配任务(H11:H13)、总分配(C14:G14)以及其他建立模型需要的说明。可变单元格分配任务(C11:G13)的值1给出了将设备安排在通过Solver得到的地点的最优方案。

可变单元格任务分配(C11:G13)中单元格显示为1说明在最优解决方案中进行了这样的指派。由于对于地点2和地点5并没有显示1,所以没有把设备安装在这两个地点。目

标单元格总成本(J17)代表了最优方案的总成本:每小时 31 美元。

## 例子 2:指派工厂生产产品

现在我们再来看一下 6.3 节所讲到的例子。在这个例子中,求佳产品公司需要安排三个工厂来生产四种新产品。相关的数据在表 6.6 中已经给出。

如同在 6.3 节中所讲到的一样,管理人员允许进行产品生产分解(一种产品可以在多于一个工厂之中生产)。但是,这将产生与产品生产分解相关的隐性成本;这一点在表 6.6 中不能体现出来。隐性成本包括了额外的设置、配送和管理成本。因此,现在管理人员决定在禁止产品生产分解发生的情况下对问题进行分析。

**新问题的陈述:**已知如表 6.6 所示的数据,使把每一个工厂指派给至少一个新的产品(每一种产品只能在一个工厂里生产)的总成本达到最小。由于我们有四种产品和三个工厂,所以就有两个工厂各只能生产一种新的产品,第三个工厂生产两种产品。只有工厂 1 和工厂 2 拥有生产两种产品的能力。

**电子表格模型的描述**

> 现在基本上是一个指派问题,工厂要被指派给产品,每种产品由一家工厂生产。

由于我们想要指派工厂生产产品,所以这些工厂可以看作是被指派者,产品则可以看作是在这个指派问题变形中需要完成的任务。图 6.21 显示了由此得到的电子表格模型。

从表 6.6 得到的数据位于图的上方。但是单元格 C4:F6 给出的单位成本并不是指派问题变形的成本表。为了得到一个合适的成本表,我们必须要确定与指定一个工厂生产一种产品的所有所需产量相关的成本。在第 4 行到第 6 行得到的相关单位成本只是生产每一个单位产品的成本,而不是在 8 行中给出的生产全部所需产量的成本。因此,我们必须用单位成本乘以全部所需产量得到指派的总成本(每天)。例如,我们来讨论一下指定工厂 1 生产产品 1 的情况。

| | |
|---|---|
| 工厂 1 生产单位产品 1 的成本 | =41 美元 |
| 每天需要完成产品 1 的生产量 | =20 单位 |
| 指定工厂 1 生产产品 1 的总成本 | =20( 41 美元) |
| | =820 美元 |

按照这种计算的方法(见图底部的等式),单元格成本(C12:F14)给出了对于每一种指定工厂生产产品的组合的总指派成本(每天)。

由于工厂 2 不能生产产品 3,所以在 Solver 对话框中包含这样的约束:E20 =0。由于要在工厂 1 和工厂 2 中选择一个(但不是同时选中)生产第二种产品,所以在单元格 I19:I20 中给出了供应量为 2。在相关的供应量约束中我们使用了"≤"来表示:G19:G20≤I19:I20。而工厂 3 的供应量约束和需求量约束是普通的指派问题约束。

在按下 Solver 按键之后,就会在可变单元格任务分配(C19:F21)中得到最优的解决方案,即工厂 1 生产产品 2 和产品 3,工厂 2 生产产品 1,工厂 3 生产产品 4。目标单元格总成本(I24)给出了这个生产计划每天的总成本 3290 美元。

把这个结果与图 6.4 允许产品生产分解时的单元格日产量(C11:F13)中给出的结果相比较是很有意义的。我们注意到在图 6.4 中为工厂 2 和工厂 3 所进行的指派和在这里所进行的指派是不相同的。在那个生产计划中所得到的总生产成本是每天 3260 美元,比在图 6.21 中所得到的计划要少花费 30 美元。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Better Products Co. Production Planning Problem (Revised)** | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | **Unit Cost** | Product 1 | Product 2 | Product 3 | Product 4 | | | |
| 4 | | Plant 1 | $41 | $27 | $28 | $24 | | | |
| 5 | | Plant 2 | $40 | $29 | – | $23 | | | |
| 6 | | Plant 3 | $37 | $30 | $27 | $21 | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | Required Production | 20 | 30 | 30 | 40 | | | |
| 9 | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | | **Cost ($/day)** | Product 1 | Product 2 | Product 3 | Product 4 | | | |
| 12 | | Plant 1 | $820 | $810 | $840 | $960 | | | |
| 13 | | Plant 2 | $800 | $870 | – | $920 | | | |
| 14 | | Plant 3 | $740 | $900 | $810 | $840 | | | |
| 15 | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | Total | | |
| 18 | | **Assignment** | Product 1 | Product 2 | Product 3 | Product 4 | Assignments | | Supply |
| 19 | | Plant 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 2 |
| 20 | | Plant 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | ≤ | 2 |
| 21 | | Plant 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | = | 1 |
| 22 | | Total Assigned | 1 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 23 | | | = | = | = | = | | | Total Cost |
| 24 | | Demand | 1 | 1 | 1 | 1 | | | $3,290 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalCost

Equal To: ○ Max ● Min ○

By Changing Cells:

Assignment

Subject to the Constraints:

$E$20 = 0
$G$19:$G$20 <= $I$19:$I$20
$G$21 = $I$21
TotalAssigned = Demand

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | **Cost ($/day)** | Product 1 | Product 2 | Product 3 | Product 3 |
| 12 | Plant 1 | =C4*C$8 | =D4*D$8 | =E4*E$8 | =F4*F$8 |
| 13 | Plant 2 | =C5*C$8 | =D5*D$8 | – | =F5*F$8 |
| 14 | Plant 3 | =C6*C$8 | =D6*D$8 | =E6*E$8 | =F6*F$8 |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| Assignment | C19:F21 |
| Cost | C12:F14 |
| Demand | C24:F24 |
| RequiredProduction | C8:F8 |
| Supply | I19:I21 |
| TotalAssigned | C22:F22 |
| TotalAssignments | G19:G21 |
| TotalCost | I24 |
| UnitCost | C4:F6 |

| | G |
|---|---|
| 17 | Total |
| 18 | Assignments |
| 19 | =SUM(C19:F19) |
| 20 | =SUM(C20:F20) |
| 21 | =SUM(C21:F21) |

| | I |
|---|---|
| 23 | Total Cost |
| 24 | =SUMPRODUCT(Cost,Assignment) |

| | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 22 | Total Assigned | =SUM(C19:C21) | =SUM(D19:D21) | =SUM(E19:E21) | =SUM(F19:F21) |

**图 6.21** 与图 6.4 对比，产品不允许分开，因此求佳产品公司问题作为一个指派问题变形的电子表格模型描述。目标单元格是总成本（I24），其他输出单元格是成本（C12:F14）、总分配任务（G19:G21）和总分配（C22:F22），这些单元格的公式在表格的底部显示。可变单元格任务分配（C19:F21）中的值 1 给出了通过 Solver 得到的解决问题的最优方案。

但是，把这个最初的问题（允许产品生产分解）作为运输问题的变形进行描述时并没有考虑产品生产分解的隐性成本（额外的设置、配送和行政管理成本），这些成本显然远大于每天 30 美元。因此，管理人员采用了基于这种新的描述的生产计划（不允许产品生产分解）作为指派问题的变形。

## 例子 3:设计学生入学区域

现在我们又要回到前面 6.4 节讲到的米德尔城学区管理人员在设计学区时所遇到的问题。表 6.12 给出了这个问题的数据,图 6.8 给出了作为一个运输问题变形进行描述的过程。

从这个描述过程得到的最优解决方案中有两个问题引起了管理层的关注。一个是把区域 5 分给了两个学校(学校 1 和学校 2)。每个区域与其他几个区域相邻。这些区域总是拥有优先进入同一所中学的权利。学区主管和学校董事会一致同意在指派学校给区域时保持每一个区域(包括区域 5)不被分割会比较好。第二个问题是这个结果指派了最少量的学生(1200 人)给拥有最大容量的学校(学校可以容纳 1800 名学生)。虽然这个数字基本上是可以接受的(学校董事会把指派给学校 1 的最少学生数量定在了 1200 人),但是向这个学校指派更多的学生会更受欢迎。

因此学区管理层决定禁止将一个区域分割给两个学校。另外,为了使学生在学校间的分布相对均衡,管理层还要求向每一所学校指派三个区域。

**新问题的陈述:**已知如表 6.12 所示的数据,当每一个区域都完全指派给一所学校(没有区域分割)且每一所学校都被指派了三个区域之后,所有的学生到达学校的总路程最小。

### 电子表格模型的描述

> 现在基本是一个指派问题,因为一个区域必须被指派一个学校。区别是要为每一所学校指派三个区域。

由于是把区域指派给学校,所以这个问题可以看作是一个指派问题的变形,其中区域代表了被指派者,学校就是任务。它仅仅是一个变形,因为要为每一所学校指派三个区域。而指派问题模型的假设 3 规定了每一项任务只能指派给一个被指派者。因此,图 6.22 的电子表格模型中,每一项任务的需求量是 3 而不是 1。否则的话,这个模型的约束就和指派问题一样了。

指派问题的目标是要使所有作出的指派的成本最小。但是现在成本被学生所走的总路程所代替了。因此,指派任何一个区域给一个特定学校的成本就是在这个区域内的学生的数量乘以平均每一个学生到学校的距离,这两个数字在图 6.22 单元格(C5:E13)中给出。为了举例,我们现在来考虑一下把区域 1 指派给学校 1 的成本。

| | |
|---|---|
| 从区域 1 到学校 1 的距离 | =2.2 英里 |
| 区域 1 中的学生数量 | =500 |
| 把区域 1 指派给学校 1 的成本 | =500(2.2 英里) |
| | =1100 英里 |

最上面右边的表格成本(I5:K13)根据其中的公式显示了使用这种方法计算出来的每一个被指派者和任务组合的成本。

可变单元格任务分派(C18:E26)显示了把区域指派给学校的最优解决方案。就像在目标单元格总距离(H30)之中所表明的一样,学生所走的总路程为 3560 英里。平均每一个学生为 0.879 英里。

如果允许对一个区域进行分割的话,这个方案就和 6.4 节所讲到的非常类似了(见图 6.8)。惟一的区别就是前面的一个方案把区域 5 分成了两个部分,其中 150 个学生指派给

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Middletown School District Zoning Problem (Revised) | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | **Distance** | | | | Number of | | **Cost** | | | |
| 4 | | **(Miles)** | School 1 | School 2 | School 3 | Students | | **(Miles)** | School 1 | School 2 | School 3 |
| 5 | | Tract 1 | 2.2 | 1.9 | 2.5 | 500 | | Tract 1 | 1,100 | 950 | 1,250 |
| 6 | | Tract 2 | 1.4 | 1.3 | 1.7 | 400 | | Tract 2 | 560 | 520 | 680 |
| 7 | | Tract 3 | 0.5 | 1.8 | 1.1 | 450 | | Tract 3 | 225 | 810 | 495 |
| 8 | | Tract 4 | 1.2 | 0.3 | 2 | 400 | | Tract 4 | 480 | 120 | 800 |
| 9 | | Tract 5 | 0.9 | 0.7 | 1 | 500 | | Tract 5 | 450 | 350 | 500 |
| 10 | | Tract 6 | 1.1 | 1.6 | 0.6 | 450 | | Tract 6 | 495 | 720 | 270 |
| 11 | | Tract 7 | 2.7 | 0.7 | 1.5 | 450 | | Tract 7 | 1,215 | 315 | 675 |
| 12 | | Tract 8 | 1.8 | 1.2 | 0.8 | 400 | | Tract 8 | 720 | 480 | 320 |
| 13 | | Tract 9 | 1.5 | 1.7 | 0.7 | 500 | | Tract 9 | 750 | 850 | 350 |
| 14 | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | Total | | | | | |
| 17 | | **Assignment** | School 1 | School 2 | School 3 | Assignments | | Supply | | | |
| 18 | | Tract 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | = | 1 | | | |
| 19 | | Tract 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | = | 1 | | | |
| 20 | | Tract 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | = | 1 | | | |
| 21 | | Tract 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | = | 1 | | | |
| 22 | | Tract 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | = | 1 | | | |
| 23 | | Tract 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | = | 1 | | | |
| 24 | | Tract 7 | 0 | 1 | 0 | 1 | = | 1 | | | |
| 25 | | Tract 8 | 0 | 0 | 1 | 1 | = | 1 | | | |
| 26 | | Tract 9 | 0 | 0 | 1 | 1 | = | 1 | | | |
| 27 | | Total Assigned | 3 | 3 | 3 | | | | | | |
| 28 | | | = | = | = | | | Total Distance | | | |
| 29 | | Demand | 3 | 3 | 3 | | | (Miles) | | | |
| 30 | | | | | | | | 3,560 | | | |

**图 6.22** 与图 6.8 相比较,这里不允许区域分割了。于是米德尔城学区问题就变成了一个指派问题的变形。目标单元格是总距离(H30),其他输出单元格是总分派任务(F18:F26)、总分配(C27:E27)和成本(单位英里)(I5:K13),这些单元格中的公式在表格后面显示。通过 Solver 得到的最优区域划分方案如可变单元格任务分派(C18:E26)中的值 1 所示。

了学校 2 而不是学校 1。这样可以把这 150 个学生的平均路程从 0.9 英里降到 0.7 英里。然而,学校的管理层觉得这些学生所走路程的很小的缩短并不能证明把他们从这个区域中分割出去是合理的。于是,管理层采用了新的方案。

如同这个例子以及前面的一个例子所阐述的,管理层经常需要对问题的原始模型进行修改来更好地考虑管理上的问题。

## 问题回顾

1. 当对某些被指派者不能执行某些任务的指派问题变形的电子表格模型进行规划时,模型如何体现这个特征?
2. 如果一个被指派者要执行多于一个任务,模型如何体现这个特征?
3. 如果一项任务需要多于一个被指派者执行,模型如何体现这个特征?

## 6.8　本章小结

运输问题和指派问题(以及它们的变形)都是特殊类型的线性规划问题,这些线性规划问题具有许多很重要的应用。

运输问题考虑从出发地运送货物到目的地。每一个出发地都有一个固定的供应量,每一个目的地都有一个固定的需求量。其中一个基本的假设就是从每一个出发地到每一个目的地的运送成本和运送的数量成正比。描述一个运输问题要求建立一个包含这个问题中运输的单位成本、供应量、需求量的参数表。

如果给定了一系列需要执行的任务以及执行这些任务的被指派者(每一项任务指派给一个被指派者),指派问题就要处理应当将哪一项任务指派给哪一个被指派者,才能使完成这些任务的总成本达到最小。这些被指派者可能是人员、机器、车辆、工厂等。所以在实际中这个问题有着许多的应用。对这个问题进行描述需要建立一个包含把任务指派给被指派者的每一种可能指派成本的成本表。

但是在实际应用中,有许多的特征并不完全符合运输问题或指派问题模型,但用电子表格模型可以得到很好的描述。

这一章最重要的目标是当你作为一个未来的管理人员时,你能够把你可能会面临的问题描述为一个运输问题或者指派问题或者它们的变形并进行分析。

## 专业术语

**被指派者**(Assignees):当把一个问题规划成为一个指派问题时,执行任务的实体(人员、机器、车辆、工厂等等)。(6.6 节)

**成本表**(Cost table):一个可以概括指派问题描述的表格,表中包含了把每一项任务指派给每一个被指派者的成本。(6.6 节)

**目的地的需求量**(Demand at a destination):目的地从出发地接受到的单位数。(6.2 节)

**目的地**(Destination):运输问题的接收中心。(6.2 节)

**匈牙利方法**(Hungarian method):为解决指派问题而专门设计的一种算法。(6.6 节)

**网络单纯形法**(Network simplex method):单纯形法的简化版本,用来有效地解决网络配送问题,包括运输问题和指派问题。(6.2 节)

**出发地**(Sources):运输问题中的供应中心。(6.2 节)

**出发地的供应量**(Supply from a source):从这个出发地配送给目的地的单位数。(6.2 节)

**任务**(Tasks):当一个问题描述为指派问题时,被指派者所需要完成的工作。(6.6 节)

**运输单纯形法**(Transportation simplex method ):单纯形法的简化版本,用来有效地解决运输问题。(6.2 节)

## 本章管理科学课件的学习辅助

**"Ch. 6—运输问题和指派问题"Excel 文件:**

P&T 案例分析
求佳产品公司例子
耐芙迪例子
米德罗水管站例子
北方飞机公司例子
米德尔城例子
源丰公司例子(6 个电子表格)
特塞格公司例子
塞尔默公司例子
娇普肖普公司例子
修正后的求佳产品公司例子
修正后的米德尔城例子

**Excel 加载宏:**

Premium Solver

# 习　题

当必须要使用 Excel 文件时，我们在问题的左边插入一个 E*作为标识（除非你的指导老师给了你一个完全相反的指示）。在问题序号上的星号就代表着这个问题至少有一部分的答案已经在本书后面给出。

6.1. 研究分析一下拥有如下所示参数表的运输问题：

| 目的地 | 单位成本（美元） | | | 供 应 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 出发地 | | | | |
| 1 | 9 | 6 | 8 | 4 |
| 2 | 7 | 12 | 10 | 3 |
| 3 | 6 | 7 | 6 | 2 |
| 需　求 | 4 | 2 | 3 | |

a. 画出这个问题的网络表示图。

E* b. 用电子表格描述这个问题，然后使用 Excel Solver 得到最优解决方案。

6.2. 考虑拥有如下所示参数表的运输问题：

| 目的地 | 单位成本（美元） | | | | 供 应 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 出发地 | | | | | |
| 1 | 3 | 7 | 6 | 4 | 5 |
| 2 | 2 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 8 | 5 | 3 |
| 需　求 | 3 | 3 | 2 | 2 | |

a. 画出这个问题的网络表示图。

E* b. 用电子表格描述这个问题，然后使用 Excel Solver 得到最优解决方案。

6.3. 考斯雷司（Cost-Less）公司从它的工厂向它的四个零售点供应货物，从每一个工厂到每一个零售点的运输成本如下所示：

| 零售点 | 单位成本（美元） | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 工厂 | | | | |
| 1 | 500 | 600 | 400 | 200 |
| 2 | 200 | 900 | 100 | 300 |
| 3 | 300 | 400 | 200 | 100 |
| 4 | 200 | 100 | 300 | 200 |

工厂 1、2、3、4 每个月的生产量为 10、20、20、10 个运输单位。零售点 1、2、3、4 每个月所需货物量为 20、10、10、20 个运输单位。

配送经理兰迪・史密斯现在需要确定每个月从每一个工厂之中要运送多少给相应零售点的最佳方案。兰迪的目标就是要使总的运输成本最小。

a. 把这个问题描述为一个运输问题并写出相应的出发地、供应量、目的地、需求量和单位成本。

E* b. 用电子表格描述这个问题，然后使用 Excel Solver 得到最优解决方案。

6.4. 洽德费尔（Childfair）公司拥有三个生产折叠婴儿车的工厂，并运往四个配送中心。工厂 1、2 和 3 每月产量为 12、17、11 个运输单位。同时配送中心每月需要 10 个运输单位的货物。从每一个工厂到每一个配送中心的路程如下表所示：

| | 到配送中心的距离（英里） | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 工厂 | | | | |
| 1 | 800 | 1300 | 400 | 700 |
| 2 | 1100 | 1400 | 600 | 1000 |
| 3 | 600 | 1200 | 800 | 900 |

每一个运输单位的运输成本为每英里 100.5 美元。

a. 把这个问题描述为一个运输问题并写出相应的出发地、供应量、目的地、需求量和单位成本。

E* b. 用电子表格描述这个问题，并使用 Excel Solver 得到最优解决方案。

E* 6.5.* 汤姆想要在今天买 3 品脱的家酿酒，明天买另外的 4 品脱。迪克想要销售 5 品脱的家酿酒，今天的价钱为每品脱 3.00 美元，而明天的价钱是每品脱 2.70 美元。哈里想要销售 4 品脱的家酿酒，今天的价钱为每品脱 2.90 美元，而明天的价钱为每品脱 2.80 美元。

汤姆想要知道他要如何进行购买才

能在满足他的口渴需求的基础之上，使他的购买成本达到最小值。为这个问题建立电子表格模型并解决它。

E* 6.6.* 沃斯泰克公司(Versatech)决定要生产三种新的产品。现在公司所属的五个工厂拥有生产余力来进行新产品的生产。在工厂 1、2、3、4、5 中第一种产品的单位生产成本分别为 31 美元、29 美元、32 美元、28 美元和 29 美元。第二种产品的单位生产成本为 45 美元、41 美元、46 美元、42 美元和 43 美元。第三种产品只能在工厂 1、2、3 中进行生产，工厂 4 和 5 没有生产这种产品的能力。第三种产品在工厂 1、2、3 中的单位生产成本为 38 美元、35 美元、40 美元。销售预测表明产品 1、2、3 每天必须分别生产 600、100、800 个单位。不管是单一产品还是产品组合，工厂 1、2、3、4、5 每天的产量为 400、600、400、600、1000 单位。假设拥有生产这些新产品能力的工厂可以在生产能力范围内生产任何数量任何组合的产品。管理人员希望知道怎样安排这些新产品的生产才能使总生产成本最小。对这个问题进行描述并求解。

E* 6.7. 假设英国、法国和西班牙生产了世界上所有的小麦、大麦和燕麦。世界上对小麦的需求要求种植 1.25 亿英亩的小麦。同样，需要种植 6000 万英亩的大麦和 7500 万英亩的燕麦。在英国、法国和西班牙这三个国家中能够用来耕种的土地分别为 7000 万英亩、1.1 亿英亩、8000 万英亩。在这三个国家种植一英亩小麦所需要的劳动时间分别为 18 小时、13 小时和 16 小时，种植一英亩大麦所需要的劳动时间分别为 15 小时、12 小时和 12 小时，种植一英亩的燕麦所需要的劳动时间分别为 12 小时、10 小时和 16 小时。在这三个国家中，种植小麦的每小时劳动成本为 9.00 美元、7.20 美元、9.90 美元；种植大麦的每小时劳动成本为 8.10 美元、9.00 美元、8.40 美元；种植燕麦的每小时劳动成本为 6.90 美元，7.50 美元，6.30 美元。需要解决的问题是确定如何对这三个国家的土地进行分配，种植不同的农作物来满足整个世界的需求，并使总劳动成本最小。对这个问题进行描述并求解。

E* 6.8. 承包商苏珊·美格想要向三个建筑工地运送沙土。她可以在城市北面的沙土矿中购买 18 吨的沙土，在城市南面的沙土矿中购买 14 吨的沙土。建筑工地 1、2、3 需要的沙土量分别为 10 吨、5 吨和 10 吨。在每一个沙土矿购买一吨沙土的成本以及每一吨的运输成本如下所示：

| 矿 | 到每一个工地的运输成本(美元) | | | 每吨价钱 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 南面 | 30 | 60 | 50 | 100 |
| 北面 | 60 | 30 | 40 | 120 |

苏珊想要确定应该从每一个沙土矿运输多少沙土到每一个工地，才能使购买和运输成本达到最低。对这个问题进行描述并求解。

E*6.9. 现在我们重新研究一下 6.1 节和 6.2 节中所讲到的 P&T 公司案例，并参照图 6.2 中所示的电子表格(在这个图中已经把这个问题描述成为一个运输问题，并显示了最优的解决方案)。现在你被告知表中的单位成本(D5:G7)有一些在运输开始之前发生了很微小的变化。

使用 Excel Solver 得到一个这个问题的灵敏度报告。使用这个报告为每一个单位成本确定在这个最优解下变动的范围。这些变动范围对管理人员有什么启示？

E* 6.10. 现在我们重新研究一下 6.4 节中所讲到的米德罗水管站问题，并参照图 6.6 中的电子表格(在这个表格中已经把这个问题规划成为了运输问题的变形并提供了最优的解决方案)。但是在参数表中给出的数字都只是估计出来的，并不准确。所以管理人员希望进行假设分析。使用 Excel Solver 生成一个灵敏度报告，并使用这个报告来回答下面的问题(在所有情况下，我们都假设所提到的变化都只是模型上的变化)。

a. 如果从卡路里河配送单位立方英尺的水给圣哥的单位成本是 200 美元而不是 230 美元，那么图 6.6 中的最优的解决方案是否仍然最优？

b. 如果从塞克隆河配送单位立方英尺的水给劳斯戴维斯的单位成本是 160 美元而不是 130 美元的话，那么图 6.6 中

的最优的解决方案是否仍然最优?

c. 如果前面两个问题中的数值分别变为215和145,所得到的最优解决方案是否仍然最优?

d. 假设从塞克隆河得到的供应量和豪利格拉斯的需求量同时减少相同的数量,如果这个减少量为50万立方英尺的话,评估这些变化的影子价格是否仍然有效?

E* 6.11. 重新研究一下6.4节中所讲到的米德罗水管站问题,并参看表6.9中的数据。在表中代表每一个城市所需水量的数据都只是每一个城市所需水量的最小值,而不是准确的数据。每一个城市实际上还需要200万立方英尺的水量。

由于所需水量要比这些最小值的和多350万立方英尺,米德罗水管站的管理层决定要向这些城市供应这些不足的水量。但是确定每一个城市所需额外水量的决策要建立在使总成本最小的基础之上。管理人员想要知道哪一个方案可以实现这一目标。对这个问题进行描述并求解。

E* 6.12. 万诺特(Onenote)公司为四个顾客在三个工厂生产一种产品。在未来一周内这三个工厂的产量为60、80、40单位。公司决定向顾客1供应40个单位,向顾客2供应60个单位,向顾客3至少要供应20个单位。顾客3和顾客4都想要尽可能多地购买剩下的产品。从工厂$i$运送单位数量的产品给顾客$j$的净利润如下表所示(单位:美元):

| | 顾客 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 工厂 | | | | |
| 1 | 800 | 700 | 500 | 200 |
| 2 | 500 | 200 | 100 | 300 |
| 3 | 600 | 400 | 300 | 500 |

管理层希望知道为了使利润最大,应当向顾客3和4提供多少单位的产品以及应当从每一个工厂向每一个顾客运送多少单位的产品。用电子表格模型描述这个问题并求解。

E* 6.13. 姆未特(Move-it)公司拥有两个生产叉车的工厂,并把叉车运送到三个配送中心。这两个工厂的生产成本是相同的。把叉车从每一个工厂运送到每一个配送中心的单位成本如下所示(单位:美元):

| | 配送中心 | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 工厂 | | | |
| A | 800 | 700 | 400 |
| B | 600 | 800 | 500 |

每周两个工厂要生产总共60辆叉车,并把他们运送到配送中心去。每一个工厂每星期最多可以生产并运输50辆叉车,所以在决定每一个工厂生产多少叉车的问题上具有很大的灵活性。我们的目标是要减少运输叉车的成本。然而,每一个配送中心每一周都必须要接受到20辆叉车。

管理人员的目标是要确定每一个工厂生产多少叉车并制定运输方案,使得总运输成本最小。对这个问题进行描述并求解。

E* 6.14. 重新考虑习题6.13。如果每一个配送中心都拥有每周接收10到30辆叉车的能力,在运送到这三个配送中心的叉车总数仍然是60辆的条件下,继续减少总运输成本。

E* 6.15. 速制(Build-Em-Fast)公司在未来三周内每周都要向它最好的顾客提供三个小器具,即使有时候制作这些器具需要进行加班。相关的生产数据如下所示:

| 周 | 最大的生产能力 | | 正常时间单位制作成本(美元) |
|---|---|---|---|
| | 正常时间 | 加班时间 | |
| 1 | 2 | 2 | 300 |
| 2 | 3 | 2 | 500 |
| 3 | 1 | 2 | 400 |

每一周加班时间的单位生产成本比正常时间多100美元。存储成本是每周每个50美元。现在已经有两个器具的存货,但是公司不想在三周后还有存货。

管理人员想知道每一周需要制作多少个器具才能使总成本最小。对这个问题进行描述并求解。

E* 6.16. MJK制造公司在接下来的三周内每周都要按照销售合同制造出两个质量优良的产品。这两个产品使用相同的设备并需要投入相同的生产能力。每个月可供使

用的生产和存储设备都会发生变化。所以生产能力、单位生产成本以及单位存储成本每个月都不相同,很有必要在某些月中多生产一种或者多种产品并存储起来以备需要的时候使用。

对于每一个月来说,下表前几列中给出了在正常时间(RT)和加班时间(OT)内能够生产这两种产品的总数。对于每一种产品来说,在后面的几栏中给出了:(1)按照合同需要生产的数量;(2)在正常时间内的单位成本;(3)在加班时间内的单位成本;(4)把额外的产品储存到下一个月的储存成本。这两种产品的数量用"/"区分开来,产品 1 在"/"的左边而产品 2 在"/"的右边。

| 月 | 最大的生产总量 | | 产品 1/产品 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 销售 | 单位生产成本(千美元) | | 单位储存成本(千美元) |
| | RT | OT | | RT | OT | |
| 1 | 10 | 3 | 5/3 | 15/16 | 18/20 | 1/2 |
| 2 | 8 | 2 | 3/5 | 17/15 | 20/18 | 2/1 |
| 3 | 10 | 3 | 4/4 | 19/17 | 22/22 | |

生产管理人员想要开发一个在正常时间(如果正常时间不够的话,就使用加班时间)内生产每一种产品数量的计划进度。目标是在满足合同规定的基础上,每月总生产和储存成本的最小。开始并没有库存,而且在三个月结束后也不想有最终的存储。

对这个问题进行描述并求解。

6.17. 研究一下拥有如下表所示参数表的运输问题。

| 目的地 | 单位成本(美元) | | | | 供应 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 出发地 | | | | | |
| 1 | 7 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| 2 | 4 | 6 | 7 | 2 | 1 |
| 3 | 8 | 5 | 4 | 6 | 1 |
| 4 | 6 | 7 | 6 | 3 | 1 |
| 需求 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

a. 什么性质保证了这个问题肯定有可行解?

b. 什么性质保证了这个问题对于所有的运输数量拥有数值为 0 或 1 的最优解?

c. 请解释为什么这个问题可以理解为一个指派问题。

d. 画出这个问题的网络表示图。

E* e. 用电子表格展示这个问题,并使用 Excel Solver 求出最优解。

6.18. 考虑拥有如下所示成本表的指派问题(单位:美元):

| | 工作 | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 人员 | | | |
| A | 5 | 7 | 4 |
| B | 3 | 6 | 5 |
| C | 2 | 3 | 4 |

最优解是 A－3,B－1,C－2,总的成本是 10 美元。

a. 画出这个问题的网络表示图。

E* b. 在电子表格上对这个问题进行描述,并使用 Excel Solver 得到最优解。

6.19. 考虑拥有如下所示的成本表的指派问题(单位:美元):

| | 工作 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 被指派者 | | | | |
| A | 8 | 6 | 5 | 7 |
| B | 6 | 5 | 3 | 4 |
| C | 7 | 8 | 4 | 6 |
| D | 6 | 7 | 5 | 6 |

a. 画出这个问题的网络表示图。

E* b. 在电子表格上对这个问题进行描述,并使用 Excel Solver 得到最优解。

6.20. 四艘货船要从一个码头向其他的四个码头运货(分别标记为 1、2、3、4)。每一艘船都能够运送到任何一个码头。但是,由于货船和货物的不同,装船、运输和卸货成本都有些不同。如下表所示(单位:美元):

| | 码头 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 货船 | | | | |
| A | 500 | 400 | 600 | 700 |
| B | 600 | 600 | 700 | 500 |
| C | 700 | 500 | 700 | 600 |
| D | 500 | 400 | 600 | 600 |

目标是要把这这四个不同的码头指派给

四艘货船，使总运输成本最小。

a. 请解释为什么这个问题符合指派问题模型。

E* b. 在电子表格中描述这个问题并求解。

E* 6.21. 让我们重新考虑习题6.6。假设销售预测下降为产品1、2、3每天需要240、400、320个单位。于是，所有的工厂都有能力生产任何一种产品所需数量。因此，管理人员决定每一种产品只由一个工厂来生产，一个工厂不能生产多于一种的产品（所以三种产品被指派给了三个工厂，有两个工厂什么都不生产）。目标是使生产这些数量产品的总成本最小。对这个问题进行描述并求解。

6.22* 老年游泳组的教练需要指派运动员组成200码接力小组以参加奥林匹克预赛。由于他的大部分运动员速度都很快，所以他很难确定哪一个运动员来游哪一个游程。五个最好的运动员以及他们在一个游程（50码）所取得的最好的成绩（单位：秒）如下表所示：

| 游程 | 卡尔 | 柯里斯 | 戴维 | 托尼 | 凯恩 |
|---|---|---|---|---|---|
| 仰泳 | 37.7 | 32.9 | 33.8 | 37.0 | 35.4 |
| 蛙泳 | 43.4 | 33.1 | 42.2 | 34.7 | 41.8 |
| 蝶泳 | 33.3 | 28.5 | 38.9 | 30.4 | 33.6 |
| 自由泳 | 29.2 | 26.4 | 29.6 | 28.5 | 31.1 |

教练想要确定出如何把这四个游程指派给这些运动员，使所用的时间之和最小。

a. 请解释为什么这个问题不包含成本但仍可以描述为一个指派问题的变形，是什么取代了成本？

E* b. 用电子表格模型描述这个问题并求解。

E* 6.23. 重新考虑习题6.8。现在假设需要雇用卡车（以及它们的司机）来运输沙土，但是每一辆卡车都只能在从矿到工地这一过程中使用一次。假设拥有足够的卡车可以把在矿上购买的沙土都运送到每一个工地上。每一辆卡车能运送5吨，成本是前面所讲到的每吨成本的5倍。而且，每一辆运送沙土的卡车都要装满。

用电子表格模型描述这个问题并求解。

E* 6.24. 重新考虑习题6.13。现在配送中心1、2、3每周需要接收的货物分别为10、20和30个单位。为了管理方便，管理人员决定一个配送中心完全由一个工厂供应。于是一个工厂供应一个配送中心，另外的一个工厂供应其他两个配送中心。将配送中心指派给工厂的选择要以总成本最小为基础。

用电子表格模型描述这个问题并求解。

# 案例6.1　向市场运送木材

阿拉巴马大西洋公司（Alabama Atlantic）是一个拥有3个木材资源区和5个需要供应的市场的木材公司。木材资源区1、2、3每年所能够生产的木材量分别为1500万、2000万、1500万板英尺（board feet）。每年市场1、2、3、4、5能够销售的木材量分别为1100万、1200万、900万、1000万、800万板英尺。

过去，这个公司通过火车来运输木材。然而，由于使用火车的运输成本已经上升了，所以可以考虑使用水运的方式来运输其中的一部分木材。但是这种方式却需要公司要在水运方面进行投资。除了这些投资成本之外，使用火车运输木材的成本（单位：千美元每板英尺），沿着每一条路线使用轮船来运输木材（如果这个方式可行的话）的成本如下所示：

| 源 | 使用火车运输的单位成本（千美元） | | | | | 使用轮船运输的单位成本（千美元） | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 61 | 72 | 45 | 55 | 66 | 31 | 38 | 24 | — | 35 |
| 2 | 69 | 78 | 60 | 49 | 56 | 36 | 43 | 28 | 24 | 31 |
| 3 | 59 | 66 | 63 | 61 | 47 | — | 33 | 36 | 32 | 26 |

沿着每一条路线用轮船每年运输每 100 万板英尺木材需要对轮船进行的资金投入(单位:千美元)如下所示:

| 出发地 | 对于向市场运输木材的轮船的单位资金投入 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 275 | 303 | 238 | — | 285 |
| 2 | 293 | 318 | 270 | 250 | 265 |
| 3 | — | 283 | 275 | 268 | 240 |

考虑到轮船的预计使用期限和货币的时间价值,年成本大约就是表中所列出数值的 1/10。公司的目标是要制定出一个全面运输计划,使总年成本最小(包括运输成本)。

现在,如果你是公司管理科学小组的负责人。那么所需要做的工作是根据下面所给出的三种选择分别制定出能够使得年成本最小的运输计划。

选择 1:继续使用火车来运输木材,并仅使用这一种方式。

选择 2:仅使用轮船运输木材(只能使用火车的地方除外)。

选择 3:根据在每一条特定的路线上哪种方式的运输成本比较低来选择使用火车还是轮船运输木材。

找出在每一种情况下你的答案,并比较一下。

最后,我们应该注意到我们所计算出的结果是建立在当前的运输和投资成本基础之上的,所以我们应该在仔细研究每一种情况的时候,认真考虑一下这些成本将来可能发生的变化。对于每一种情况来说,我们必须要描述出未来这些成本的变化情况,这样就可以知道我们现在所作出的决定是否正确。

## 案例 6.2 特塞格案例的继续研究

重新考虑 6.5 节的特塞格公司的选址问题。

特塞格管理者最终选择圣路易斯作为新炼油厂的地址。但是,现在管理者需要面对新炼油厂的生产能力应怎样的问题。

当分析选址问题时,假设炼油厂的生产能力为每年加工 1.2 亿桶原油。如表 6.16 所示,这会使整个公司的生产能力从原来的 2.4 亿桶增加到 3.6 亿桶。根据市场预测,特塞格在建立了新炼油厂后,能正好售出所有产成品,但不能再多了。所以,选择 1.2 亿桶原油作为新炼油厂的生产能力使公司正好能用上所有生产能力,同时又满足了预测的市场需求。

但是,为了准备面对可能的市场需求的增长,管理者现在希望扩大炼油厂生产能力,增加到每年 1.5 亿桶。虽然这会使特塞格公司暂时有 3000 万桶的剩余生产能力闲置,但是当以后公司市场份额增加时,就有可用的生产能力。这样做的价值在于扩大新炼油厂的计划所耗费的资金和运营成本远小于以后重新建造一个年产量为 3000 万桶的炼油厂的成本(大约节省 40%)。另外,管理者认为,这种生产能力将会在几年内需要被用到。

炼油厂增加 3000 万桶生产能力的额外资金大约为 12 亿美元。根据预期利率,这一额外资金的每年成本为 1 亿美元。如果新炼油厂增加的生产能力一部分被使用的话,炼油厂的总运营成本可能会稍大于表 6.19 中的数值。但是减少其他炼油厂的生产率能够减少总运营成本同样的量。因为每提炼百万桶原油的运营成本在所有的炼油厂中基本一致,包括新厂,所以生产 3.6 亿桶原油的总运营成本不管炼油厂的选址在何处都是基本一样的。但是,管理者认为这项工程的选址问题会潜在减少运输原油和石油产成品的运输费用。因为表 6.20 显示如果选择圣路易斯作为炼油厂地址的话,原油和石油产成品的年总运输成本为 23.9 亿美元,管理者希望通过这种方法能得到潜在减少。

图 6.13 和图 6.17 分别显示了在选择圣路易斯作为新炼油厂地址并加工 1.2 亿桶的原油情况下,运输原油和石油产成品的最优运输计划。现在管理者要知道加工 1.5 亿桶的原油时的情况。管理者特别希望解决下列问题。在新情况下,在图 6.13 中的原油运输计划该如何改变,共可减少多少运输总成本?在图 6.17 中的石油产成品运输计划该如何改变,共可减少多少运输总成本?最后,假设表 6.19

中的运营成本的差别继续适用于新情况，那么表6.20中的三个地方选址的财务比较会不会改变。

作为任务组的领导，你准备从以下几个步骤分析问题。

a. 建立并求解电子表格模型，来找到最优的运输计划。将3.6亿桶原油从产油地运往炼油厂，包括在圣路易斯新建的炼油厂，每家炼油厂收到的原油数在不超过其生产能力的基础上，使运输成本最小化(提示：你可以通过使用在这一章Excel文件中现有的特塞格的电子表格模型来节省一些时间)。比较最后得到的结果，年运输成本与在图6.13中显示的原先建造小规模炼油厂的结果有什么不一样。

b. 假设a中求出的计划将被采用(包括每家炼油厂会收到的原油数)。在此基础上，建立并求解电子表格模型找到最优运输计划，将产成品从炼油厂运往配送中心。比较最后得到的结果，年运输成本与在图6.17中显示的结果有什么不一样。同样计算在此计划下，运输原油和产成品的总运输成本，与表6.20中显示的23.9亿美元的总成本有什么区别。

c. 你意识到运输产成品的成本要比运输原油的成本稍微大些。所以你决定与其以考虑最小化运送到炼油厂的原油运输成本为基础(如a、b中一样)，还不如以考虑最小化运送产成品的运输成本为基础。建立并求解电子表格模型，来找到最优的运输计划。将产成品从炼油厂(包括在圣路易斯新建的炼油厂)运往配送中心。而将3.6亿桶原油从产油地运往炼油厂的运输计划建立在此计划基础之上。将最后结果与a、b中的结果和图6.17的结果进行比较。

d. 假设c中求出的计划将被采用(包括每家炼油厂会收到的原油数)。在此基础上，建立并求解电子表格模型找到最优运输计划，将原油从产油地运往炼油厂。将最后结果与a、b中的结果和图6.13的结果进行比较。同样计算在此计划下，运输原油和产成品的总运输成本，与b中的结果和表6.20中的结果有什么区别。

e. 你意识到你现在做的是次优化决定，因为每次你只能使其中一部分得到最优化，所以现在应该进一步考虑。建立一张电子表格同时考虑将3.6亿桶原油从产油地运往炼油厂(包括在圣路易斯新建的炼油厂)以及将产成品从炼油厂运往配送中心的运输计划。目标是使总运输成本最小。因为炼油厂总共有每年3.9亿桶的生产能力，决定每家炼油厂会收到的原油数时(不能超过每家炼油厂的生产能力)也要考虑此约束条件。求解模型并将最后得到的结果与b、d中的结果和表6.20的结果进行比较

f. 重复e中的问题，如果新炼油厂是建在洛杉矶(同样也是每年加工1.5亿桶原油的生产能力)。然后再分析如果选址在加尔维斯敦的情况又怎样。使用表6.19提供的三个地方的运营成本的信息，建造如同表6.20一样的表格对三个地方进行财务比较(虽然建造大于原先年加工量1.2亿桶原油规模的炼油厂的运营成本要大些，但管理者让任务组假设表6.19所示的运营成本的差异继续存在，所以总可变成本的差异仍然正确)。

g. 你现在准备将你的报告(包括电子表格)提交给管理层。写一份备忘录表述你的建议。

## 案例6.3 项目选择

泰泽公司(Tazer)是一家制药公司。它进入医药市场已经有12年的历史了，并且推出了6种新药。这6种新药中5种是市场上已经存在药物的同类产品，所以销售的情况并不是很乐观。然而，主治高血压的第6种药物却获得了巨大的成功。由于泰泽公司拥有生产治疗高血压药物的专利权，所以公司并没有遇到什么竞争对手。仅仅从第6种药物中所获得的利润就可以使泰泽公司正常运营下去。

在过去的12年中，泰泽公司不断地进行适量的研究和发展工作，但是却并没有发现有哪一种药物能够获得像高血压药物一样的成功。一个原因是公司没有大量投资进行创新研究开发的动力。公司依赖高血压药物，觉得没有必要花费大量的资源寻找新药物的突破。

但是现在泰泽公司不得不面对竞争的压力了。高血压药物的专利保护期还有5年①。泰泽公司知道只要专利期限一到，大量药品制造公司就会像秃

① 一般来说，专利权保护发明的期限为17年。在1995年，GATT立法拓展专利权的保护期限到20年。在本案例之中，泰泽公司的高血压药物的注册时间是在1995年之前，所以专利权只能够保护这种药物17年。

鹰一样涌进市场。历史数据表明普通药物会降低品牌药物 75% 的销售量。

今年泰泽公司投入大量的资金进行研究和开发工作以求能够取得突破，给公司带来像高血压药物一样的巨大成功。泰泽公司相信如果现在就开始进行大量的研究和开发工作，在高血压药物专利到期之后能够发明一种成功药物的概率是很高的。作为泰泽公司研究和开发的负责人，你将负责选择项目并为每一个项目指派项目负责人。在研究了市场的需要，分析了当前药物的不足并且拜会了大量在有良好前景的医药领域进行研究的科学家之后，你决定你的部门进行五个项目，如下所示：

Up 项目：开发一种更加有效的抗忧郁剂，这种新药并不会带来使用者情绪的急剧变化。

Stable 项目：开发一种治疗躁狂抑郁病的新药。

Choice 项目：为女性开发一种副作用更小的节育方法。

Hope 项目：开发一种预防 HIV 的疫苗。

Release 项目：开发一种更有效的降压药。

对于这 5 个项目之中的任何一个来说，由于在进行研究之前你并不知道使用的配方以及哪种配方是有效的，所以你只能明确研究所要解决的疾病。

你还有 5 位资深的科学家来领导进行这 5 个项目。有一点你十分清楚，那就是科学家都是一些喜怒无常的人，而且他们只有在受到项目所带来的挑战和激励的时候才会努力工作。为了保证这些科学家都能够到他们感兴趣的项目中去，你为这个项目建立了一个投标系统。这 5 位科学家每个人都有 1000 点的投标点。他们向每一个项目投标，并且把较多的投标点投向自己最感兴趣的项目之中。

下表显示了这 5 位科学家进行投标的情况。

| 项　目 | 克瓦尔博士 | 朱诺博士 | 特塞博士 | 米凯博士 | 罗林斯博士 |
|---|---|---|---|---|---|
| Up 项目 | 100 | 0 | 100 | 267 | 100 |
| Stable 项目 | 400 | 200 | 100 | 153 | 33 |
| Choice 项目 | 200 | 800 | 100 | 99 | 33 |
| Hope 项目 | 200 | 0 | 100 | 451 | 34 |
| Release 项目 | 100 | 0 | 600 | 30 | 800 |

你决定要对一些你认为有可能发生的情况进行评估。

a. 根据所给出的投标情况，你需要为每一个项目指派一位资深的科学家并且使得这位科学家的满意度最高。那么应当怎样进行指派？

b. 罗林斯博士接到了哈佛医学院的邀请去完成一个教学任务，而你却非常想把她留下来。但是哈佛的声望会使她离开公司。如果这种情况真的发生的话，公司就只有放弃那个最缺乏热情的项目。公司应当放弃哪一个项目？

c. 当然你并不愿意放弃任何一个项目，因为如果放弃一个项目而只剩下 4 个项目的话，会大大降低找到突破性新药的概率。你决定让朱诺博士或者米凯博士同时领导两个项目。在只有 4 个科学家的情况下，让哪一个科学家领导哪一个项目才能使得对项目的热情最大？

d. 如果朱诺博士被告知她和米凯博士都有机会来同时领导两个项目，她决定要改变她的投标。朱诺博士对每一个项目的投标的情况如下所示：

Up 项目：20

Stable 项目：450

Choice 项目：451

Hope 项目：39

Release 项目：40

在只有 4 个科学家的情况下，让哪一个科学家领导哪一个项目才能使得对项目的热情最大？

e. 你是否支持从 d 得出的指派？为什么？

f. 现在我们还是来分析拥有 5 位科学家的情况。但是，你决定有几个科学家不能领导几个特定的项目。具体来说米凯博士在免疫系统的研究方面没有什么经验，所以他不能领导 Hope 项目。而且他的家族有着躁狂抑郁病的病史，所以你觉得他作为一个项目的领导者参与到 Stable 项目的研究中是不太合适的。于是米凯博士也不能领导 Stable 项目。克瓦尔博士由于在免疫系统的研究方面没有什么经验，也不能领导 Hope 项目。还有克瓦尔博士由于在心血管系统的研究方面没有什么经验，不能领导 Release 项目。罗林斯博士由于家族有低血压的病史，所以你觉得她作为一个项目的领导者参加到 Up 项目中是不太合适的，所以罗林斯博士不能领导 Up 项目。因为米凯博士和克瓦尔博士都有两个项目不能进行领导，所以他们每

人的投标点就只剩下600点。罗林斯博士由于有一个项目不能进行领导，所以她的投标点剩下800点。下表显示了米凯博士、克瓦尔博士和罗林斯博士投标情况：

| 项　目 | 米凯博士 | 克瓦尔博士 | 罗林斯博士 |
|---|---|---|---|
| Up 项目 | 300 | 86 | 不能领导 |
| Stable 项目 | 不能领导 | 343 | 50 |
| Choice 项目 | 125 | 171 | 50 |
| Hope 项目 | 不能领导 | 不能领导 | 100 |
| Release 项目 | 175 | 不能领导 | 600 |

在这种情况下，让哪一个科学家领导哪一个项目才能使得对项目的热情最大？

g. 你觉得 Release 项目和 Hope 项目太复杂了，各让一位科学家分别进行领导是不太合适的。因此，这两个项目都要指派两位科学家进行领导。现在你需要雇用更多的科学家来领导所有的项目：阿利加博士和桑托斯博士。由于宗教的原因，这两个新加入的科学家都不能领导 Choice 项目。下表显示了所有的项目、科学家以及他们的投标情况。

| 项　目 | 克瓦尔博士 | 朱诺博士 | 特塞博士 | 米凯博士 | 罗林斯博士 | 阿利加博士 | 桑托斯博士 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Up 项目 | 86 | 0 | 100 | 300 | 不能领导 | 250 | 111 |
| Stable 项目 | 343 | 200 | 100 | 不能领导 | 50 | 250 | 1 |
| Choice 项目 | 171 | 800 | 100 | 125 | 50 | 不能领导 | 不能领导 |
| Hope 项目 | 不能领导 | 0 | 100 | 不能领导 | 100 | 250 | 333 |
| Release 项目 | 不能领导 | 0 | 600 | 175 | 600 | 250 | 555 |

h. 你认为将 g 中的决策仅仅建立在一个指派问题变形的最优解上是否明智？

CHAPTER

# 7 网络最优化问题

## 学习目标

完成本章学习后，你应该掌握：

1. 建立各种网络最优化问题的网络模型。
2. 描述最小费用流问题、最大流问题、最短路问题和最小支撑树问题的特点。
3. 明确这些问题的应用领域。
4. 了解网络最优化问题中属于最小费用流问题的一些特殊类型。
5. 会通过建立电子表格模型求解最小费用流问题、最大流问题和最短路问题。
6. 用简易算法求解小型最小支撑树问题。

网络在各种实际背景问题中以各种各样的形式存在。交通、电子和通讯网络遍及我们日常生活的各个方面，网络规划也广泛用于解决不同领域中的各种问题，如生产、分配、项目计划、厂址选择、资源管理和财务策划等等。由于篇幅有限，我们在此仅仅举了这几个例子。实际上，网络规划为描述系统各组成部分之间的关系提供了非常有效的直观和概念上的帮助，广泛应用于科学、社会和经济活动的每个领域中。

近些年来，管理科学中一个振奋人心的发展是它在网络最优化问题的方法论和应用方面都取得了不同寻常的飞速进展。许多从计算机科学领域中的数据结构和高效数据处理所衍生出的算法对其发展产生了重要的影响。因此，现在我们可以运用算法和软件以通常的方式轻而易举地解决大型的问题，而在几十年前，要解决这些问题是完全不可能的。

作为一个应用的例子，看一下法国国家铁路，它每年通过其巨大的铁路网，运载约5000万的乘客。在边沿科学杂志1998年1～2月期刊中描述了它如何通过网络最优化问题来适应乘客的喜好，并且调整日运行量来满足需求。这些技巧的运用使每年的收

入增加1500万美元,同时降低了运行成本并提高了服务质量。这个管理科学的应用获得了1997年度弗兰茨·厄德曼奖的一等奖。

本章介绍的网络最优化问题在处理管理问题时特别有用。我们将把重点放在这些问题的本质和应用上,而不去追求求解技术的细节和算法。

许多网络最优化问题实质上是线性规划问题的特殊类型。例如,上一章讨论的运输问题和指派问题,即两类特殊的线性规划问题,就都使用了网络规划,如图6.3和图6.19所示。

在7.1节中将讨论网络最优化问题中的最小费用流问题(minimum-cost flow problem)。最小费用流问题是线性规划问题的特殊类型,在4.4节中称为网络配送问题。

7.3节介绍了最大流问题,最大流问题是涉及诸如怎样使得配送网络中的物流量最大之类的问题。在7.2节中,我们通过介绍一个最大流问题的案例作为讨论最大流问题的基础。

7.4节主要讨论最短路问题。其目标是以最简单的方式找到两地之间的最短路。

7.5节讨论的是最小支撑树问题。这个问题考虑为某个系统所有用户之间提供连接的总成本最小。实际上,这是本章(以及前一章)所考虑的网络最优化问题中惟一不是特殊线性规划的问题。

## 7.1 最小费用流问题

在4.4节中所举的作为线性规划问题的一种主要类型的关于网络配送问题的例子主要解决如何以最小成本在一个配送网络中运输货物。网络配送问题是网络最小费用流问题的另外一个名称(我们将使用后者这个更加通用的名称)。

### 例子:无限配送公司的问题

无限配送公司有两个工厂生产产品,这些产品需要运到两个仓库里。下面是一些具体的信息:

工厂1生产80个单位。
工厂2生产70个单位。
仓库1需要60个单位。
仓库2需要90个单位。

(每个单位对应货车满载时的产品数量。)

图7.1给出了运输这些产品可利用的配送网络。在图中,F1和F2代表两个工厂,W1和W2代表两个仓库,DC表示一个配送中心。箭头表示可行的运输线路。特别地,工厂1和仓库1之间以及工厂2和仓库2之间各有一条铁路运输轨道(在铁路上的运输量的是没有限制的)。除此以外,卡车司机总共可以从工厂运输50个单位到配送中心,然后可以从配送中心运输50个单位到仓库(任何运输到配送中心的产品必须随后运送到仓库里)。

> 目标是通过配送网络的运输成本最小。

不同运输路线的运输成本是不一样的。每条路线的单位运输成本如图7.2中箭头上方的数字所示。

管理者的目标是确定一个运输方案(即每条路线运送多少单位的产品),使运输成本的总和达到最小。

除了数据比较少以外，这个问题就是一个典型的最小费用流问题。就像我们在 4.4 节中所描述的那样，虽然我们用一个纯粹的线性规划模型就可以解决这个问题。但是，我们没有必要用这么冗长的公式去描述。如图 7.2 所示的网络就可以为这个问题提供一个更加简单而又直观的描述。

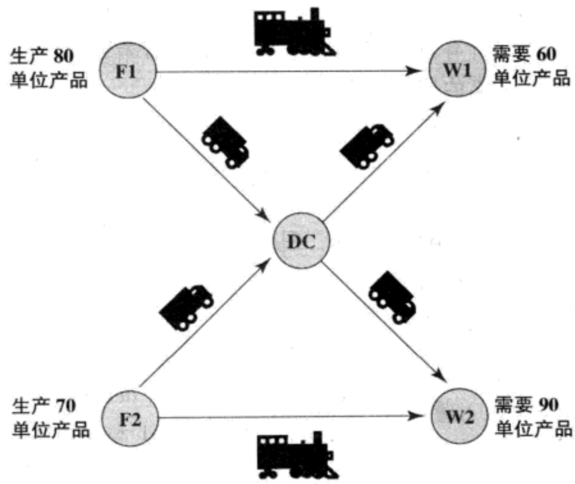



图 7.1　无限配送公司的网络配送问题，其中所有可行的运输路线都用箭头表示。

为了不使网络图如此拥挤，通常我们用更加简化的图来表示，如图 7.3 所示。每一个设施地点旁边方括号里的数字代表净流出单位数（流出减去流入）。因此，每一个末端仓库的产品单位数都是用负数表示的。而配送中心的数值总为 0，这是因为运走的产品的数量减去运达的产品的数量一定等于 0。箭头上方的数字代表了这条运输路线的单位运输成本。任意一个箭头下面带有方括号的数字代表这条运输路线的最大运输量（如果没有方括号和数字，则表明在这条运输路线上没有运输容量的限制）。这个网络为我们提供了这个问题的完整描述，其中包含了必需的数据。所以，它构成了最小费用流问题的一个网络模型。

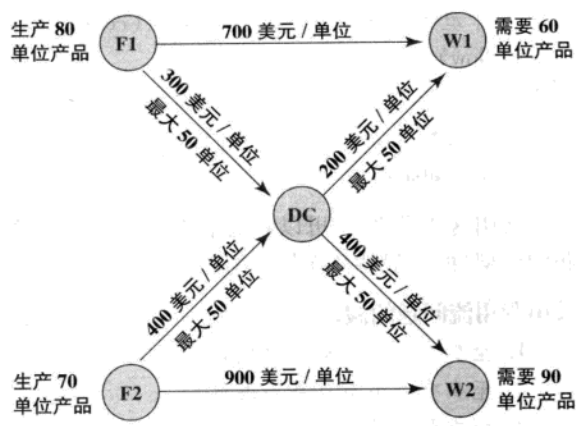



图 7.2　无限配送公司问题的配送网络的数据。

图 7.3 表示用一个网络图如何完整地表示最小成本问题。

由于这只是一个很简单的问题，所以你也许可以看出该问题的最优解（试试看）。答案如图 7.4 所示，每条路线中的运输数量都已经在圆括号里标出（为了避免误解，我们在这个图里删除了单位运输成本和运输能力）。结合本图的运输量和图 7.2 与图 7.3 所给出的单位运输成本，此解决方案的总运输成本是：

总运输成本 = 30(700 美元) + 50(300 美元) + 50(400 美元) + 50(200 美元)
　　　　+ 50(400 美元) + 20(900 美元)
　　　= 104000 美元

## 一般特征

这个例子具备了所用最小费用流问题的一般特征。在归纳这些特征以前，我们先来介绍一些你需要了解的术语。

### 术 语

1. 所有最小费用流问题都是用带有通过其中的流的网络表示的。
2. 网络中的圆圈被称为节点(nodes)。
3. 如果节点产生的净流量(流出减去流入)是一个确定的正数的话,这个节点就是供应点(supply node)(因此,图7.3中的F1和F2都是供应点)。

供应点有净流出量,需求点有净流入量。

4. 如果节点产生的净流量是一个确定的负数的话,那么这个节点就称为需求点(demand node)(所以,本例中W1和W2就是需求点)。
5. 如果节点产生的净流量恒为零,那么这个节点就称为转运点(transshipment node)(因此,本例中DC就是转运点)。我们把流出节点的量等于流入节点的量称为流量守恒(conservation of flow)。
6. 网络中的箭头称为弧(arcs)。
7. 允许通过某一条弧的最大流量称为该弧的容量(capacity)。

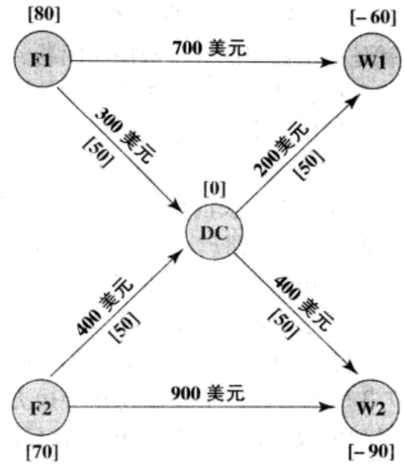



图7.3 把无限配送公司的问题看作最小费用流问题的网络模型。

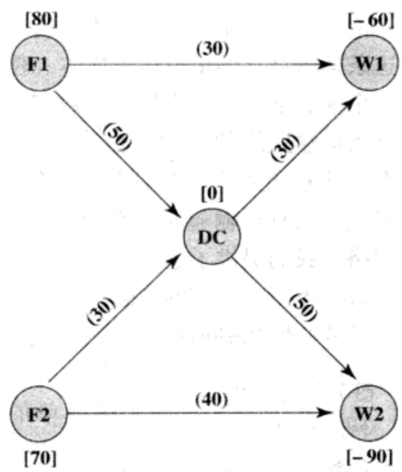



图7.4 无限配送公司问题的最优解,图中,每条路线的运输量标示在箭头上方的圆括号里。

使用这些术语,就可以对最小费用流问题(这类问题的模型)的一般特征作如下的假设。

### 最小费用流问题的假设

1. 至少有一个节点是供应点。
2. 至少有一个节点是需求点。
3. 所有剩下的节点都是转运点。
4. 通过弧的流只允许沿着箭头的方向流动,通过弧的最大流量取决于该弧的容量(如果流是双向的话,则需要用一对箭头指向相反的弧来表示)。
5. 网络中有足够的弧提供足够的容量,使得所有在供应点中产生的流都能够到达需求点。
6. 在流的单位成本已知的前提下,通过每一条弧的流的成本和流量成正比。

目标是使满足需求点供应的总成本最小。

7. 最小费用流问题的目标是在满足给定需求的条件下,使得通过网络供应的总成本最小(换一种说法是通过这样做使得总利润最大化)。

这类问题的解需要确定通过每一条弧的流有多大。对于每一个可行解,通过每一条弧的流量都不得超过该弧的容量;而且,每一个节点产生的净流量必须等于该节点标明的流量。下面的特征表明了什么时候该问题有可行解。

**具有可行解的特征:**在以上的假设下,当且仅当供应点所提供的流量总和等于需求点所需要的流量总

和时，最小费用流问题有可行解。

我们注意到了无限配送公司的问题具有这个特征，因为其供应为 80 + 70 = 150，而需求的总和亦为 60 + 90 = 150。

对于很多最小费用流问题的应用，管理者希望所有流量的解都是整数解（例如，每一条运输路线上的满载货车数量为整数）。这个模型没有包含任何使得可行解具有这个特征的限制条件。幸好，由于如下的特征，这些限制条件不是必需的。

**具有整数解的特征**：只要其所有的供应、需求和弧的容量都是整数值，那么任何最小费用流问题的可行解就一定有所有流量都是整数的最优解。

见图 7.2，由于无限配送公司的问题具有这个特征，所有的供应（80 和 70）和所有的需求（60 和 90）以及弧的容量（50）都是整数，因此，在图 7.4 中给出的所有流量的最优解（30，30，30，50，50，40）都是整数解。这就保证了运入和运出配送中心的货车都是满载的（别忘了每一个单位代表装满一车的产品）。

现在，让我们看看如何通过建立电子表格并应用 Solver 求得无限配送公司的最小费用流问题的最优解。

## 用 Excel 建立并解决最小费用流问题

图 7.5 给出了一个直接以图 7.3 该问题的网络规划为基础的更简单的电子表格。B 列和 C 列列出了网络中的弧，F 列则列出了各弧所对应的容量（没有容量限制的除外），每一个单位流量的成本则列在 G 列内。可变单元格流量（D4：D9）列出了通过弧的流量，目标单元格总成本（D11）提供了通过方程计算得出的流量的总成本，这个计算方程是：

D11 = SUMPRODUCT（流量，总成本）

> 容量限制在任何有流量限制的弧的最小费用流问题中都存在。

> 最小费用流问题的任一个节点都需要净流量限制。

第一组限制条件在 Solver 的对话框里，即 D5：D8 ≤ 容量（F5：F8），这就保证了弧的流量不会超过该弧的容量。

同理，I 列列出了节点，J 列确定了每个节点所产生的净流量（这些净流量是用可变单元格中给定的流）。L 列表明每个节点需要产生的净流量。Solver 对话框中的第二组限制条件，即净流量（J4：J8）= 供给需求（L4：L8），表明每个节点产生的实际净流量必须等于规定的量。

> **Excel 窍门**：SUMIF（A，B，C）可以将 A、B、C 三项相应的数据相加。该函数在计算网络节点流量时非常有用。

在净流量（J4：J8）中输入的等式用了两个 SUMIF 函数的差来计算每个节点产生的净流量（流出减流入）。在每一点，第一个 SUMIF 函数计算流出节点的流量，第二个 SUMIF 函数计算流入节点的流量。比如，看一看 F1 节点（I4），SUMIF（来自，I4，流量）将流量（D4：D9）中的值加总，只要这个值所在行的单元格来自（B4：B9）的值与 I4 的值一样。因为 I4 = F1，来自列中惟一有 F1 的是第 4 行和第 5 行，所以流量列只加这两行的值，即 D4 + D5。同样，SUMIF（流入，I4，流量）将流量（D4：D9）中的值加总，只要这个值所在行的单元格流入（C4：C9）的值与 I4 的值一样。因为 F1 没有出现在流入列中，所以和是 0。因此，J4 的等式就是 J4 = D4 + D5 = 30 + 50 = 80，也就是 F1 节点产生的净流量。

看上去使用 SUMIF 函数似乎比直接输入 J4 = D4 + D5，J5 = D8 + D9，J6 = D6 + D7 − D5 − D8

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Distribution Unlimited Co. Minimum Cost Flow Problem | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | From | To | Ship | | Capacity | Unit Cost | | Nodes | Net Flow | | Supply/Demand |
| 4 | | F1 | W1 | 30 | | | $700 | | F1 | 80 | = | 80 |
| 5 | | F1 | DC | 50 | ≤ | 50 | $300 | | F2 | 70 | = | 70 |
| 6 | | DC | W1 | 30 | ≤ | 50 | $200 | | DC | 0 | = | 0 |
| 7 | | DC | W2 | 50 | ≤ | 50 | $400 | | W1 | -60 | = | -60 |
| 8 | | F2 | DC | 30 | ≤ | 50 | $400 | | W2 | -90 | = | -90 |
| 9 | | F2 | W2 | 40 | | | $900 | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | Total Cost | $110,000 | | | | | | | | |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalCost

Equal To: ○ Max ● Min ○

By Changing Cells:

Ship

Subject to the Constraints:

$D$5:$D$8 <= Capacity

NetFlow = SupplyDemand

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Capacity | F5:F8 |
| From | B4:B9 |
| NetFlow | J4:J8 |
| Nodes | I4:I8 |
| Ship | D4:D9 |
| SupplyDemand | L4:L8 |
| To | C4:C9 |
| TotalCost | D11 |
| UnitCost | G4:G9 |

| | J |
|---|---|
| 3 | Net Flow |
| 4 | =SUMIF(From,I4,Ship)-SUMIF(To,I4,Ship) |
| 5 | =SUMIF(From,I5,Ship)-SUMIF(To,I5,Ship) |
| 6 | =SUMIF(From,I6,Ship)-SUMIF(To,I6,Ship) |
| 7 | =SUMIF(From,I7,Ship)-SUMIF(To,I7,Ship) |
| 8 | =SUMIF(From,I8,Ship)-SUMIF(To,I8,Ship) |

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| | C | D |
|---|---|---|
| 11 | Total Cost | =SUMPRODUCT(Ship,UnitCost) |

**图 7.5** 无限配送公司的最小成本流问题的电子表格模型，包括目标单元格总成本(D11)和其他输出单元格净流量(J4:J8)的公式以及其他需要说明的内容。在可变单元格流量(D4:D9)中显示了通过 Solver 得出的最优解。

复杂，但实际上是简化了。SUMIF 函数只要在单元格 J4 中被输入一次，然后就能在净流量(J5:J8)单元格中复制。在一个有许多节点的问题中，它更快捷而且不容易犯错(这点可能更重要)。在计算一个大型问题的节点净流量时，在计算流量栏中应该加上或减去的数值时，很容易遗漏一些弧。

第一个 Solver 的选项(假设为线性模型)表明这个问题仍然是一个线性规划问题(一种简化形式)，而第二个选项(假设是非负的)则规定流量不能是负数。

点击 Solver 的按钮后就在单元格流量(D4:D9)中显示出该问题的最优解。这个最优解和图 7.4 给出的最优解是一样的。

## 更加有效地解决大规模的最小费用流问题

因为最小费用流问题是线性规划问题的一种特殊类型，这种单纯形法不仅可以解决任何一个线性规划问题，而且也可以为解决任意一个最小费用流问题提供标准的解决方法。比如说，Excel Solver 就使用了单纯形法来解决这种类型(或者其他类型)的线性规划问题。这种方法不仅对于小型问题来说很有效，如无限配送公司问题就是一个很好的例子，而且它对于解决大型问题也同样奏效。所以，我们在图 7.5 中阐明的解决方法，对于你在本书中以及将来会遇到的任何一种最小费用流问题都会有帮助。

但是，我们也要提醒你注意，有时在实际运用中，解决比较大型的问题时需要用不同的

方法。由于存在一些特殊类型的最小费用流问题,单纯形法可能得以大大简化以更快地求解。所以,直接处理问题的网络,我们也许可以用同样的步骤而更快地得到结果。

这种单纯形法的简化版本叫作网络单纯形法(network simplex method)(你可能会回想起我们在6.2节中提到过,网络单纯形法可以用于解决运输问题)。网络单纯形法可以用来解决那些对于单纯形法来说太大而无法解决的大型问题。

> 网络单纯形法能解决一些 Excel Solver 不能解决的大型最小费用流问题(有时有几百万个节点和弧)。

和单纯形法一样,网络单纯形法不仅可以找到问题的最优解,而且对于在第5章中所提到的管理者进行 what-if 分析也能提供颇有价值的帮助。

现在,许多公司都使用网络单纯形法来解决他们的最小费用流问题。有些问题是非常庞大的,有着数万个节点和弧。有时,弧的数量甚至可能会多得多,达到几百万条。

虽然 Excel Solver 软件中没有网络单纯形法,但是其他的线性规划的商业软件包通常都有这种方法。

近些年来在这方面所取得的重大进展是开发出了用于最小费用流问题建模的完美的图形界面。这些界面使得模型设计和网络单纯形法输出的解释没有了数学公式,变得完全可视,非常直观。这对管理者决策的制定起到了很大的帮助。

## 一些实际应用

就像图7.1~图7.4关于无限配送公司问题的描述一样,最小费用流问题最重要的应用可能是在配送网络的运营上(这就是为什么我们在4.4节中把最小费用流问题说成是网络配送问题的原因)。正如在表7.1的第一行里归纳的那样,这类应用往往包括确定如何把货物从出发地(如工厂等等)运到中转站(如果需要的话),然后再运送给客户的方案。

**表7.1　几类典型的最小费用流问题的应用**

| 应用的类型 | 供应点 | 转运点 | 需求点 |
|---|---|---|---|
| 配送网络的运作 | 货源 | 中间存储设施 | 客户 |
| 固体废弃物管理 | 固体废弃物源 | 处理设施 | 固体废弃物掩埋地 |
| 供应网络的运作 | 供应商 | 中间仓库 | 加工设备 |
| 工厂协调产品组合 | 工厂 | 某一特定产品的生产 | 某一特定产品的市场 |
| 现金流管理 | 某一特定时间的现金来源 | 短期投资期权 | 在特定时间对现金的需求 |

但是,配送网络经常比图7.1~图7.4所示的要复杂得多。例如,我们来考虑国际纸业公司(International Paper Company)的配送网络(见 Interfaces 1988年3~4月期的描述)。这家公司是世界上最大的纸浆、纸和纸类产品的制造商以及木材和夹板的主要生产者。它也拥有2000万英亩的林区或其权益。这些分布在不同地方的林区就是它配送网络的供应点。但是,在公司的产品最终到达需求点(客户)以前,供应流必须经过一系列很长的转运点。它通过配送网络的一条典型的路径就是:

林区→木材堆积场→锯木厂→造纸厂
→纸制品加工厂→仓库→客户

另外一个复杂的配送网络的实例就是2.1节中所提到的 Citgo 石油公司。应用最小费用流问题的公式可以提高其配送网络的运营水平,为 Citgo 石油公司每年至少节省了1650

万美元。

对于某些最小费用流问题的应用,所有的转运点与其说是中间存储设施,倒不如说是处理设施。在表7.1中列出的固体废弃物管理的例子就是如此。在这里,通过网络的固体废物流始于固体废弃物源,然后把它们送到各个固体废弃物掩埋地。然而,这里的目标依然是确定使得总成本最小的流量的方案。在这个例子中,成本包括了运输和处理两个过程的成本。

在其他的应用中,需求点可能是一些处理设施。如表7.1第三行中所举的例子,它的目标是找到一个方案,使得从各个可能的供应商那里获得供应,然后把这些所需货物存储在仓库中,最后把它们运输到公司的处理设施中去(如工厂等等)的过程成本最低。

1987年7~8月的Interfaces期刊描述了马歇尔公司(Marshalls,Inc.)(一家折扣连锁零售店)现在和以前是如何使用微型计算机去处理一个最小费用流问题的。在这个应用中,马歇尔公司力图使得从供应商到加工中心,再从加工中心到零售店的商流最优。其中的一些网络有超过20000条弧(描述这个应用以及国际纸业公司和Citgo石油公司的文章能够在www.mhhe.com/hillier2e/articles上下载)。

表7.1中另一种应用(协调工厂的产品组合)说明了除了物料的物理流,弧确实可以代表其他的流。这个应用涉及一个拥有几个工厂的公司(供应点),其工厂生产同一样的产品但是成本不一样。每一个供应点伸出的弧代表了在这个工厂里可能生产的某一产品的产量,这条弧指向和这类产品相对应的转运点。因此,转运点有一条从每一个能够生产这种产品的工厂伸出的弧,然后这些弧又把产品从这个节点指向代表客户的节点(需求点)。这个网络的目的是为了确定如何分配各个工厂每种产品的生产能力,从而使得在满足对不同产品需求的同时达到总成本最低。

表7.1中的最后一个应用(现金流管理)说明了不同的节点可以代表发生在不同时间的事件。在这个应用中,每一个供应点代表了一个特定的时间(或者一个时期),在这个时间或时期里公司能够获得现金(通过到期账款、应收票据、证券的销售、借款等等)。每个节点的供应量就是那时所能得到现金量。同理,每个需求点代表了某个特定的时间(或时期)公司所需现金储备。每个需求点的需求量就是到时所需要的现金量。在这个例子中,我们的目标是使得公司在每个从有现金闲置到有现金需求期间的现金投资所得收入最大。因此,每个转运点代表在特定的时间间隔里对一种特定的短期投资期权(如从银行购买存款单)的选择。得到的网络将有一个连续流,代表了从有现金闲置、投资现金到在投资到期后利用现金的计划。

## 最小成本流问题的特殊类型

在网络问题中,有五种重要的类型是属于最小费用流问题的特殊类型。

第一种是在上一章开头部分所讲的运输问题,6.2节的图6.3就是一类运输问题的网络规划。在我们通用的术语中,运输问题的出发地和目的地就是分别用供应点和需求点来表示的。所以,运输问题就是没有转运点和没有弧的容量限制(网络中所用的流直接从供应点到需求点)的最小费用流问题。

第二种类型是在6.6节中讨论过的指派问题。我们回忆一下,这类问题指的是指派一群人完成一组任务,每个人单独完成其中的一项任务。这种有代表性的指派问题的网络规划在6.6节中的图6.19表示出来了。我们也需要指出,6.6节的指派问题可以看成是一类特殊的运输问题,它的出发地是人,目的地是任务。这样使得指派问题也成为具有前面所描

述特征的一类特殊的最小费用流问题。除此以外，每一个指派人都是供应量为1的供应点，而每一项任务都是需求量为1的需求点。

转运问题是弧容量没有限制的最小费用问题。

第三类特殊的最小费用流问题是转运问题(transshipment problems)。这类问题除了有一个附加的特征，即从出发地(供应点)运输到目的地(需求点)过程中可能也会经过像配送中心这样的中间运输点(转运点)。除此以外，它和运输问题基本上是一样的。如同运输问题，转运问题的弧也没有容量的限制。所以，每一条弧可以通过任意大小流量的任何一个最小费用流问题都是转运问题。例如，如果改变图7.2的数据，使得任何数量的产品(在生产和需求的范围内)都可以运入和运出配送中心，那么无限配送公司问题就变成了转运问题了。[①]

由于它们和一般的最小费用流问题有着密切关系，所以我们不再具体对转运问题进行讨论。

另外两类特殊的最小费用流问题是最大流问题和最短路问题，学习完下一节关于最小费用流问题的案例研究后，我们将分别在7.3节和7.4节中具体讨论这两类问题。

可能你会对我们为什么要不辞劳苦去指出这五类问题是最小费用流问题的特殊类型而感到不解，这里有一个非常重要的原因。网络单纯形法可以用来解决这五种特殊类型最小费用流问题中的任意一个大型问题。但是，这些问题要是想通过单纯形法去解决可能会很困难，甚至不可能。虽然对于每一类这样的问题，我们也能获得其他有效的特殊算法去解决(如可以用运输单纯形法来解决运输问题)，但是，由于近期来网络单纯形法的运用已经变得如此广泛，以至于它在大多数情况下成为了其他算法极好的替代。特别是当我们可以获得带有网络单纯形法而不是其他相关的特殊算法的软件包时，网络单纯形法就更有价值了。不仅如此，即使找到了最优解，正如在第5章中论述的那样，网络单纯形法在第5章讨论的管理what-if分析议题中依然很有帮助。

### 问题回顾

1. 说出最小费用流问题中的三种节点并加以具体描述。
2. 弧的容量是什么意思？
3. 最小费用流问题的目标通常是什么？
4. 为了获得可行解，最小费用流问题需要具备什么样的特征？
5. 什么是最小费用流问题的整数解特征？
6. 用来解决最小费用流问题非常有效的单纯形法的改进型叫什么？
7. 最小费用流问题应用的一些典型类型是什么？
8. 说出最小费用流问题中特殊类型网络最优化问题的五种重要类型。

## 7.2　案例研究：BMZ公司的最大流问题

这是怎样的一天啊！首先被叫到老板的办公室里，然后又接到了公司总裁亲自打来的

① 注意：弧容量有限时的最小成本流问题有时也称为有限容量的转运问题(capacitated transshipment problem.)。我们以后不使用这个术语。

紧急电话。幸好,他都能够处理好它们,保证情况都在他的掌握之中。

虽然卡尔·斯密特在BMZ公司的头衔是供应链经理,但是他经常告诉他的朋友们,他实际上是公司的危机处理经理。紧急事件一个接着一个发生。要么是需要保持生产线生产的供应件没有到;要么就是虽然供应件到了,但由于型号不对而不能使用;又或者是给一个重要的客户的紧急运输被耽搁了。下面就是一个很典型的危机事件:公司最重要的一个配送中心,即那个位于洛杉矶的配送中心,需要从公司紧急增运货物。

由于考虑到卡尔·斯密特是冉冉升起的新星,所以公司选择他来担任这个重要的职务。四年前,卡尔在一所一流的美国商学院获得了MBA学位,他是全公司高级管理层中最年轻的一员。他在商学院所学到的最新管理科学技术在提高整个公司的供应链管理中已经发挥了无法估量的作用。虽然危机还会出现,但是过去几年中发生的混乱已经消失了。

卡尔有一个处理当前危机的方案。这意味着我们又要求助于管理科学。

## 背 景

BMZ公司是欧洲一家生产豪华汽车的制造商。虽然它生产的汽车在所有发达国家的销量都不错,但是对于这家公司来说,出口到美国显得尤其重要。

BMZ公司因为提供优质的服务而获得很好的声誉,保持这个声誉一个很重要的秘诀是它有着充裕的汽车配件供应,从而能够随时供货给公司众多的经销商和授权维修店。这些供应件主要存放在公司的配送中心里,这样一有需求就可以立即送货。卡尔需要优先考虑的是改进这些配送中心的不足之处。

该公司在美国有几个配送中心。但是,离洛杉矶中心最近的一个配送中心却坐落在离洛杉矶1000多英里的西雅图。由于BMZ的汽车在加利福尼亚越来越受欢迎,所以保证洛杉矶中心良好的供应就显得尤为重要了。因此,现在那里的供应不断减少的现状成为了公司高层管理真正关心的问题——正如现在卡尔深切领会到的一样。

大部分的汽车配件以及新车是在该公司坐落于德国斯图加特的总厂和新车一起生产的。也就是这家工厂向洛杉矶中心供应汽车配件。由于其中的一些配件体积很大,某些配件的需求量很多,这就使得供应的总量非常庞大——每月有超过300000立方英尺的配件需要运到。现在,下个月需要多得多的数量以补充正在减少的库存。

## 问 题

卡尔需要尽快制定一个方案,使得下个月从总厂运送到洛杉矶配送中心的供应件尽可能多。他已经认识到了这是个最大流问题——一个使得从总厂运送到洛杉矶配送中心的配件流最大的问题。

因为总厂生产的配件量远远要大于能够运送到配送中心的量,所以,可以运送多少配件的限制条件就是该公司配送网络的容量。

这个配送网络如图7.6所示。在图中,标有ST和LA的节点分别代表斯图加特的工厂和洛杉矶的配送中心。由于工厂所在地有一个铁路转运点,所以首先要通过铁路把配件运输到欧洲的三个港口:鹿特丹(节点RO)波尔多(节点BO)和里斯本(节点LI);然后通过船运把它们送到美国的港口纽约(节点NY)或新奥尔良(节点NO);最后用卡车把它们从港口运送到洛杉矶的配送中心。

经营这些铁路、船舶和卡车的组织是独立所有的公司,这些公司为很多的公司运输货

物。由于对这些老主顾原先的承诺,所以这些公司不可以在短时间内为任何一个客户大量增加运输空间配额。因此,BMZ 公司只能够保证获得下个月每条运输航线有限的运输空间。图 7.6 已经给出可以获得的空间数量,以 100 立方米为 1 个单位(由于每 100 立方米比 3500 立方英尺大一点,所以,需要运送的这批货物体积是很大的)。

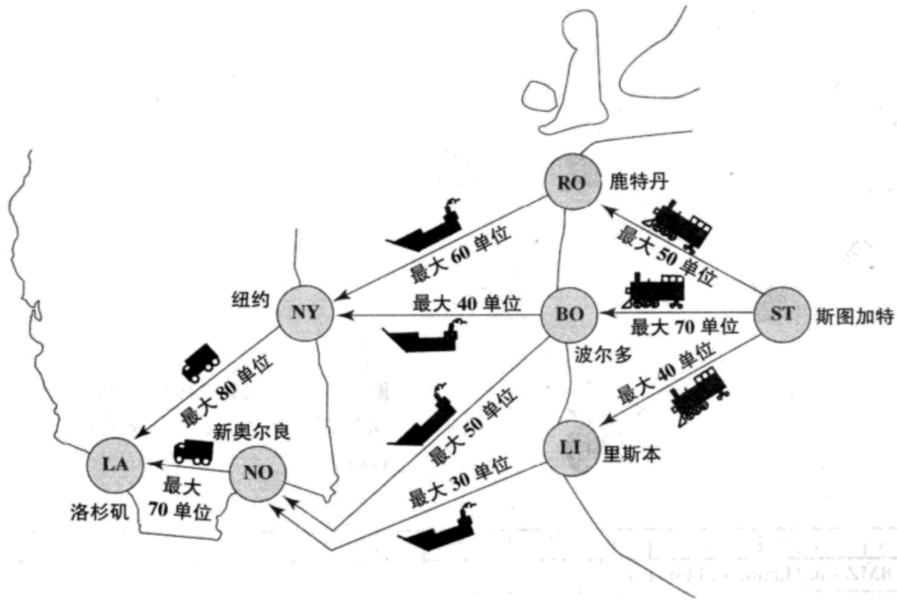



图 7.6　BMZ 公司从德国斯图加特的工厂到洛杉矶的配送中心的配送网络。

## 模型描述

图 7.7 是这个最大流问题的网络模型。这个网络没有显示该配送网络具体的地理分布,而是简单地把各节点(代表不同的城市)均匀的排成几列。节点间的弧代表运输路线,每条弧的容量(弧下方括号内的数字)代表了在这条运输路线上所能得到的运输空间的数量。这个问题的目标是确定通过每一条弧发送多少流量(即通过每条运输路线可以运送多少单元的货物),使得从斯图加特工厂到洛杉矶配送中心的运输单位总量最大。

> 与图 7.5 所示的表格目标是使总成本(D11)最小化作对比,图 7.8 所示的表格目标是使目标单元格最大流量(D14)最大化。

图 7.8 给出了图 7.5 的格式描述这个问题时所使用的相应的电子表格模型。这个模型和图 7.5 的模型的主要区别是它的目标发生了变化。由于我们的目标不再是使得网络中流的总成本最小,因此我们删除了图 7.5 中 G 列。目标单元格最大流量(D14)里所得的数据是从斯图加特到洛杉矶总流量的单位数。图的底部给出等式 D14 = I4,I4 给出了从斯图加特到洛杉矶的净流量。像图 7.5 一样,图 7.8 净流量(I4:I10)的公式用的是两个 SUMIF 函数的差来计算每个节点产生的净流量。因为目标是使最大流量(D14)的值最大化,Solver 对话框定义这个目标单元格的数据要达到最大。点击 Solver 按钮,在可变单元格流量(D4:D12)中就得到了 BMZ 通过各条路线应该运输多少数量的最优解。

但是,卡尔对这个解还不是十分满意,因为他有一个办法可以得到更优的解。这需要介绍并求解另外一个最大流问题(在下一节中我们还会继续讨论这个案例)。

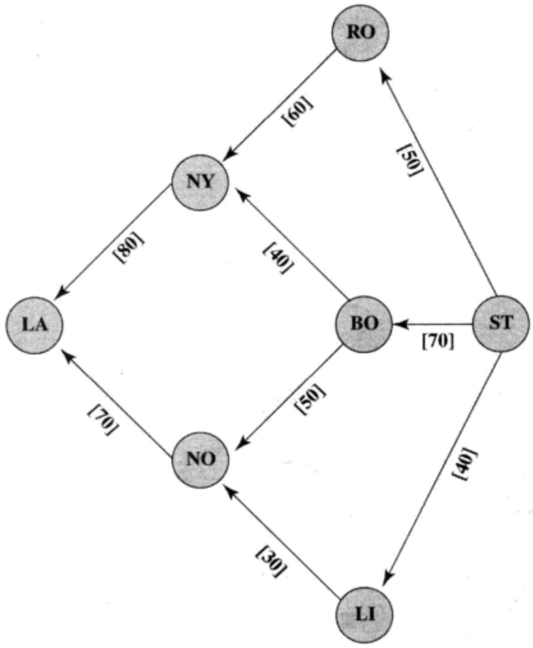



图 7.7　作为最大流问题的 BMZ 问题的网络模型，图中每条弧下方括号里的数字代表该弧的容量。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **BMZ Co. Maximum Flow Problem** | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | **From** | **To** | **Ship** | | **Capacity** | | **Nodes** | **Net Flow** | | **Supply/Demand** |
| 4 | | Stuttgart | Rotterdam | 50 | ≤ | 50 | | Stuttgart | 150 | | |
| 5 | | Stuttgart | Bordeaux | 70 | ≤ | 70 | | Rotterdam | 0 | = | 0 |
| 6 | | Stuttgart | Lisbon | 30 | ≤ | 40 | | Bordeaux | 0 | = | 0 |
| 7 | | Rotterdam | New York | 50 | ≤ | 60 | | Lisbon | 0 | = | 0 |
| 8 | | Bordeaux | New York | 30 | ≤ | 40 | | New York | 0 | = | 0 |
| 9 | | Bordeaux | New Orleans | 40 | ≤ | 50 | | New Orleans | 0 | = | 0 |
| 10 | | Lisbon | New Orleans | 30 | ≤ | 30 | | Los Angeles | -150 | | |
| 11 | | New York | Los Angeles | 80 | ≤ | 80 | | | | | |
| 12 | | New Orleans | Los Angeles | 70 | ≤ | 70 | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | Maximum Flow | 150 | | | | | | | |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: MaxFlow

Equal To: ● Max ○ Min ○

By Changing Cells:

Ship

Subject to the Constraints:

$I$5:$I$9 = SupplyDemand

Ship <= Capacity

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Capacity | F4:F12 |
| From | B4:B12 |
| MaxFlow | D14 |
| NetFlow | I4:I10 |
| Nodes | H4:H10 |
| Ship | D4:D12 |
| SupplyDemand | K5:K9 |
| To | C4:C12 |

| | I |
|---|---|
| 3 | **Net Flow** |
| 4 | =SUMIF(From,H4,Ship)-SUMIF(To,H4,Ship) |
| 5 | =SUMIF(From,H5,Ship)-SUMIF(To,H5,Ship) |
| 6 | =SUMIF(From,H6,Ship)-SUMIF(To,H6,Ship) |
| 7 | =SUMIF(From,H7,Ship)-SUMIF(To,H7,Ship) |
| 8 | =SUMIF(From,H8,Ship)-SUMIF(To,H8,Ship) |
| 9 | =SUMIF(From,H9,Ship)-SUMIF(To,H9,Ship) |
| 10 | =SUMIF(From,H10,Ship)-SUMIF(To,H10,Ship) |

| | C | D |
|---|---|---|
| 14 | **Maximum Flow** | =I4 |

图 7.8　BMZ 公司最大流问题电子表格，包括目标单元格最大流量(D14)和其他输出单元格净流量(I4:I10)的公式以及其他需要说明的内容。可变单元格流量(D4:D12)显示的是由规划求解软件获得的最优解。

## 问题回顾

1. BMZ 公司当前面临的危机是什么？
2. 当该问题用网络形式表示时，通过 BMZ 的配送网络的流是什么？从哪里到哪里？
3. 得到的最大流问题的目标是什么？

# 7.3　最大流问题

和最小费用流问题一样，最大流问题也与网络中的流有关。但是，现在目标不一样了，不是使得流的成本最小化，而是寻找一个流的方案，使得通过网络的流量最大。这就是卡尔需要找到的一个流量方案，使得通过 BMZ 的配送网络从斯图加特的工厂运送到洛杉矶配送中心的汽车配件的总量达到最大。

## 一般特征

除了目标（流最大化和成本最小化）不一样以外，最大流问题的特征与最小费用流问题的特征是非常相似的。但是，它们之间也有一些细微的差异，关于这一点我们将在总结了其假设后讨论。

**最大流问题的假设**

1. 网络中所有流起源于一个节点，这个节点叫作源（source），所有的流终止于另一个节点，这个节点叫作收点（sink）（在 BMZ 问题中源和收点分别代表工厂和配送中心）。
2. 其余所有的节点叫做转运点（在 BMZ 问题中，节点 RO、BO、LI、NY 和 NO 都是转运点）。
3. 通过每一个弧的流只允许沿着弧的箭头所指方向流动。由源发出的所有的弧背向源，而所有终结于收点的弧都指向收点。
4. 最大流问题的目标是使得从源到收点的总流量最大。这个流量的大小可以用两种等价的方法来衡量，分别叫作从源点出发的流量和进入收点的流量（图 7.8 中的单元格 D4 和 I4 使用的是从源点出发的方法）。

最大流问题中的源和收点类似于最小费用流问题的供应点和需求点。这些节点都是这两类问题中惟一不满足流量守恒（流出等于流入）的节点。如同供应点一样，源只产生流；同样，如同需求点一样，收点只接收流。

然而，最小费用流问题的这些节点和最大流问题中与其对应的节点有两点区别。

> 虽然最大流问题中只有一个源和一个收点。但是，有多个源和收点的最大流问题的变形也能得到解决，如下所示。

第一个区别是，供应点的供应量和需求点的需求量都是固定的，而源和收点则不同。这是因为后者的目标是使得从源点出发的或进入收点的流量最大，它们的数量不是固定的。

第二个区别是，在最小费用流问题中，不管是供应点的数量还是需求点的数量都可能多于一个。而在最大流问题中只能有一个源和一个收点。但是，有多个源和收点的最大流问题的变形也能用 Excel Solver 软件解决。现在，我们用上一节中介绍的 BMZ 公司的案例来说明这一点。

## 继续分析具有多个供应点和需求点的案例

下面就是卡尔关于如何改善 7.2 节最后得到的方案(如图 7.8 中 D 列给出的数据)的想法。

在柏林,即斯图加特的工厂的北面,公司有一家较小一点的工厂也生产汽车配件。虽然通常这家工厂用来协助供应给北欧、加拿大和美国北部地区的配送中心(包括在西雅图的一个),但是它也同样可以运输配件到洛杉矶的配送中心去。而且,当洛杉矶配送中心出现库存短缺时,西雅图的配送中心有能力供应配件给洛杉矶配送中心的客户。

受到这一点的启发,卡尔为解决当前洛杉矶存货短缺的问题开发了一个更好的方案,他决定与其仅仅使得从斯图加特的工厂到洛杉矶配送中心的运输量最大,不如使得两个工厂到洛杉矶和西雅图这两个配送中心的运输量最大。

图 7.9 显示的网络模型代表扩展后的配送网络。这个经过扩展的网络包括了两个工厂和两个配送中心。除了图 7.6 和图 7.7 的节点以外,节点 BE 代表了位于柏林的较小的工厂,节点 HA 和节点 BN 分别代表为这家工厂提供服务的汉堡和波士顿另外两个港口。和以前一样,弧代表了运输路线,每一条弧下方括号里的数字代表了该弧的容量,即下个月可以通过这条运输路线的最大运输单位数。

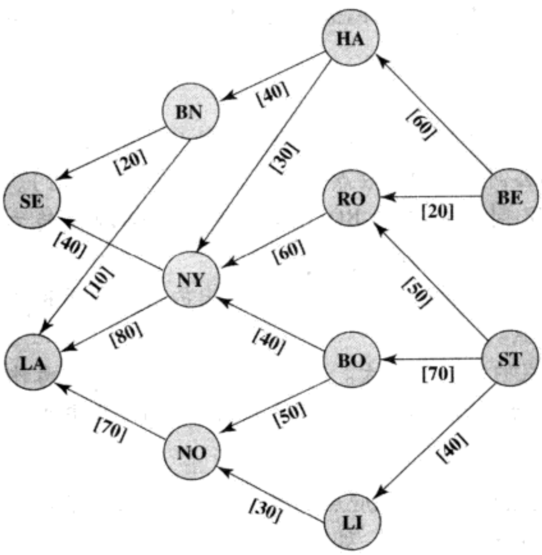



**图 7.9** 将经过扩展的 BMZ 问题看作是最大流问题的网络模型,每一条弧下面方括号里的数字代表了该弧的容量。

对应的电子表格模型见图 7.10。所用的格式和图 7.8 是一样的。但是,现在的目标单元格最大流量(D21)得到的数据是从斯图加特和柏林两个工厂运出的总流量。所以 D21 = I4 + I5(如图的底部所示的此目标单元格的公式)。

图 7.10 中的可变单元格流量(D4:D19)得到的是下个月通过每一条运输路线运输的单位数的最优解。把这个解和在图 7.8 中得到的解相比较,我们可以看到卡尔决定扩展配送网络,使之包含第二个工厂和西雅图配送中心所产生的影响。正如在两张图中的 I 列所表明的那样,运送到洛杉矶的单位数由 150 增长到 160,添加 60 单位到西雅图作为洛杉矶库存短缺的备份,这个方案不但解决了洛杉矶的危机,而且也使卡尔赢得了高层管理的称赞。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **BMZ Co. Expanded Maximum Flow Problem** | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | **From** | **To** | **Ship** | | **Capacity** | | **Nodes** | **Net Flow** | | **Supply/Demand** |
| 4 | | Stuttgart | Rotterdam | 40 | ≤ | 50 | | Stuttgart | 140 | | |
| 5 | | Stuttgart | Bordeaux | 70 | ≤ | 70 | | Berlin | 80 | | |
| 6 | | Stuttgart | Lisbon | 30 | ≤ | 40 | | Hamburg | 0 | = | 0 |
| 7 | | Berlin | Rotterdam | 20 | ≤ | 20 | | Rotterdam | 0 | = | 0 |
| 8 | | Berlin | Hamburg | 60 | ≤ | 60 | | Bordeaux | 0 | = | 0 |
| 9 | | Rotterdam | New York | 60 | ≤ | 60 | | Lisbon | 0 | = | 0 |
| 10 | | Bordeaux | New York | 30 | ≤ | 40 | | Boston | 0 | = | 0 |
| 11 | | Bordeaux | New Orleans | 40 | ≤ | 50 | | New York | 0 | = | 0 |
| 12 | | Lisbon | New Orleans | 30 | ≤ | 30 | | New Orleans | 0 | = | 0 |
| 13 | | Hamburg | New York | 30 | ≤ | 30 | | Los Angeles | -160 | | |
| 14 | | Hamburg | Boston | 30 | ≤ | 40 | | Seattle | -60 | | |
| 15 | | New Orleans | Los Angeles | 70 | ≤ | 70 | | | | | |
| 16 | | New York | Los Angeles | 80 | ≤ | 80 | | | | | |
| 17 | | New York | Seattle | 40 | ≤ | 40 | | | | | |
| 18 | | Boston | Los Angeles | 10 | ≤ | 10 | | | | | |
| 19 | | Boston | Seattle | 20 | ≤ | 20 | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | Maximum Flow | 220 | | | | | | | |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: MaxFlow

Equal To: ● Max ○ Min ○

By Changing Cells:

Ship

Subject to the Constraints:

$I$6:$I$12 = SupplyDemand

Ship <= Capacity

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Capacity | F4:F19 |
| From | B4:B19 |
| MaxFlow | D21 |
| NetFlow | I4:I14 |
| Nodes | H4:H14 |
| Ship | D4:D19 |
| SupplyDemand | K6:K12 |
| To | C4:C19 |

| | I |
|---|---|
| 3 | Net Flow |
| 4 | =SUMIF(From,H4,Ship)-SUMIF(To,H4,Ship) |
| 5 | =SUMIF(From,H5,Ship)-SUMIF(To,H5,Ship) |
| 6 | =SUMIF(From,H6,Ship)-SUMIF(To,H6,Ship) |
| 7 | =SUMIF(From,H7,Ship)-SUMIF(To,H7,Ship) |
| 8 | =SUMIF(From,H8,Ship)-SUMIF(To,H8,Ship) |
| 9 | =SUMIF(From,H9,Ship)-SUMIF(To,H9,Ship) |
| 10 | =SUMIF(From,H10,Ship)-SUMIF(To,H10,Ship) |
| 11 | =SUMIF(From,H11,Ship)-SUMIF(To,H11,Ship) |
| 12 | =SUMIF(From,H12,Ship)-SUMIF(To,H12,Ship) |
| 13 | =SUMIF(From,H13,Ship)-SUMIF(To,H13,Ship) |
| 14 | =SUMIF(From,H14,Ship)-SUMIF(To,H14,Ship) |

| | C | D |
|---|---|---|
| 21 | Maximum Flow | =I4+I5 |

**图 7.10**　这是最大流问题变体的扩展的 BMZ 问题的电子表格模型，有斯图加特和柏林两个源，洛杉矶和西雅图两个收点。用目标单元格最大流量(D21)表示从两个源到收点的最大流量，用 Solver 软件获得的最优解在可变单元格流量(D4:D19)中显示。

## 一些实际应用

当管理者的目标是使流量最大而不是成本最低时，最大流问题以及经过变形的最大流问题的应用和前面章节中所描述的最小费用流问题有些类似。下面是一些典型的应用。

1. 通过配送网络的流量最大，如 BMZ 问题。
2. 通过从供应商到处理设施的公司供应网络的流量最大。
3. 通过管道运输系统的油的流量最大。

4. 最大化通过输水系统的水的流量。
5. 通过交通网络的车辆的流量最大。

### 解决非常大型的问题

图 7.9 中 BMZ 问题的扩展网络有 11 个节点和 16 条弧。但是,大多数实际应用的网络规模要大得多,有时极为庞大。由于节点和弧的数量变为几十万个,在图 7.8 和图 7.10 中介绍的构建和解决方法很快就行不通了。

幸好管理科学专家们有其他的技术来构建和解决有着几十万个节点和弧的大型问题。其中一项技术就是重新构建另一类最大流问题,从而使得某种特别有效的最大流问题的特殊算法依然能够应用。另外一项技术是重新构建问题使其合乎最小费用问题的形式,从而使得可以应用网络单纯形法。这些特殊的算法可以在某些软件包中获得,Excel Solver 软件中是没有的。因此,如果你遇到最大流问题或它的一种变形在 Excel Solver 范围内不能解决(在这本书中不会遇到这种情况),请你放心,它也许可以由某一胜任的管理科学专家通过别的方法进行设计并获得解决。

### 问题回顾

1. 最大流问题的目标和最小费用流问题的目标有什么不同?
2. 什么是最大流问题的源和收点? 对于这两种节点而言,它们各自所有弧指向哪个方向?
3. 有哪两种等价的方法用来计算从源流入收点的总流量?
4. 最大流问题的源和收点与最小费用流问题的供应点和需求点有哪两个方面的区别?
5. 有哪些最大流问题的典型应用?

## 7.4 最短路问题

最短路问题的最普遍的应用是如同其名字一样在两个点之间寻找最短路。我们举例来说明。

### 例子:里特城的消防队问题

里特城(Littletown)是一个农村的小镇。它的消防队要为包括许多农场社区在内的大片地区提供服务。在这个地区里有很多的路,从消防站到任何一个社区都有很多条路线。因为时间是到达火灾发生点的主要因素,所以消防队队长希望事先能够确定从消防站到每一个农场社区的最短路。

图 7.11 标示了连接消防站和其中一个农场社区的道路系统,图中包含了每条路的英里数。你能够找到从消防站到这个农场社区的最短的路线吗?

#### 里特城问题的模型构建

图 7.12 给出了该问题的网络规划,图中忽略了布局中路的弯曲。这个网络模型就是表示最短路问题的常用方法。岔路口现在用网络的节点表示,消防站和农场社区是另外两个

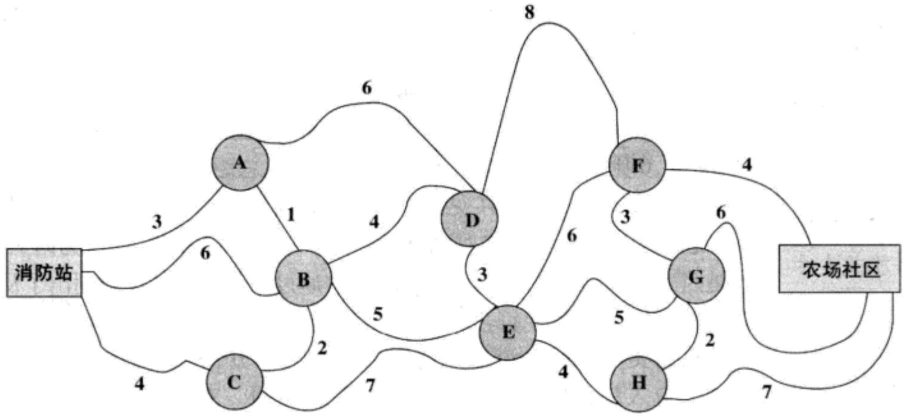



图 7.11　里特城的消防站和某一农场社区间的道路系统，其中，A，B，…，H 是交叉口，每条路旁边的数字表示单位为英里的距离。

节点，分别标为 O（表示源）和 T（表示目标地）。由于行进（流）可以朝着两个节点之间的任一方向，因此在这里连接节点的连线叫作边[①]（Links）而不是弧。两个节点中的边允许双向流动，而弧仅允许沿着箭头指示的方向流动，所以图 7.12 中是用边而不是弧（注意，边的两端都没有箭头）。

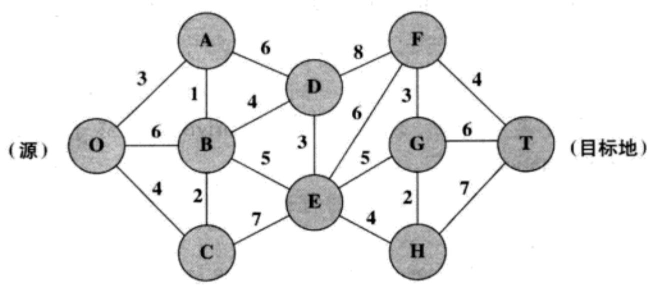



图 7.12　作为最短路问题的图 7.11 的网络规划。

> 最短路问题是找到沿着一系列两节点之间的边从源到目标地之间的最短路。

你找到了从源到目标地之间的最短路了吗？（在阅读下面内容以前先试试看。）这条最短路就是：

O→A→B→E→F→T

全程共长 19 英里。

这个问题（和任意一个最短路问题一样）可以认为是最小费用流问题（7.1 节）的一种特殊类型，在这里，行进的英里数可以被解释为网络中流的成本，从消防站到这个农场社区的某一行程可以解释为所选择的网络路径中流量为 1 的流。所以，使得该流成本最小就等价于使得该路线的行程英里数最小。消防站看成是一个供应量为 1 的供应点，代表此次行程的开始。农场社区看成是需求量为 1 的需求点，代表此次行程的结束。因为图 7.12 中所

① 有时候它的另外一个名字叫作无向弧（undirected arc），但是我们不使用这个术语。

有其余的节点都是转运点，所以每一个所产生的净流量为0。

这个表格模型就如没有容量限制的最小费用问题，除了用距离代替单位成本，所选路用流量1表示。

图7.13根据这一解释给出了电子表格模型。除了没有了弧的容量限制以及用以英里为单位表示距离的列代替表示单位成本的列以外，它的形式基本上与图7.5构建的最小费用流问题相同。可变单元格所选路(D4:D27)给出流量为1，表示了对应的弧被选为从消防站到这个农场的路，反之，0则表示没有被选中。目标单元格总距离(D29)给出了该路线以英里为单位的总距离(见图6.13底部该单元格内的等式)。B列和C列一起两次列出了图7.12所有垂直连接，一次为向下的弧，一次为向上的弧，这是因为在所选的路上，两个方向都允许通过。其他的连接只列出了从左到右的弧，因为这是惟一符合从源到目标地要选择最短路要求的方向。

K列显示了每个节点需要产生的净流量。使用该图底部的方程式后，将I列每一个单元格都加上流出量并减去流入量，得到通过该节点的实际净流量。对应的限制条件，即节点(H4: H13) = 供给需求(K4:K13)，在Solver的对话框里进行定义。

所选路(D4:D27)给出的解是点击Solver按钮后得到的最优解。虽然我们也可以用特殊算法来解决最短路问题，而且也非常有效，但Excel Solver软件中没有这些算法。用电子表格构建并用Solver软件来解决像里特城问题这种规模和较之稍微大一点规模的问题是很好的，但是你必须注意到规模非常大的问题仍然需要用其他的方法来解决。

## 一般特征

除了超出本书范围的更复杂的变形以外，所有最短路问题都具有里特城问题所具有的特征。下面是基本假设。

**最短路问题的假设**

1. 在网络中选择一条路，这条路始于某一节点，这节点叫作源(origin)；它终于另一个节点，这个节点叫作目标地(destination)。
2. 连接两个节点的连线通常叫作边(允许任一个方向的行进)，虽然也允许存在弧(只允许沿着一个方向行进)。
3. 和每条边相关的一个非负数，叫作该边的长度(length)(注意，在网络中，除了在边的旁边标明了其长度的准确数字以外，所画的每一条边的长度并不表明其真实的长度)。
4. 目标是为了寻找从源到目标地的最短路(总长度最小的路)。

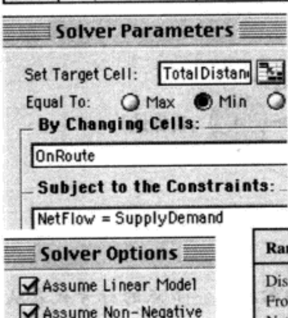
## 一些实际应用

不是所有的最短路问题都涉及要找从源到目标地的最短行进距离。事实上，它们可能根本不涉及行进。边(或弧)可能代表了其他类型的活动，所以选择网络中的路和选择最佳的序列活动相对应。例如，表示边的“长度”的数字可能表示活动的成本，在这种情况下，该问题的目标就是确定使得这一系列活动的总成本最小。

下面是最短路问题应用的三种类型。

1. 行进的总距离最小，如在里特城的例子中。
2. 一系列活动的总成本最小，如在接下来的一个例子里。
3. 一系列活动的总时间最小，如在稍后的奎克公司的例子里。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Littletown Fire Department Shortest Path Problem | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | From | To | On Route | | Distance | | Nodes | Net Flow | | Supply/Demand |
| 4 | | Fire St. | A | 1 | | 3 | | Fire St. | 1 | = | 1 |
| 5 | | Fire St. | B | 0 | | 6 | | A | 0 | = | 0 |
| 6 | | Fire St. | C | 0 | | 4 | | B | 0 | = | 0 |
| 7 | | A | B | 1 | | 1 | | C | 0 | = | 0 |
| 8 | | A | D | 0 | | 6 | | D | 0 | = | 0 |
| 9 | | B | A | 0 | | 1 | | E | 0 | = | 0 |
| 10 | | B | C | 0 | | 2 | | F | 0 | = | 0 |
| 11 | | B | D | 0 | | 4 | | G | 0 | = | 0 |
| 12 | | B | E | 1 | | 5 | | H | 0 | = | 0 |
| 13 | | C | B | 0 | | 2 | | Farm Com. | -1 | = | -1 |
| 14 | | C | E | 0 | | 7 | | | | | |
| 15 | | D | E | 0 | | 3 | | | | | |
| 16 | | D | F | 0 | | 8 | | | | | |
| 17 | | E | D | 0 | | 3 | | | | | |
| 18 | | E | F | 1 | | 6 | | | | | |
| 19 | | E | G | 0 | | 5 | | | | | |
| 20 | | E | H | 0 | | 4 | | | | | |
| 21 | | F | G | 0 | | 3 | | | | | |
| 22 | | F | Farm Com. | 1 | | 4 | | | | | |
| 23 | | G | F | 0 | | 3 | | | | | |
| 24 | | G | H | 0 | | 2 | | | | | |
| 25 | | G | Farm Com. | 0 | | 6 | | | | | |
| 26 | | H | G | 0 | | 2 | | | | | |
| 27 | | H | Farm Com. | 0 | | 7 | | | | | |
| 28 | | | | | | | | | | | |
| 29 | | | Total Distance | 19 | | | | | | | |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| Distance | F4:F27 |
| From | B4:B27 |
| NetFlow | I4:I13 |
| Nodes | H4:H13 |
| OnRoute | D4:D27 |
| SupplyDemand | K4:K13 |
| To | C4:C27 |
| TotalDistance | D29 |

| | I |
|---|---|
| 3 | Net Flow |
| 4 | =SUMIF(From,H4,OnRoute)-SUMIF(To,H4,OnRoute) |
| 5 | =SUMIF(From,H5,OnRoute)-SUMIF(To,H5,OnRoute) |
| 6 | =SUMIF(From,H6,OnRoute)-SUMIF(To,H6,OnRoute) |
| 7 | =SUMIF(From,H7,OnRoute)-SUMIF(To,H7,OnRoute) |
| 8 | =SUMIF(From,H8,OnRoute)-SUMIF(To,H8,OnRoute) |
| 9 | =SUMIF(From,H9,OnRoute)-SUMIF(To,H9,OnRoute) |
| 10 | =SUMIF(From,H10,OnRoute)-SUMIF(To,H10,OnRoute) |
| 11 | =SUMIF(From,H11,OnRoute)-SUMIF(To,H11,OnRoute) |
| 12 | =SUMIF(From,H12,OnRoute)-SUMIF(To,H12,OnRoute) |
| 13 | =SUMIF(From,H13,OnRoute)-SUMIF(To,H13,OnRoute) |

| | C | D |
|---|---|---|
| 29 | Total Distance | =SUMPRODUCT(OnRoute,Distance) |

图 7.13　里特城消防的最短路问题的电子表格模型，包括目标单元格总距离（D29）和其他输出单元格供给需求（K4:K13）的公式。其中可变单元格所选路（D4:D27）的值 1 表示通过 Solver 得到最优解，从消防站到农场社区的最短路的总距离为 19 英里。

## 使总成本最小的例子

莎拉刚刚高中毕业。在毕业典礼上，她的父母给了她 21000 美元的汽车基金帮助她购

买并保养一辆使用了三年的二手车，以供她上大学使用。由于开车费用和维修费用随着汽车的老化而飞速上涨，所以莎拉的父母告诉她在接下来的三个夏天里，她也可以一次或几次折价将她的汽车置换为其他使用了三年的二手车。如果她觉得这样做可以使她的总净成本最小的话，他们会同意她这样做的。他们也告诉莎拉，在四年后，他们会送给她一辆新车作为大学毕业的礼物。所以，莎拉到那时肯定要计划把旧车折价卖出。（这样的父母真不错！）

表 7.2 给出了每一个时期莎拉购买一辆使用了三年的二手车的相关数据。例如，如果她两年后折价卖掉自己的车，那么在三年级时她就对下一辆车有 1 年的所有权，其他情况以此类推。

**表 7.2　莎拉每个时期购买一辆使用了三年的二手车的数据**

| 购买价格 | 拥有年份的开车和保养的费用（美元） | | | | 最后一年卖出的价值（美元） | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 12000 | 2000 | 3000 | 4500 | 6500 | 8500 | 6500 | 4500 | 3000 |

在接下来的三个夏天里，什么时候莎拉应该折价卖掉她的汽车（如果有必要的话）可以使得她在大学四年里买车、开车、保养汽车的总费用最小？

图 7.14 是把这个问题看作是最短路问题的网络表述。节点 1、2、3 和 4 分别代表莎拉上大学的第一年末、第二年末、第三年末和第四年末。节点 0 表示现在，上大学以前。从一个节点到另一个节点的每一条弧表示了在第一个节点这个时间里买车的活动，然后在第二个节点的那个时间把车折价卖出。因为莎拉现在开始买车，后来在第四年末将把车卖掉，所以节点 0 是源，节点 4 是目标地。

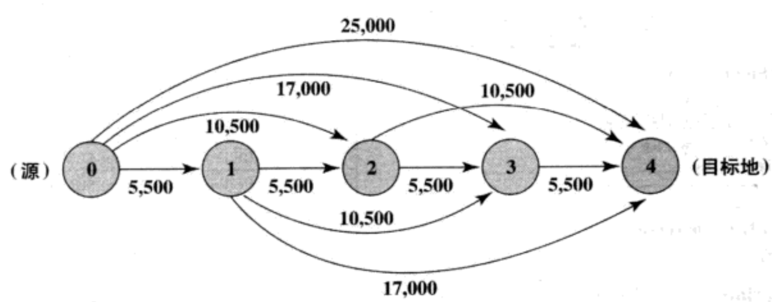
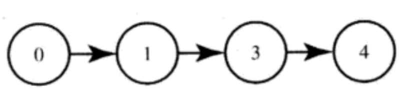



**图 7.14**　当把莎拉什么时候应该折价购车看成是一个最短路问题时问题的描述。节点的标号代表从现在开始计算的年份，每一条弧代表了购车然后又折价卖出。

从源到目标地所选择的弧的数量表明莎拉将会多少次买车和折价卖车。例如，我们来考虑一下这条路：




它表示了现在开始购车，然后一年末把它折价卖掉去买第二辆车，接着在第三年末又把第二辆车折价卖掉去买第三辆车，最后在第四年又把第三辆车折价卖出。

由于莎拉希望她从现在（节点 0）到第四年末（节点 4）的总费用最小，每一条弧的长度都需要计算买车、保养、折价卖车的净费用。所以：

弧长 = 买车的价格 + 使用和保养的费用 − 折价卖出的价值

例如，我们来考虑从节点1到节点3的弧。这条弧对应的是在第一年末买车、使用和保养，然后在拥有了两年后把它折价卖掉。所以：

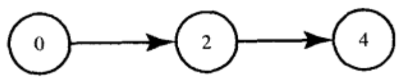
从①到③的弧长 = 12000 + 2000 + 3000 − 6500
= 10500(美元)

网络中任意一条路的所有的弧加起来的长度就是置换计划的总净费用。

通过这种方法计算出来的弧长都标在图7.14中弧的旁边。将从节点0到节点4任意一条路的所有的弧加起来，就得到了在接下来的四年里特定旧车置换计划的总净费用。因此，通过寻求从源到目标地的最短路，我们将得到使得莎拉的总净费用最小的方案。

目标单元格现在是总成本，而不是总距离。

图7.15给出了相应的电子表格模型。和图7.13相比，除了原来的距离变成了现在的费用以外，这两个模型是一样的。因此，目标单元格总成本(D23)现在给出了最小总费用。图中的可变单元格所选路(D12:D21)显示的最优解是通过点击 Solver 按钮后得到的。由于1表明了要经过的路径，那么最短路是：




在第二年末把第一辆车折价卖掉。

在第四年末把第二辆车折价卖掉。

这条路的长度为 10500 + 10500 = 21000。所以，正如目标单元格所给出的结果，莎拉的总净费用为21000美元。回想一下这个数额恰好等于莎拉的父母给莎拉提供的买车资金。(这样的父母实在是太棒了！)

## 使总时间最小化的例子

奎克(Quick)公司获悉它的一个竞争对手计划将把一种很有销售潜力的新产品投放市场。奎克公司也一直在研制一种类似的产品，并计划在20个月后投放市场。但是，研究临近结束，奎克公司的管理者希望迅速推出产品去参与竞争。

现在还有四个没有时间重叠的阶段没有完成，包括正以正常速度进行剩下的研究工作(第一阶段)。然而，每个阶段的实施水平可以从正常水平提高为优先水平或应急水平，使之能够加速完成，而且最后三个阶段中都可以考虑提高实施水平。第一阶段可以以正常速度也可以加速完成。表7.3列出了在这些水平下所需要的时间。

管理层现在已经给这四个阶段拨款3000万美元。每个阶段的费用如表7.4所示。

**表7.3 准备奎克新产品的各阶段所需时间**

| 水平 | 剩下的研究 | 研制 | 制造系统设计 | 开始生产和分销 |
|---|---|---|---|---|
| 正常 | 5个月 | — | — | — |
| 优先 | 4个月 | 3个月 | 5个月 | 2个月 |
| 应急 | 2个月 | 2个月 | 3个月 | 1个月 |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Sarah's Car Purchasing Problem | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Operating & | Trade-in Value at End | Purchase | | | | | |
| 4 | | | Maint. Cost | of Year | Price | | | | | |
| 5 | | Year 1 | $2,000 | $8,500 | $12,000 | | | | | |
| 6 | | Year 2 | $3,000 | $6,500 | | | | | | |
| 7 | | Year 3 | $4,500 | $4,500 | | | | | | |
| 8 | | Year 4 | $6,500 | $3,000 | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | | From | To | On Route | Cost | | Nodes | Net Flow | | Supply/Demand |
| 12 | | Year 0 | Year 1 | 0 | $5,500 | | Year 0 | 1 | = | 1 |
| 13 | | Year 0 | Year 2 | 1 | $10,500 | | Year 1 | 0 | = | 0 |
| 14 | | Year 0 | Year 3 | 0 | $17,000 | | Year 2 | 0 | = | 0 |
| 15 | | Year 0 | Year 4 | 0 | $25,000 | | Year 3 | 0 | = | 0 |
| 16 | | Year 1 | Year 2 | 0 | $5,500 | | Year 4 | -1 | = | -1 |
| 17 | | Year 1 | Year 3 | 0 | $10,500 | | | | | |
| 18 | | Year 1 | Year 4 | 0 | $17,000 | | | | | |
| 19 | | Year 2 | Year 3 | 0 | $5,500 | | | | | |
| 20 | | Year 2 | Year 4 | 1 | $10,500 | | | | | |
| 21 | | Year 3 | Year 4 | 0 | $5,500 | | | | | |
| 22 | | | | | | | | | | |
| 23 | | | Total Cost | $21,000 | | | | | | |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Cost | E12:E21 |
| From | B12:B21 |
| NetFlow | H12:H16 |
| Nodes | G12:G16 |
| OnRoute | D12:D21 |
| OpMaint1 | C5 |
| OpMaint2 | C6 |
| OpMaint3 | C7 |
| OpMaint4 | C8 |
| PurchasePrice | E5 |
| SupplyDemand | J12:J16 |
| To | C12:C21 |
| TotalCost | D23 |
| TradeIn1 | D5 |
| TradeIn2 | D6 |
| TradeIn3 | D7 |
| TradeIn4 | D8 |

| | E |
|---|---|
| 11 | Cost |
| 12 | =PurchasePrice+OpMaint1-TradeIn1 |
| 13 | =PurchasePrice+OpMaint1+OpMaint2-TradeIn2 |
| 14 | =PurchasePrice+OpMaint1+OpMaint2+OpMaint3-TradeIn3 |
| 15 | =PurchasePrice+OpMaint1+OpMaint2+OpMaint3+OpMaint4-TradeIn4 |
| 16 | =PurchasePrice+OpMaint1-TradeIn1 |
| 17 | =PurchasePrice+OpMaint1+OpMaint2-TradeIn2 |
| 18 | =PurchasePrice+OpMaint1+OpMaint2+OpMaint3-TradeIn3 |
| 19 | =PurchasePrice+OpMaint1-TradeIn1 |
| 20 | =PurchasePrice+OpMaint1+OpMaint2-TradeIn2 |
| 21 | =PurchasePrice+OpMaint1-TradeIn1 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalCost

Equal To: ○ Max ◉ Min ○

By Changing Cells:

OnRoute

Subject to the Constraints:

NetFlow = SupplyDemand

| | H |
|---|---|
| 11 | Net Flow |
| 12 | =SUMIF(From,G12,OnRoute)-SUMIF(To,G12,OnRoute) |
| 13 | =SUMIF(From,G13,OnRoute)-SUMIF(To,G13,OnRoute) |
| 14 | =SUMIF(From,G14,OnRoute)-SUMIF(To,G14,OnRoute) |
| 15 | =SUMIF(From,G15,OnRoute)-SUMIF(To,G15,OnRoute) |
| 16 | =SUMIF(From,G16,OnRoute)-SUMIF(To,G16,OnRoute) |

| | C | D |
|---|---|---|
| 23 | Total Cost | =SUMPRODUCT(OnRoute,Cost) |

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

图7.15 莎拉问题作为最短路问题的电子表格模型,目标是使总成本而不是总距离最小。图底部标出目标单元格总成本(D23)和其他输出单元格成本(E12:E21)以及净流量(H12:H16)的公式。其中可变单元格所选路(D12:D21)的值1表示通过 Solver 得到的最优解,显示这条最短(最便宜)路的总费用结果。

**表 7.4 准备奎克新产品各阶段的费用(单位:万美元)**

| 水 平 | 剩下的研究 | 研 制 | 制造系统设计 | 开始生产和分销 |
|---|---|---|---|---|
| 正常 | 300 | — | — | — |
| 优先 | 600 | 600 | 900 | 300 |
| 应急 | 900 | 900 | 1200 | 600 |

管理层希望确定这四个阶段各自应该采取哪一种水平,从而在 3000 万美元预算限制内,使得这种产品可以尽早推向市场。

图 7.16 显示了将这个问题作为最短路问题的网络规划。每一个节点代表了那个时间点的情况。除了目标地以外,每个节点由两个数字表示。

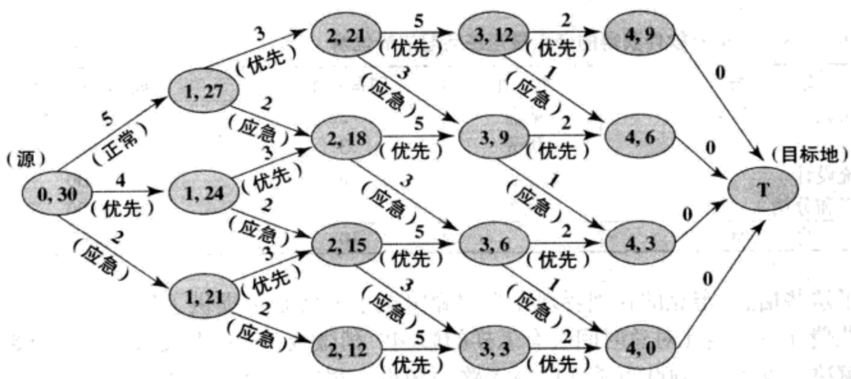



**图 7.16** 将奎克公司的问题作为最短路问题的描述。除了虚拟目标地以外,弧的标签上第一个数字代表完成的阶段;第二个数字代表剩下阶段资金的剩余(单位:百万美元)。每条弧都给出了完成这个阶段所需要的时间(单位:月)。

1. 已经完成的阶段数目。
2. 剩下阶段剩余的资金量,单位:百万美元。

> 网络中的所有弧长表示准备新产品计划的总耗时。

源代表现在,即阶段 0 已完成,还余下全部的 3000 万美元的预算。每条弧代表了那个阶段某一特定努力水平(在弧下的圆括号内注明)的选择。在这个努力水平下完成这个阶段所需要的时间(单位:月),用弧的长度(在弧的上方标明)表示。选择时间作为弧长的尺度是因为目标是为了使得所有四个阶段所花费的总时间最小。把网络中某一条路的所有弧长度加起来就得到了对应这条路的方案的总时间。因此,网络中的最短路就是使得完成所有阶段的总时间最短的方案。

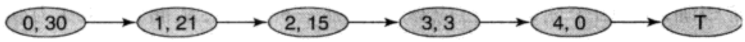
一旦四个节点中任一个节点标签的第一个数字为 4,所有四个阶段就完成了。那么为什么这个网络不是终结于这四个节点,而是又在每个节点各引出一条弧呢?因为最短路问题有且仅有一个目标地。所以,我们在右边加上了一个虚拟目标地。

当网络中实际行进在多于一个节点结束时,我们在每个这样的节点和**虚拟目标地**(dummy destination)之间插入一条长度为 0 的弧,从而使得网络中仍然只有一个目标地。

> 目标单元格现在是总时间，而不是总距离。

因为指向虚拟目标地的每一条弧的长度都为 0，对网络的这些改动不会影响从源到终点的总路长。

图 7.17 显示了该问题的电子表格模型。它的格式和图 7.13 与图 7.15 是一样的，除了在 F 列和目标单元格总时间（D32）中所涉及到的数量是时间而不是距离或费用。点击 Solver 的按钮以后，可变单元格所选路（D4:D30）表明了哪些弧位于使得总时间最短的路上。因此，最短路为：




总长为 2 + 3 + 3 + 2 + 0 = 10（个月），如单元总时间（D32）所示。完成这四个阶段的最终方案见表 7.5。虽然这个方案花费了整个总预算 3000 万美元，但是它的确缩短了产品推向市场前的这段时间，从原来计划的 20 个月缩短到仅仅 10 个月。

**表 7.5 通过 Excel Solver 软件获得的奎克最短路问题的最优解**

| 阶 段 | 水 平 | 时间（月） | 成本（万美元） |
|---|---|---|---|
| 剩下的研究 | 应急 | 2 | 900 |
| 研制 | 优先 | 3 | 600 |
| 制造系统设计 | 应急 | 3 | 1200 |
| 开始生产和分销 | 优先 | 2 | 300 |
| 合 计 | | 10 | 3000 |

有了这些信息，奎克的管理者现在必须确定这个方案是否提供了最佳的时间—成本平衡。多花费几百万美元对总时间会有怎样的影响？稍微减少一些开支会有怎样的影响？通过迅速解决预算不是 3000 万美元的最短路问题也会很容易为管理者提供这些信息。最终哪一个方案提供了最佳时间—成本平衡的决策只有管理者能够作出。

## 问题回顾

1. 在里特城消防队的例子中，什么是源和目标地？
2. 弧和边两者之间的差别在哪里？
3. 当最短路问题被解释为最小费用流问题时，什么是供应点和需求点？供应什么？需求什么？
4. 相应产生了最短路问题应用的三种类型的边（或弧）的长度的三种测量方法是什么？
5. 莎拉最短路问题的目标是什么？
6. 什么时候最短路问题的构建需要添加虚拟目标地？
7. 在作出如何加速使其新产品推入市场的最后决策时，奎克公司的管理者需要考虑哪一种类型的平衡？

# 7.5 最小支撑树问题

> 现在只有网络节点，问题是设计网络中要加入哪些边。

本章重点放在网络表示的问题上。迄今为止，有了节点和边（或弧），网络已经很完善了。

现在，我们把注意力转移到另一个不同类型的问题上，这种问题的目标是设计网络。虽然节点已经给出，但是我们必须决定在网

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Quick Co. Product Development Scheduling Problem | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | From | To | On Route | | Time | | Nodes | Net Flow | | Supply/Demand |
| 4 | | (0, 30) | (1, 27) | 0 | | 5 | | (0, 30) | 1 | = | 1 |
| 5 | | (0, 30) | (1, 24) | 0 | | 4 | | (1, 27) | 0 | = | 0 |
| 6 | | (0, 30) | (1, 21) | 1 | | 2 | | (1, 24) | 0 | = | 0 |
| 7 | | (1, 27) | (2, 21) | 0 | | 3 | | (1, 21) | 0 | = | 0 |
| 8 | | (1, 27) | (2, 18) | 0 | | 2 | | (2, 21) | 0 | = | 0 |
| 9 | | (1, 24) | (2, 18) | 0 | | 3 | | (2, 18) | 0 | = | 0 |
| 10 | | (1, 24) | (2, 15) | 0 | | 2 | | (2, 15) | 0 | = | 0 |
| 11 | | (1, 21) | (2, 15) | 1 | | 3 | | (2, 12) | 0 | = | 0 |
| 12 | | (1, 21) | (2, 12) | 0 | | 2 | | (3, 12) | 0 | = | 0 |
| 13 | | (2, 21) | (3, 12) | 0 | | 5 | | (3, 9) | 0 | = | 0 |
| 14 | | (2, 21) | (3, 9) | 0 | | 3 | | (3, 6) | 0 | = | 0 |
| 15 | | (2, 18) | (3, 9) | 0 | | 5 | | (3, 3) | 0 | = | 0 |
| 16 | | (2, 18) | (3, 6) | 0 | | 3 | | (4, 9) | 0 | = | 0 |
| 17 | | (2, 15) | (3, 6) | 0 | | 5 | | (4, 6) | 0 | = | 0 |
| 18 | | (2, 15) | (3, 3) | 1 | | 3 | | (4, 3) | 0 | = | 0 |
| 19 | | (2, 12) | (3, 3) | 0 | | 5 | | (4, 0) | 0 | = | 0 |
| 20 | | (3, 12) | (4, 9) | 0 | | 2 | | (T) | -1 | = | -1 |
| 21 | | (3, 12) | (4, 6) | 0 | | 1 | | | | | |
| 22 | | (3, 9) | (4, 6) | 0 | | 2 | | | | | |
| 23 | | (3, 9) | (4, 3) | 0 | | 1 | | | | | |
| 24 | | (3, 6) | (4, 3) | 0 | | 2 | | | | | |
| 25 | | (3, 6) | (4, 0) | 0 | | 1 | | | | | |
| 26 | | (3, 3) | (4, 0) | 1 | | 2 | | | | | |
| 27 | | (4, 9) | (T) | 0 | | 0 | | | | | |
| 28 | | (4, 6) | (T) | 0 | | 0 | | | | | |
| 29 | | (4, 3) | (T) | 0 | | 0 | | | | | |
| 30 | | (4, 0) | (T) | 1 | | 0 | | | | | |
| 31 | | | | | | | | | | | |
| 32 | | | Total Time | 10 | | | | | | | |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| From | B4:B30 |
| NetFlow | I4:I20 |
| Nodes | H4:H20 |
| OnRoute | D4:D30 |
| SupplyDemand | K4:K20 |
| Time | F4:F30 |
| To | C4:C30 |
| TotalTime | D32 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalTime

Equal To: ○ Max ● Min ○

By Changing Cells:

OnRoute

Subject to the Constraints:

NetFlow = SupplyDemand

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| | I |
|---|---|
| 3 | Net Flow |
| 4 | =SUMIF(From,H4,OnRoute)-SUMIF(To,H4,OnRoute) |
| 5 | =SUMIF(From,H5,OnRoute)-SUMIF(To,H5,OnRoute) |
| 6 | =SUMIF(From,H6,OnRoute)-SUMIF(To,H6,OnRoute) |
| 7 | =SUMIF(From,H7, OnRoute)-SUMIF(To,H7,OnRoute) |
| 8 | =SUMIF(From,H8,OnRoute)-SUMIF(To,H8,OnRoute) |
| 9 | =SUMIF(From,H9,OnRoute)-SUMIF(To,H9,OnRoute) |
| 10 | =SUMIF(From,H10,OnRoute)-SUMIF(To,H10,OnRoute) |
| 11 | =SUMIF(From,H11,OnRoute)-SUMIF(To,H11,OnRoute) |
| 12 | =SUMIF(From,H12,OnRoute)-SUMIF(To,H12,OnRoute) |
| 13 | =SUMIF(From,H13,OnRoute)-SUMIF(To,H13,OnRoute) |
| 14 | =SUMIF(From,H14,OnRoute)-SUMIF(To,H14,OnRoute) |
| 15 | =SUMIF(From,H15,OnRoute)-SUMIF(To,H15,OnRoute) |
| 16 | =SUMIF(From,H16,OnRoute)-SUMIF(To,H16,OnRoute) |
| 17 | =SUMIF(From,H17,OnRoute)-SUMIF(To,H17,OnRoute) |
| 18 | =SUMIF(From,H18,OnRoute)-SUMIF(To,H18,OnRoute) |
| 19 | =SUMIF(From,H19,OnRoute)-SUMIF(To,H19,OnRoute) |
| 20 | =SUMIF(From,H20,OnRoute)-SUMIF(To,H20,OnRoute) |

| | C | D |
|---|---|---|
| 32 | Total Time | =SUMPRODUCT(OnRoute,Time) |

图 7.17　作为最短路问题奎克问题的电子表格模型。目标是使总时间最少，所以目标单元格是总时间(D32)，其他输出单元格是净流量(I4:I20)。可变单元格所选路(D4:D30)的值 1 显示的是通过规划求解得到的最优解。

络中要加入哪些边。特别地,向网络中插入的每一条可能的边都有成本(根据边的不同而不同)。为了使得每两个节点之间形成路,我们需要提供足够的边。目标就是以某种方法完成这个工作使得边的总成本最小。

这种问题称为最小支撑树问题,下面我们举一个例子说明这个问题。

## 例子:默登公司的问题

默登(Modern)公司的管理层已经决定铺设最先进的光导纤维网络,为它的主要中心之间提供高速通信(数据、声音和图像)。

图 7.18 中的节点显示了该公司主要中心(包括了公司的总部、巨型计算机、研究区、生产和配送中心)的分布图。虚线是铺设纤维光缆可能的位置(其他的两个中心之间也可能铺设光缆,但由于不经济已经排除在外了)。每条虚线旁边的数字表示了如果选择在这个位置铺设光缆需要花费的成本(单位:百万美元)。

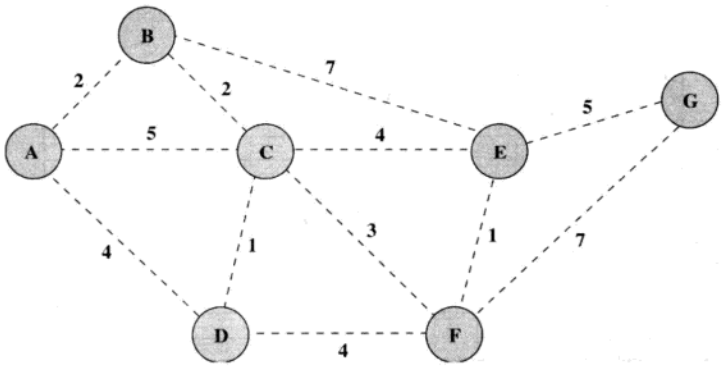



图 7.18 默登公司主要中心(节点)、纤维光缆(虚线)的可能布局和这些光缆单位为美元的成本(单位为百万美元)的显示。

为了充分利用光纤技术在中心之间高速通信的优势,不需要在每两个中心之间都用一条光缆把它们直接连接起来。那些需要光缆直接连接的中心有一系列的光缆连接它们。

现在的问题就是要确定需要铺设哪些光缆使得提供给每两个中心之间的高速通信的总成本最低。实际上,这就是一个最小支撑树问题。

图 7.19 给出了该问题的最优解,网络中的边相当于在图 7.18 中的可选光缆中应该选择铺设的光缆(注意,每两个中心之间的确有一条路)。该光纤网络所需的成本为:

$$总成本 = 2 + 2 + 1 + 3 + 1 + 5 = 14(即 1400 万美元)$$

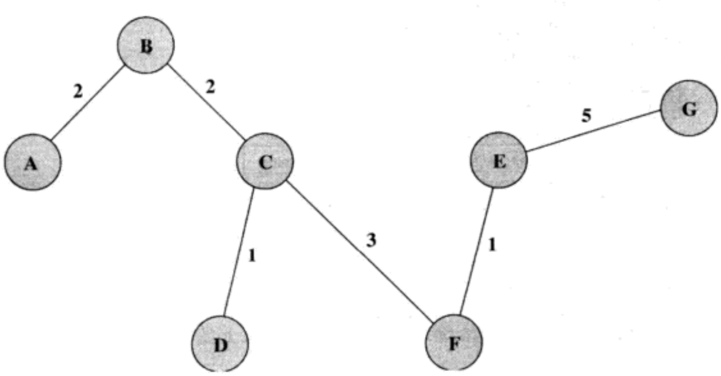



图 7.19 为默登公司最小支撑树问题提供最优解的光学纤维网络。

其他的连接每两个中心的网络设计将至少要多花费掉 100 万美元。

为什么用最小支撑树这样一个奇怪的名字呢？我们来解释一下。在网络理论的术语中，图 7.19 的网络是一棵树(tree)，这是因为它没有任何的路能够在没有返回的情况下开始和结束于同一个节点(也就是没有路构成圈)。它也是一棵支撑树(spanning tree)，因为它是一棵在任意两个节点之间都提供一条路的树(所以它支撑着所有的节点)。最后，它是一棵最小支撑树(minimum spanning tree)，因为它在所有的支撑树中总成本最小。

## 一般特征

就像默登公司的问题一样，所有的最小支撑树问题满足以下的假设。

**最小支撑树问题的假设**

1. 给你网络中的节点，但没有给你边。或者，给你可供选择的边和如果把它插入到网络中后的每条边的正的成本(或者相似的度量)。
2. 在设计网络时你希望通过插入足够的边，以满足每两个节点之间都存在一条路的需要。
3. 目标是寻找一种方法，使得在满足要求的同时总成本最小。

这个问题的最优解总是一棵支撑树。这里有一种简易地辨认出支撑树的方法。

在一棵支撑树中，边的数量总是比节点的数量少一，而且，每个节点通过惟一条边和其他至少一个节点相连。

我们看到，这个网络符合图 7.19 中的支撑树，在这个图里有 6 条边和 7 个节点(所有的节点都和其他至少一个节点直接相连)。移去这些边中的任意一条，就会违背上述的假设 2(没有支撑树)。如果再添加一条边(没有移去一条)，会产生不必要的额外成本，同样你也不会得到支撑树(检验一下，从图 7.18 中选择一条没有用过的边添加到图 7.19，将会产生一条开始和结束于同一个节点而没有沿原路返回的路。这将违背树的定义)。

最后，我们需要指出的是，和运输问题、指派问题、最大流问题、最短路问题相比，最小支撑树问题不是最小费用流问题(它甚至也不是线性规划问题的特殊类型)。不仅如此，它也不能通过 Excel Solver 软件解决。

这些都是坏消息。好消息是即使不用计算机，你也可以通过下面描述的算法轻而易举地解决这类问题。

## 特别简易的算法

从网络中没有边开始，这种算法的每一步是从所有备选边中选择一条新的边插入到网络中。如下所述。继续这样的算法，直到每个节点都和边相连，这时所选择的节点就形成了一棵最小支撑树。

**最小支撑树问题的算法**

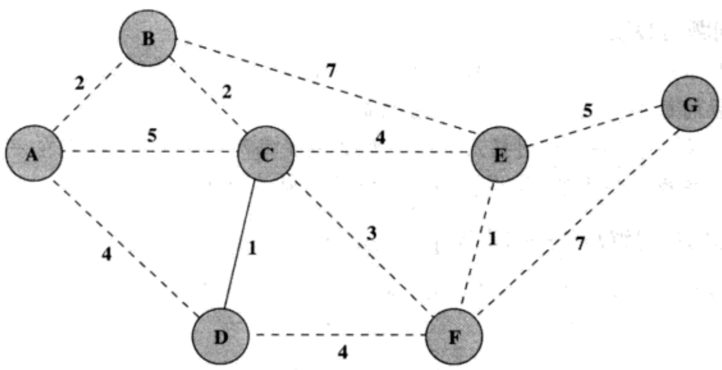
1. 选择第一条边：选择成本最低的备选边。
2. 选择下一条边：在一个已经有一条边连接的节点和另一个还没有边连接的节点之间选择成本最低的备选边。
3. 重复第二个步骤，直到所有的节点都有一条边(可能会有多于一条边)与其相连。此时就得到了最优解(最小支撑树)。

［处理成本相同的边：当有几条边同时是成本最低的边时，任意选择一条边不会影响最后的最优解。但是，在步骤 2 中出现这种情况，则表明通过任意选择其他的边也可能出现其他的最优解（这也不是必然的）。］

**这种算法在默登公司问题中的应用**

现在让我们把这种算法应用到图 7.18 所示的默登公司的最小支撑树问题里。

在所有的备选边（图中的虚线）里，因为在节点 C 和节点 D 之间的边以及节点 E 和节点 F 之间的边成本是最低的（成本为 1），所以第一步，我们需要选择其中的一条备选边为插入到网络中的第一条边。让我们选择节点 C 和节点 D 之间的边（另外一条会在后面被选中），如下所示。

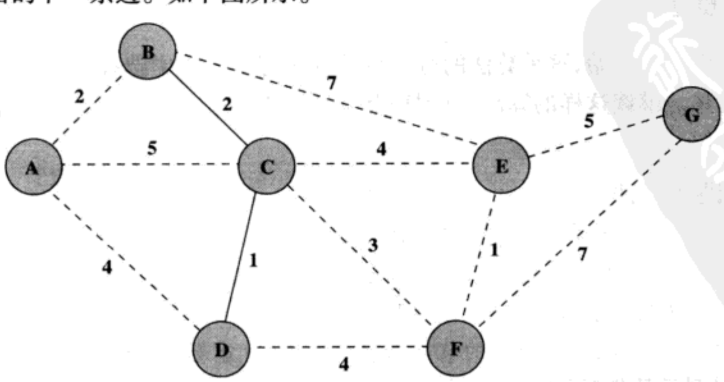



> 因为 C 和 D 之间已经有边。我们列出的是这两个节点与其他节点之间的所有可能边。其中成本最小的会加入到网络中。

其次，我们第一次应用步骤 2。由一条边连接起来的两个节点是节点 C 和 D，所以我们需要比较在这两个节点中任一个节点与还没有与边连接的节点间备选边的成本。这些备选边和它们的成本为：

Ⓒ-------Ⓑ：成本 = 2　　Ⓒ-------Ⓕ：成本 = 3
Ⓒ-------Ⓐ：成本 = 5　　Ⓓ-------Ⓐ：成本 = 4
Ⓒ-------Ⓔ：成本 = 4　　Ⓓ-------Ⓕ：成本 = 4

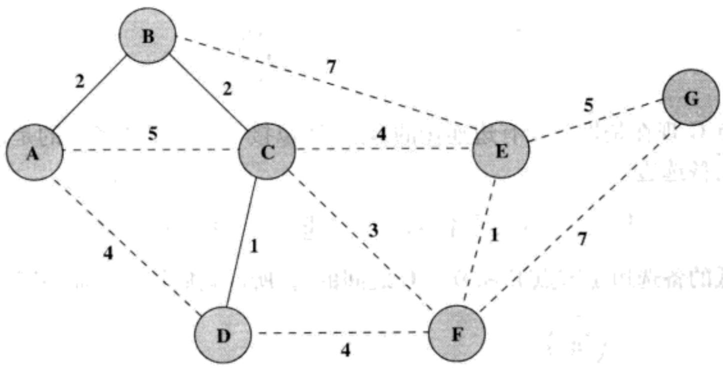
由于在这些边中成本最低的是节点 C 和节点 B 之间的边，其成本为 2，所以我们选择它作为插入网络的下一条边。如下图所示。



现在，节点 B、C 和 D 每一个都和一条边相连（或者是节点 C 和两条边相连），所以，在下一次执行步骤二时需要比较这些节点与其他节点间的备选边的成本。

| | |
|---|---|
| C------A：成本 =5 | D------A：成本 =4 |
| C------E：成本 =4 | D------F：成本 =4 |
| D------F：成本 =3 | B------A：成本 =2 |
| | B------E：成本 =7 |

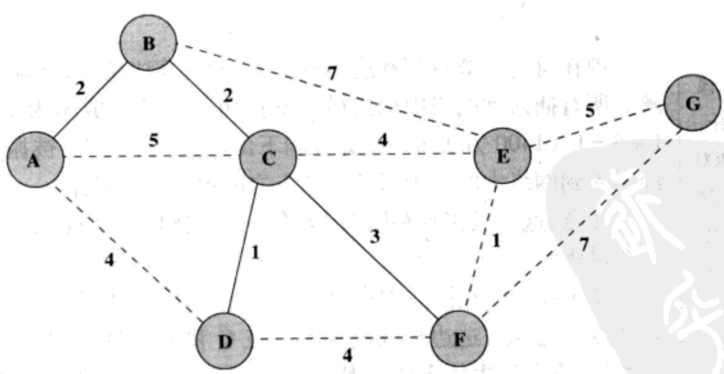
在这些备选边中成本最低的是节点 B 和节点 A 之间的边，所以，它成为下一条插入到网络中的边。




因为现在节点 B、C 和 D 都有边与其相接。所以我们接下来比较这些节点和那些还没有边连接的节点之间的备选边的成本（实际上，所有这些备选边都不会涉及节点 A，这是因为没有一条连在 A 点的边可以连接到那些没有连在边上的节点）。

| | |
|---|---|
| C------E：成本 =4 | D------F：成本 =4 |
| C------F：成本 =3 | B------E：成本 =7 |

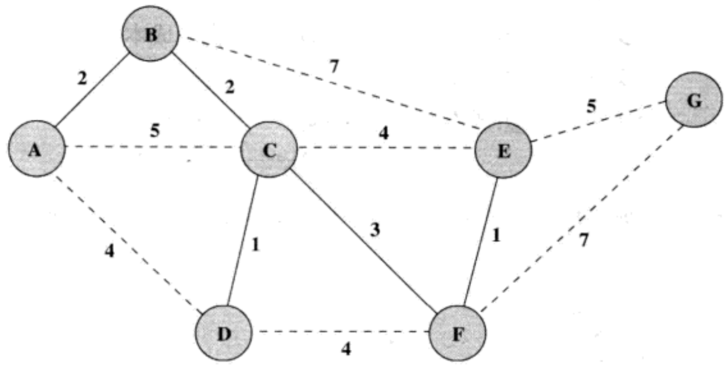
成本最低的备选边是节点 C 和节点 F 之间的边，所以将其添加到网络中。




现在除了节点 E 和节点 G 外，所有节点都和边连接上了。因此，下一步惟一需要考虑的备选边是节点 E 或节点 G 与其他节点之间的边。

| | |
|---|---|
| C------E：成本 =4 | F------E：成本 =1 |
| B------E：成本 =7 | F------G：成本 =7 |

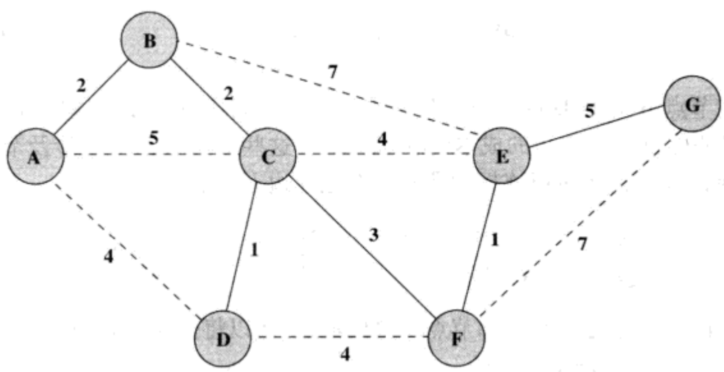
到目前为止,成本最低的备选边是节点 F 与节点 E 之间的边,所以将其添加到网络中(记得这条备选边与第一步中被选择插入到网络中的初始边成本相同)。




由于节点 G 现在是惟一没有边连接的节点,所以接下来惟一要考虑的是这个节点和其他节点之间的备选边。

Ⓕ------Ⓖ:成本 =7 Ⓔ------Ⓖ:成本 =5

成本较低的备选边是节点 E 和节点 G 之间的边,所以我们将其添加到网络中。




实线表示应该铺设的光纤,总成本为 1400 万美元。任何其他计划都至少增加 100 万美元的成本。

现在每一个节点都和边连接上了,所以算法结束,这就是我们的最优解。所有插入到网络中构成最小支撑树的边的总成本为 2 +2 +1 +3 +1 +5 =14(1400 万美元)。所有剩下的备选边(虚线)被抛弃了,因为已经插入到网络中的边为每两个节点之间提供了一条路。

注意,这个最优解和图 7.19 给出的最优解是一样的(这个问题只有一个最优解)。

如果在处理相同成本边时用另外一种方法,在第一步时选择节点 E 和节点 F 之间备选边来取代选择节点 C 和节点 D 之间的备选边作为插入网络中的第一条边的话,将会发生什么情况呢? 试试看,从这一点出发用这种算法你将发现正好是同样的边被选中,只不过和原来的选中的顺序不同罢了。

这种算法称为贪婪算法(greedy algorithm),因为它仅仅是抓住了每一步最有利的选择(最便宜的备选边),而不顾忌这个选择对后面决策所带来的影响。这么快捷而简单的思路过程依然能够保证找到最优解,实在不错。但在高兴的同时,也要留心。一般不能用贪婪算

法为其他科学管理问题找到最优解。

### 一些实际应用

在信息高速公路的时代里，与默登公司的例子类似的实际应用已经变得日益重要。不过，最小支撑树问题也有其他几种类型的应用。

1. 电信网络（计算机网络、电话专用线网络、有线电视网络等等）的设计。
2. 低负荷运输网络的设计，使得网络中提供链接的部分（如铁路、公路等等）的总成本最小。
3. 高压输电线路网络的设计。
4. 电器设备线路网络（如数字计算机系统）的设计，使得线路总长度最短。
5. 连接多个场所的管道网络设计。

### 问题回顾

1. 最小支撑树问题里，网络中的哪部分是已知的，哪部分是尚需设计的？
2. 在默登公司的例子中要设计什么样的网络？
3. 在网络理论的术语里，什么是树？什么是支撑树？什么是最小支撑树？
4. 通过怎样简易的方法辨认出支撑树？
5. 最小支撑树问题的目标是什么？
6. 最小支撑树问题是最小费用流问题的特殊类型吗？
7. 什么样的算法可以用来解决最小支撑树问题（但是很少用来解决其他管理科学的问题）？
8. 最小支撑树问题的实际应用有哪些典型的类型？

## 7.6　本章小结

一些类型的网络应用在各种各样的环境中。网络表示在描绘系统中各部分之间的关联上非常有用。在网络中，我们把代表每个部分的点叫做节点，把各部分（节点）之间的连线叫作弧（单向行进的）或边（可双向行进的）。

由于在网络中常常必须要传送某一类型的流，所以需要作出决策，使得能用最好的办法来传送流。在本章介绍的几类网络最优化模型为我们作出这些决策提供了强有力的工具。

最小费用流问题的模型在这些网络最优化模型中扮演着重要的角色。这既因为它适用性很广，又因为它求解方法很容易。Excel Solver 可以解决合理规模的电子表格模型，而网络单纯形法则可以用来解决大规模的问题，包括那些包含有几万个节点和弧的大型问题。通常最小费用流问题用于最优化货物从源点（供应点）到需要它们的地方（需求点）的网络。它的目标是在通过网络配送货物时，以最小的成本满足需求。其中一种典型的应用（在几种中）就是使得配送网络的运营最优。

最小费用流问题的特殊类型包括运输问题和指派问题（在前面一章中讨论过的），以及在本章中介绍的两种重要类型：最大流问题和最短路问题。

在给定弧容量限制的网络中，最大流问题的目标是使得从一个特定的起点（源）到一个特定的终点（收点）的总流量最大。例如，这可能涉及从公司到供应商，再通过供应网络到

达处理设施的货流量最大。

最短路问题也有始点(源)和终点(目标地),但是,它的目标是从源点到目标地寻找一条总长度最短的路。在一些实际应用中,长度指的是距离,所以最短路的目标就是总行进距离最短。但是,有一些最短路问题的应用的目标则是使得一系列活动的总成本或总时间最少。

尽管所有这些模型都是和最优化现有网络的运营相关,然而最小支撑树问题则是进行网络最优设计的相当好的模型。在这个问题中,节点是已知的,但是需要作出应该向网络中插入哪些边的决策。它的目标是使得为任意两个节点之间提供路时总成本最小。例如,当设计一个现代的电信网络从而连接公司不同的中心时,通常这就是管理者的目标。

## 专业术语

**弧**(arc):两点间箭头指向的通道,也就是流允许通过的通道。(7.1 节)

**弧的容量**(capacity of an arc):允许通过弧的最大流量。(7.1 节)

**流量守恒**(conservation of flow):流出某一节点的流量等于流入该节点的流量。(7.1 节)

**需求点**(demand node):某一节点中产生的净流量(流出减去流入)是一个确定的负数,也就是流在那里被吸收了。(7.1 节)

**目标地**(destination):在最短路问题中被假设为网络行进终点的节点。(7.4 节)

**虚拟的目标地**(dummy destination):在拥有多个可能的终点的最短路问题的描述中,为了满足只有一个目标地的要求而引入的一个虚构的目标地。(7.4 节)

**贪婪算法**(greedy algorithm):仅仅抓住每一步最有利的选择而不顾忌这个选择对以后的决策所造成的影响的一种算法。(7.5 节)

**边或弧的长度**(length of a link or arc):在最短路问题中,包含在被选择的路的弧或边相关的数字(特别是距离、成本或者时间)。(7.4 节)

**边**(link):由两点间的线段表示的通路,在这条通路中流可以沿着两个节点的任一个方向流动。(7.4 节)

**最小支撑树**(minimum spanning tree):在所有支撑树中使得总成本最小的支撑树。(7.5 节)

**网络单纯形法**(network simplex method):单纯形法的改进,对解决最小费用流问题非常有效。(7.1 节)

**节点**(node):网络中的连接点,用带有标签的圆圈表示。(7.1 节)

**源**(origin):在最短路问题中被假设为网络行进起点的节点。(7.4 节)

**收点**(sink):在最大流问题的网络中所有流终止的节点(7.3 节)

**源**(source):在最大流问题的网络中所有流开始的节点。(7.3 节)

**支撑树**(spanning tree):为每两个节点提供一条路的树。(7.5 节)

**供应点**(supply node):产生的净流量(流出减去流入)是一个确定的正数的节点。(7.1 节)

**转运点**(transshipment node):流出的量等于流入的量的节点。(7.1 节)

**转运问题**(transshipment problem):最小费用流问题的特殊类型,它的弧没有容量的限制。(7.1 节)

**树**(tree):在没有按原路返回的前提下,没有任何的路是开始和终止于同一节点的网络。(7.5 节)

## 本章管理科学课件的学习辅助

"Ch. 7—**网络最优化问题**" Excel **文件**:

- 无限配送的例子
- BMZ 的例子
- 扩展的 BMZ 的例子
- 里特城消防队的例子
- 莎拉的例子
- 奎克公司的例子

Excel **加载宏**:

- Premium Solver 软件

# 习 题

对于那些需要用 Excel 来解决的问题(除非你的老师不允许你这样做),我们在这些问题的左边插入记号“E*”。问题序号上的“*”表明该问题至少有一部分答案在本书的最后给出。

7.1.* 思考如下面数据表所示的运输问题。

| | 目标地 | | | 供应 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 源 | | | | |
| 1 | 6 | 7 | 4 | 40 |
| 2 | 5 | 8 | 6 | 60 |
| 需求 | 30 | 40 | 30 | |

a. 画一个类似于图 7.3 的网络,把这个问题看成是最小费用流问题,用网络模型对其进行描述。

E* b. 以第 6 章的运输问题的形式,建立这个问题的电子表格模型并求解。

E* c. 以最小费用流问题的形式,建立这个问题的电子表格模型并求解。

7.2. 迈康塞尔公司是一个生产产品和在其零售渠道中销售产品完全一体化的公司。产品生产以后存放在公司的两个仓库里,直到零售渠道需要供应为止。公司用卡车把产品从两个工厂运送到仓库里,然后再把产品从仓库运送到零售渠道中。

以满载数量为单位,下表给出了每个工厂每月的产出,从工厂运送到仓库的单位运输成本以及每月从工厂运送到仓库的最大数量。

| 到<br>从 | 单位运输成本(美元) | | 运输能力 | | 产出 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 仓库 1 | 仓库 2 | 仓库 1 | 仓库 2 | |
| 工厂 1 | 425 | 560 | 125 | 150 | 200 |
| 工厂 2 | 510 | 600 | 175 | 200 | 300 |

对于每一个零售点(RO),下一个表格给出了它的月需求、用卡车从仓库运输到零售点的成本以及每月可以从仓库运送到零售点的最大数量。

| 到<br>从 | 单位运输成本(美元) | | | 运输能力 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | RO1 | RO2 | RO3 | RO1 | RO2 | RO3 |
| 仓库 1 | 470 | 505 | 490 | 100 | 150 | 100 |
| 仓库 2 | 390 | 410 | 440 | 125 | 150 | 75 |
| 需求 | 150 | 200 | 150 | 150 | 200 | 150 |

管理者现在需要确定一个配送方案(每个月从每个工厂运送到每个仓库以及从每个仓库运送到每个零售渠道的满载车次数),使得总运输成本最小。

a. 画一个网络图,描述该公司的配送网络。确定网络图中供应点、转运点和需求点。

b. 通过向 a 部分的网络图中插入所有必须的数据,为其建立一个最小费用流问题的网络模型(按照图 7.3 所用的格式来注明这些数据)。

E* c. 为这个问题建立电子表格模型并求解。

7.3. 奥迪发公司生产音箱。但是,管理者已经决定把音箱所需要的扬声器的生产转包出去。有三个供应商生产这种扬声器,它们每 1000 个扬声器的发货价格如下表所示。

| 供应商 | 价格(美元) |
|---|---|
| 1 | 22500 |
| 2 | 22700 |
| 3 | 22300 |

每次发的货将运到该公司的两个仓库里。除了每次发货价格以外,每个供应商收取的运输成本有各自的以到仓库的英里数为基础的计算公式。这些公式和英里数的数据如下表所示。

| 供应商 | 每次发货的收费 | 仓库 1 | 仓库 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 300.4 美元/英里 | 1600 英里 | 400 英里 |
| 2 | 200.5 美元/英里 | 500 英里 | 600 英里 |
| 3 | 500.2 美元/英里 | 2000 英里 | 1000 英里 |

每次该公司的两个工厂中的任意一个工厂需要扬声器组装音箱时,它就雇用一个卡车司机从其中的一个仓库里把扬声器运送到工厂里。每次运送成本以及每个工厂每月所需运送的次数如下所示。

| | 单位运输成本(美元) | |
|---|---|---|
| | 工厂 1 | 工厂 2 |
| 仓库 1 | 200 | 700 |
| 仓库 2 | 400 | 500 |
| 月需求量 | 10 | 6 |

虽然每个供应商每月能够供货 10 次，但是由于运输的局限，每个供应商每月最多只能向一个仓库发货 6 次。类似地，每个仓库每月也只能够最多向工厂运送 6 次。

管理者现在需要根据货物量的多少(任何可能情况)制定一个方案，确定每个月应该向每一个供应商订购多少，应该向每一个仓库运送多少，然后又该从每个仓库中运送多少到每个工厂中。其目标就是使得购买成本(包括运费)以及从仓库到工厂的运输成本最小。

a. 画一个网络图描述这个公司的供应网络。确定网络中的供应点、转运点和需求点。

b. 这个问题只是最小费用流问题的一个变形。因为每个供应商的供应量不是恒为 10，而是最大为 10。但是，通过增加一个虚拟的需求点，接收(成本为 0)所有没有使用过的供应商的供应量，本问题可以转化为一个普通的最小费用流问题。通过向在 a 部分中所画的网络图中加入所有必要的数据以及在图中补充虚拟需求点，为这个最小费用流问题建立一个网络模型(按照图 7.3 所用的格式来注明这些数据)。

E* c. 为这个问题建立电子表格模型并求解。

7.4.* 考虑一下图 7.9(7.3 节)，这个图描述了 BMZ 从斯图加特的工厂和柏林的工厂到洛杉矶和西雅图的配送中心的配送网络。这个图也在方括号里给出了通过每条运输路线的最大运输量。在 7.2 节中讲到，在危机发生后的几个星期里，洛杉矶的配送中心成功地补充了库存。因此，卡尔·史密斯(BMZ 公司的供应链经理)断定，今后每月运输 130 单位到洛杉矶、50 个单位到西雅图就足够了(一个单位是 100 立方米的汽车配件)。在它们所有的生产中，斯图加特的工厂(图中的节点 ST)将每月分配 130 个单位，柏林的工厂(节点 BE)则每月分配 50 个单位，从而满足这些发货。但是，与其继续过去的供应习惯，即仅从斯图加特的工厂供应给洛杉矶的配送中心和仅从柏林的工厂供应给西雅图的配送中心，卡尔决定批准任何一个工厂可以向任何一个配送中心供应配件。他觉得这样增加柔性也许可以减少总运输成本。

下面的表格给出了通过各条运输路线的单位运输成本。

| 从 \ 到 | 到节点的单位运输成本(美元) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | LI | BO | RO | HA | NO | NY | BN | LA | SE |
| 节点 | | | | | | | | | |
| ST | 3200 | 2500 | 2900 | — | — | — | — | — | — |
| BE | — | — | 2400 | 2000 | — | — | — | — | — |
| LI | — | — | — | — | 6100 | — | — | — | — |
| BO | — | — | — | — | 6800 | 5400 | — | — | — |
| RO | — | — | — | — | — | 5900 | — | — | — |
| HA | — | — | — | — | — | 6300 | 5700 | — | — |
| NO | — | — | — | — | — | — | — | 3100 | — |
| NY | — | — | — | — | — | — | — | 4200 | 4000 |
| BN | — | — | — | — | — | — | — | 3400 | 3000 |

卡尔需要确定使得总运输成本最小的运输方案。

E* a. 把这个问题看成是最小费用流问题，通过向图 7.9 所示的配送网络加入所有必需的数据，为其建立一个网络模型(按照图 7.3 所用的格式来注明这些数据)。

E* b. 为这个问题建立电子表格模型并求解。

E* c. 这个最优解的总运输成本是多少?

7.5.* 重新考虑习题 7.4。现在我们假设，为了管理上的方便，管理者决定洛杉矶配送中心每月需要的所有 130 个单位必须来自斯图加特的工厂(节点 ST)，而西雅图配送中心每月需要的所有 50 个单位也必须来自柏林的工厂(节点 BE)。卡尔需要为每一个配送中心制定运输方案，使得总运输成本最小。

a. 把这个问题作为最小费用流问题，通过向图 7.6 所示的配送网络加入所有必需的数据，为洛杉矶配送中心建立一个网络模型(按照图 7.3 所用的格式来注明这些数

据)。

E* b. 为 a 部分所描述的问题建立电子表格模型并求解。

c. 为西雅图的配送中心建立柏林的工厂即节点 BE 为出发点的配送网络模型。

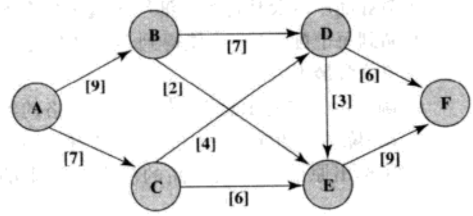
d. 仍按照 a 部分的要求，利用 c 部分所作的网络，也为西雅图的配送中心建立一个网络模型。

E* e. 为 d 部分所描述的问题建立一个电子表格模型并求解。

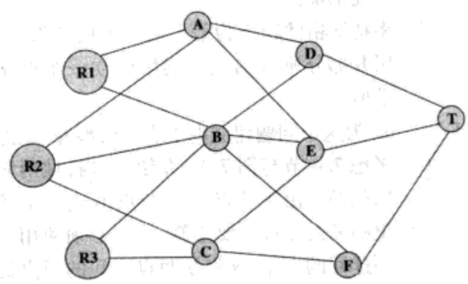
f. 把 b 部分和 e 部分运输成本加起来，将这个结果与习题 7.4 的 c 部分得到的总运输成本相比较(在本书最后给出了习题 7.4 的 c 部分的答案)。

7.6.* 考虑一下 BMZ 案例研究中图 7.7 和图 7.8 对最大流问题的描述。重新绘出图 7.7，把最优运输数量(图 7.8 中单元格 D4:D12)插入到图 7.7 中对应各弧上方的圆括号内。检查弧的容量，解释一下为什么在最大流量不能超过 150 的情况下，弧的容量保证了圆括号内的运输数量一定是最优解。

7.7.* 为下图给出的最大流问题建立一个电子表格模型并用其求解。图中，节点 A 是源，节点 F 是收点，弧的容量如弧旁边方括号里的数字所示。




7.8. 右方的图描述了产生于三条河(节点 R1、R2 和 R3)而终结于一个主要城市(节点 T)的人工水道系统。图中其他的节点是系统中的连接点。




以千立方英尺为单位，下表显示了每天每条人工水道可以通过的最大水量。

| 从＼到 | A | B | C | 从＼到 | D | E | F | 从＼到 | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R1 | 75 | 65 | — | A | 60 | 45 | — | D | 120 |
| R2 | 40 | 50 | 60 | B | 70 | 55 | 45 | E | 190 |
| R3 | — | 80 | 70 | C | — | 70 | 90 | F | 130 |

城市水利管理者需要确定一个流量方案，使得到达这个城市的水流量最大。

E* a. 把这个问题看作是最大流问题，确定源点、收点和转运点，然后画出标有每条弧容量的完整网络。

E* b. 为该问题建立电子表格模型并求解。

7.9. 查看表 6.14，该表给出了特塞格公司的三个油田、三个炼油厂和四个配送中心的地址。除了这些厂以外，特塞格公司也从中东进口石油，并且已经在圣路易建设了一个新的炼油厂。

涉及运输行业的一个严重打击使得特塞格从四个油田到四个炼油厂的输油能力，以及把石油制品从炼油厂运送到配送中心运输能力急剧下降。以千桶原油为单位(石油制品采用相同单位)，下面的两个表格分别给出了每天可以从每个油田运输到每个炼油厂以及从每个炼油厂运输到每个配送中心的最大运输量。

| 油　田 | 炼油厂 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 新奥尔良 | 查尔斯顿 | 西雅图 | 圣路易斯 |
| 得克萨斯 | 11 | 7 | 2 | 8 |
| 加利福尼亚 | 5 | 4 | 8 | 7 |
| 阿拉斯加 | 7 | 3 | 12 | 6 |
| 中东 | 8 | 9 | 4 | 15 |

| 炼油厂 | 配送中心 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 匹兹堡 | 亚特兰大 | 堪萨斯城 | 旧金山 |
| 新奥尔良 | 5 | 9 | 6 | 4 |
| 查尔斯顿 | 8 | 7 | 9 | 5 |
| 西雅图 | 4 | 6 | 7 | 8 |
| 圣路易斯 | 12 | 11 | 9 | 7 |

特塞格公司的管理层现在需要一个制定

方案，确定应该从每个油田运输多少原油到每个炼油厂以及从每个炼油厂运送多少石油制品到每个配送中心，使得到达配送中心的总单位数最大。

a. 画一个大致的示意图，表示出特塞格的油田、炼油厂和配送中心的分布位置。用箭头标出原油和石油制品的流在网络中的方向。

b. 将代表油田的所有的节点排成第一列，代表炼油厂的所有的节点排成第二列，代表配送中心的所有的节点排成第三列，重新画出这个配送网络图，然后再添加弧标明可能的流。

c. 将特塞格问题作为最大流问题的变形，利用 b 部分所画的配送网络建立一个网络模型

E* d. 为这个问题建立电子表格模型并求解。

E*7.10. 考虑 7.4 节与图 7.11 介绍的里特城消防队问题。由于节点 A 与节点 B 之间 1 英里距离的路段需要维修，所以必须使用一条迂回的道路，这将使两点之间的距离延长到 4 英里。

为这个经修改的问题建立电子表格模型并求解，从而找到一条从消防站到农场社区的新的最短路线。

7.11. 你将驾驶着小汽车进行一次旅行，到达一个你以前从未到过的城市。所以你需要研究地图，从而为到达这一目的地选择一条最短的路线。无论你所选择的是哪一条路线，一路上你将会经过五个城市（我们将其称为 A、B、C、D、E）。地图上标明了连接两个城市之间公路的长度。它们之间不再有其他城市。这些数据概括在下表中，“—”表示若不经过其他城市，两个城市之间没有道路直接相连。

| 城市 | 相邻城市间的距离 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | 目标地 |
| 源 | 40 | 60 | 50 | — | — | — |
| A | | 10 | — | 70 | — | — |
| B | | | 20 | 55 | 40 | — |
| C | | | | — | 50 | — |
| D | | | | | 10 | 60 |
| E | | | | | | 80 |

a. 画出网络模型，并根据这个问题的网络模型求出最短路径。其节点代表这些城市，连线代表路程，数据代表这些路程有多少英里。

E* b. 作出这个问题的电子表格模型并求解。

c. 利用 b 部分来确认你的最短路径。

d. 如果表格中的数据代表你驾车从一个城市到另一城市的成本（以美元为单位），c 部分所得出的答案是否就是你的最低成本路径？

e. 如果表格中的数据代表你驾车从一个城市到另一城市的时间（以分钟为单位），c 部分所得出的答案是否就是你的最短时间路径？

7.12.* 在一个不断扩建的小型飞机场里，一家本地的航空公司购买了一辆新的牵引车作为拖车，在飞机场之间搬运行李。因为机场在三年后将安装一个新的机械化行李搬运系统，所以到那时牵引车将被淘汰。然而，由于高负荷工作，其使用与维护成本会随着年份急剧增加。因此使用一两年后进行重置可能更加经济。下面的表格（0 表示现在）给出了第 $i$ 年末购买的拖车在第 $j$ 年末卖出的总净折现成本（美元，购买价格减去交易抵偿，加上使用与维护费用）。

| | $j$（美元） | | |
|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 8000 | 18000 | 31000 |
| 1 | | 10000 | 21000 |
| 2 | | | 12000 |

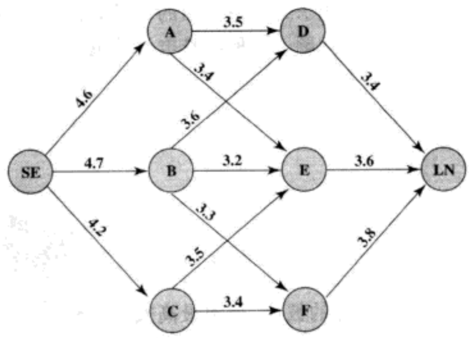
为了使得三年内拖车的总成本最低，管理层希望确定何时（如果可能的话）进行拖车置换是最合理的。

a. 将这个问题作为最短路问题，建立一个网络模型。

E* b. 为这个问题建立电子表格模型并求解。

7.13. 速达（Speedy）航空公司中有一架班机将从西雅图直飞伦敦。由于天气因素的影响，在明确选择线路时存有一定的灵活性。下面的网络模型提供了所能考虑到的一些可能航线。节点 SE 与 LN 分别代表了西雅图与伦敦。其他的节点分别代表了不同的途经地点。

风力对于飞行的时间（以及燃油的耗用）是有很大影响的。根据最新的气象预报，各条航线飞行时间（以小时计算）标注在弧线上。因为燃油十分昂贵，速达航空公司的管理层需要制定一套方案，选择飞行时间最短的航线。



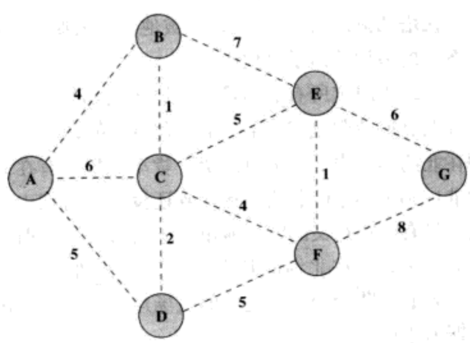

a. 在将此问题作为最短路问题时,什么代表了路程?

E* b. 为这一问题建立电子表格模型并求解。

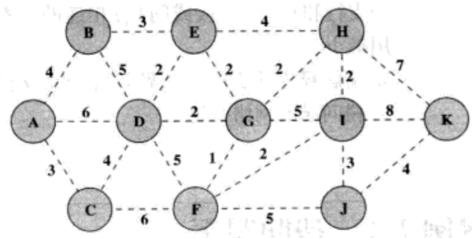
7.14. 考虑在7.5节中所描述的默登公司的模型。当最小支撑树问题的算法应用于这一问题时,第一步选择第一条边时存在成本相同的两条边。可以选择节点C与D之间的备选边解决这个问题。

现在用另一种方法。选择节点E和F之间的备选边作为第一条边,然后根据算法继续进行下去,写出每一步的结果(最后你也应该得到如图7.19所示的最小支撑树)。

7.15.* 运用在7.5节中介绍的贪婪算法,找出由下面的节点和供选择的边组成的网络的最小支撑树。每两个节点间的虚线代表备选边,虚线旁边的数字代表把这条边插入到网络中的成本(单位:千美元)。




7.16. 运用7.5节中介绍的贪婪算法,找出由下面的节点和供选择的边组成的网络的最小支撑树。每两个节点间的虚线代表备选边,虚线旁边的数字代表把这条边插入到网络中的成本(单位:百万美元)。




7.17. 瓦尔豪斯(Wirehouse)木材公司不久将在一个区域的八片树林中砍伐树木。因此,它必须建设一个土路系统,使得每一个树林都能达到其他任何一片树林。每两片树林间的距离(单位:英里)如下所示:

| 树林 | 两片树林之间的距离 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | — | 1.3 | 2.1 | 0.9 | 0.7 | 1.8 | 2.0 | 1.5 |
| 2 | 1.3 | — | 0.9 | 1.8 | 1.2 | 2.3 | 2.3 | 1.1 |
| 3 | 2.1 | 0.9 | — | 2.6 | 1.7 | 2.5 | 1.9 | 1.0 |
| 4 | 0.9 | 1.8 | 2.6 | — | 0.7 | 1.6 | 1.5 | 0.9 |
| 5 | 0.7 | 1.2 | 1.7 | 0.7 | — | 0.9 | 1.1 | 0.8 |
| 6 | 1.8 | 2.6 | 2.5 | 1.6 | 0.9 | — | 0.6 | 1.0 |
| 7 | 2.0 | 2.3 | 1.9 | 1.5 | 1.1 | 0.6 | — | 0.5 |
| 8 | 1.5 | 1.1 | 1.0 | 0.9 | 0.8 | 1.0 | 0.5 | — |

管理者现在需要确定哪些树林之间需要铺路,使得连接所有树林的路的总长度最短。

a. 请解释为什么这个问题符合最小支撑树问题的网络描述。

b. 运用7.5节中介绍的贪婪算法解决这个问题。

7.18. 普雷密尔(Premiere)银行很快将通过一种特殊的电话线和通信设备,将其每个支行的计算机终端与其总行的计算机相连。没有必要将每一个支行都用电话线直接与总行相连,可以通过与其他已经和总行相连(直接或者间接)的支行间接地连接到总行。惟一的要求是每一个支行必需连在通向总行的某一线路上。

这种特殊电话线的费用是每英里100美元。银行之间的距离如下表所示(单位:英里):

| | 银行间的距离 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 总行 | 支行1 | 支行2 | 支行3 | 支行4 | 支行5 |
| 总行 | — | 190 | 70 | 115 | 270 | 160 |
| 支行1 | 190 | — | 100 | 110 | 215 | 50 |
| 支行2 | 70 | 100 | — | 140 | 120 | 220 |
| 支行3 | 115 | 110 | 140 | — | 175 | 80 |
| 支行4 | 270 | 215 | 120 | 175 | — | 310 |
| 支行5 | 160 | 50 | 220 | 80 | 310 | — |

管理者希望确定哪两个银行之间应该用特殊的电话线直接相连,使得将每一

个支行和总行(直接或间接)相连的总费用最小。

a. 请解释为什么这个问题符合最小支撑树问题的网络描述。

b. 运用7.5节中介绍的贪婪算法求解这个问题。这种特殊电话线的总成本是多少?

## 案例7.1 帮助盟军

在10月的一个寒冷的夜晚,总司令沃塔切夫走出室外,黑暗中他深深吸了口烟,尽情享受着香烟带来的暖意。看着四周的一片废墟——粉碎的窗户、烧毁的建筑和断裂的公路,他笑了。事实证明,他这两年在乌拉尔山脉东部地区的革命很成功。现在,他的军队已经占领了俄罗斯联邦七个具有重要战略意义的城市,它们是:喀山、Perm、叶卡捷琳堡,Ufa、萨马拉,萨拉托夫和奥伦堡。即便这样,沃塔切夫的围攻还没有结束。他把矛头又指向了西部。在俄罗斯联邦经济和政治处于混乱的时期里,沃塔切夫知道他的军队很快也将攻占圣彼得堡和莫斯科。然后,他就可以统治和管理整个国家了。

而在太平洋的彼岸,美国最高安全和外交政策顾问正在白宫召开会议。在获悉了最近由沃塔切夫总司令策划的红色革命后,总统正在制定一个行动方案。莫斯科已经向美国军队发出了求助信号,而美国总统也计划立即向莫斯科派遣军队和给养。

兰可雷特将军告诉总统,飞机、轮船和机动车辆以及军队、武器、军火、燃料和给养等正在运往波士顿和杰克逊威尔这两个拥有飞机场的港口城市。飞机和轮船将把所有的军队和物资跨越大西洋运送到欧洲大陆。接着,将军将一张列有这些集中于港口的飞机、轮船和机动车辆的型号以及附有每种型号的明细表递给了总统。明细表如下所示:

| 运输工具类型 | 名　称 | 运载能力 | 速　度 |
|---|---|---|---|
| 飞　机 | C-141运输机 | 150吨 | 400英里/小时 |
| 轮　船 | 运输船 | 240吨 | 35英里/小时 |
| 机动车 | 托盘货运火车 | 16000公斤 | 60英里/小时 |

所有的飞机、轮船和机动车辆都既可以用来运送军队,也可以用来运送物资。一旦某架飞机或某艘轮船抵达欧洲,它将留下来支援那里的海陆空三军。

听完兰可雷特将军的汇报后,总统转向塔必瑟,塔必瑟刚刚和北约国家谈判了几个小时,商讨在驶往俄罗斯联邦的途中使用它们的港口和飞机场作为中转站来给飞机或轮船添加燃料和补给品的问题。她告诉总统,以下北约国家的港口和飞机场可供美国军队使用。

| 港　口 | 飞机场 |
|---|---|
| 那不勒斯 | 伦　敦 |
| 汉　堡 | 柏　林 |
| 鹿特丹 | 伊斯坦布尔 |

总统站起身,走到投影在房间中央的一个大屏幕世界地图前。他计划把军队和物资从美国运送到还没有被沃塔切夫总司令攻占的俄罗斯联邦三个具有战略性意义的城市里。这三个城市是圣彼得堡、莫斯科和罗斯托夫。对此计划他解释道,军队和物资都将用于防御俄罗斯的这三个城市,与此同时,发动对沃塔切夫的反攻,夺回最近被他占领的城市(在本案例的最后给出了该地图)。

总统也决定所有的运输机和运输船都将从波士顿或杰克逊威尔出发,所有穿越大西洋的运输船必须在北约的其中一个港口卸货。货车将把所有在北约港口卸下的军队和物资运送到还没被沃塔切夫占领的具有战略意义的三个城市里。所有飞越大西洋的运输星必须在北约的其中一个机场加油,然后再把所有的军队和物资从北约的机场运送到这三个俄罗斯城市里。

a. 画一个网络,标示出从美国把军队和给养运送到俄罗斯联邦的几条可能的线路。

b. 莫斯科和华盛顿不知道沃塔切夫司令会什么时候发起下一次的进攻。因此,这两个国家的领导达成一致意见,军队应该尽快到达俄罗斯这三个战略城市。所以美国总统决定,由于情况紧急,美国将不惜一切代价——利用足够多的运输机、运输船与车辆把军队和物资从美国运送到圣彼

得堡、莫斯科和罗斯托夫。因此，任意两个城市之间军队和物资的运输数量没有限制。

总统获得了两个城市之间距离的信息。如下表所示：

| 从 | 至 | 距离(公里) |
|---|---|---|
| 波士顿 | 柏　林 | 7250 |
| 波士顿 | 汉　堡 | 8250 |
| 波士顿 | 伊斯坦布尔 | 8300 |
| 波士顿 | 伦　敦 | 6200 |
| 波士顿 | 鹿特丹 | 6900 |
| 波士顿 | 那不勒斯 | 7950 |
| 杰克逊维尔 | 柏　林 | 9200 |
| 杰克逊维尔 | 汉　堡 | 9800 |
| 杰克逊维尔 | 伊斯坦布尔 | 10100 |
| 杰克逊维尔 | 伦　敦 | 7900 |
| 杰克逊维尔 | 鹿特丹 | 8900 |
| 杰克逊维尔 | 那不勒斯 | 9400 |
| 柏　林 | 圣彼得堡 | 1280 |
| 汉　堡 | 圣彼得堡 | 1880 |
| 伊斯坦布尔 | 圣彼得堡 | 2040 |
| 伦　敦 | 圣彼得堡 | 1980 |
| 鹿特丹 | 圣彼得堡 | 2200 |
| 那波里 | 圣彼得堡 | 2970 |
| 柏　林 | 莫斯科 | 1600 |
| 汉　堡 | 莫斯科 | 2120 |
| 伊斯坦布尔 | 莫斯科 | 1700 |
| 伦　敦 | 莫斯科 | 2300 |
| 鹿特丹 | 莫斯科 | 2450 |
| 那波里 | 莫斯科 | 2890 |
| 柏　林 | 罗斯托夫 | 1730 |
| 汉　堡 | 罗斯托夫 | 2470 |
| 伊斯坦布尔 | 罗斯托夫 | 990 |
| 伦　敦 | 罗斯托夫 | 2860 |
| 鹿特丹 | 罗斯托夫 | 2760 |
| 那波里 | 罗斯托夫 | 2800 |

在已知每两个城市间距离和所使用运输工具速度的条件下，总统怎样才能最快地把军队从美国运送到俄罗斯这三个具有战略意义的城市里？在网络中标明这些路径。把军队和给养运送到圣彼得堡、莫斯科和罗斯托夫分别需要多少时间？

c. 总统在他的第一个方案中遇到的惟一问题是：他必须说服国会通过这个军事部署。在战争法案中规定，总统在派遣军队参加战争或派遣军队到将要发生战争的地区之前，需要先和议会协商。如果国会不给总统诸如调用军队这样的权力，总统就必须在60天后撤回军队。国会也有权力通过共同决议案缩短60天的期限。

总统知道国会不会批准把一大笔开销花在另一个国家的战争里，特别是当选民对减少国债非常关注的时候。因此，总统需要找到一个办法使得将所需军队和给养运送到圣彼得堡、莫斯科和罗斯托夫的成本最小。

每个俄罗斯的城市已经和华盛顿联系并提供了维持和平所需的军队和给养的最少数量。分析了这些需求以后，兰可雷特将军把对军队的数量、汽油的加仑数等等转化为先前方案中物资的吨数。需求如下表所示：

| 城　市 | 需求量(吨) |
|---|---|
| 圣彼得堡 | 320000 |
| 莫斯科 | 440000 |
| 罗斯托夫 | 240000 |

在波士顿和杰克逊威尔都能获得所需的500000吨物资。当美国决定派出飞机、轮船或卡车时，会发生如下几项成本：燃料成本、劳动力成本、维护成本和港口和机场的适当费用以及关税。下表列出了这些成本。

| 从 | 至 | 成本(美元) |
|---|---|---|
| 波士顿 | 柏林 | 50000 |
| 波士顿 | 汉　堡 | 30000 |
| 波士顿 | 伊斯坦布尔 | 55000 |
| 波士顿 | 伦　敦 | 45000 |
| 波士顿 | 鹿特丹 | 30000 |
| 波士顿 | 那波里 | 32000 |
| 杰克逊维尔 | 柏　林 | 57000 |
| 杰克逊维尔 | 汉　堡 | 48000 |
| 杰克逊维尔 | 伊斯坦布尔 | 61000 |
| 杰克逊维尔 | 伦　敦 | 49000 |
| 杰克逊维尔 | 鹿特丹 | 44000 |
| 杰克逊维尔 | 那波里 | 56000 |
| 柏　林 | 圣彼得堡 | 24000 |
| 汉　堡 | 圣彼得堡 | 3000 |
| 伊斯坦布尔 | 圣彼得堡 | 28000 |
| 伦　敦 | 圣彼得堡 | 22000 |
| 鹿特丹 | 圣彼得堡 | 3000 |
| 那波里 | 圣彼得堡 | 5000 |
| 柏　林 | 莫斯科 | 22000 |
| 汉　堡 | 莫斯科 | 4000 |
| 伊斯坦布尔 | 莫斯科 | 25000 |
| 伦　敦 | 莫斯科 | 19000 |

（续表）

| 从 | 至 | 成本(美元) |
|---|---|---|
| 鹿特丹 | 莫斯科 | 5000 |
| 那波里 | 莫斯科 | 5000 |
| 柏　林 | 罗斯托夫 | 23000 |
| 汉　堡 | 罗斯托夫 | 7000 |
| 伊斯坦布尔 | 罗斯托夫 | 2000 |
| 伦　敦 | 罗斯托夫 | 4000 |
| 鹿特丹 | 罗斯托夫 | 8000 |
| 那波里 | 罗斯托夫 | 9000 |

当总统试图满足这些要求时，遇到了很多的限制。俄罗斯北部早冬的天气带来了厚厚的冰冻和积雪。因此，兰可雷特将军反对派遣卡车护卫队到这个地区。他说服总统只通过空运进行对圣彼得堡的供应。不仅如此，通往罗斯托夫的卡车道路也很有限，因此，从每一个港口最多可各派出2500辆卡车到罗斯托夫。乌克兰政府对美国的飞机飞越其领空非常敏感。它限制美军至多有200架飞机可以从柏林飞往罗斯托夫，200架飞机从伦敦飞往罗斯托夫(由于美军不希望绕过乌克兰飞行，所以它必须接受乌克兰的限制条件)。

总统应该怎么做才能以最小的成本满足俄罗斯对军队的需求呢？在网络中标注出从美国到俄罗斯联邦所使用的路线。

d. 一旦总统公布了运行于美国和俄罗斯联邦之间的飞机、轮船和卡车的数量后，塔必瑟将与其中的每一个美国城市和北约国家联系，通知将要抵达各个机场的飞机预期数量、抵达各个港口的轮船预期数量和通过公路的卡车预期数量。不幸的是塔必瑟了解到现在有几个附加的限制无法克服。由于机场拥塞并且无法更改航班计划，只有有限的飞机可以在任意两个城市之间承担运输任务。飞机数量的限制如下表所示：

| 从 | 至 | 成本(美元) |
|---|---|---|
| 波士顿 | 柏　林 | 300 |
| 波士顿 | 伊斯坦布尔 | 500 |
| 波士顿 | 伦　敦 | 500 |
| 杰克逊维尔 | 柏　林 | 500 |
| 杰克逊维尔 | 伊斯坦布尔 | 700 |
| 杰克逊维尔 | 伦　敦 | 600 |
| 柏　林 | 圣彼得堡 | 500 |
| 伊斯坦布尔 | 圣彼得堡 | 0 |
| 伦　敦 | 圣彼得堡 | 1000 |
| 柏　林 | 莫斯科 | 300 |
| 伊斯坦布尔 | 莫斯科 | 100 |

（续表）

| 从 | 至 | 成本(美元) |
|---|---|---|
| 伦　敦 | 莫斯科 | 200 |
| 柏　林 | 罗斯托夫 | 0 |
| 伊斯坦布尔 | 罗斯托夫 | 900 |
| 伦　敦 | 罗斯托夫 | 100 |

除此以外，由于一些国家担心，如果太多的军用卡车行驶在它们的公路上，它们的国民会产生恐慌，所以他们反对太多的军用卡车在其国家内行驶。这些反对意味着只有有限数量的卡车可以在某些港口和俄罗斯的城市之间行驶。这些限制如下表所示：

| 从 | 至 | 成本(美元) |
|---|---|---|
| 鹿特丹 | 莫斯科 | 600 |
| 鹿特丹 | 罗斯托夫 | 750 |
| 汉　堡 | 莫斯科 | 700 |
| 汉　堡 | 罗斯托夫 | 500 |
| 那波里 | 莫斯科 | 1500 |
| 那波里 | 罗斯托夫 | 1400 |

塔必瑟获悉，由于美国控制了大西洋，所以所有的船运航线没有容量的限制。

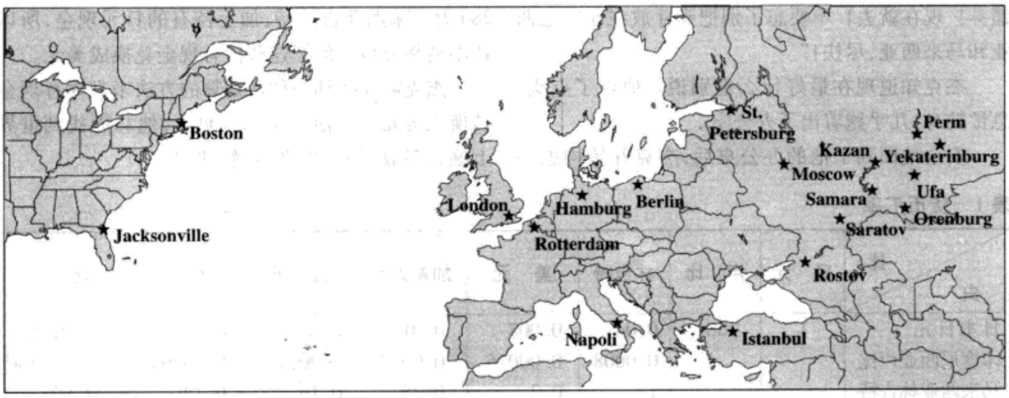
总统认识到由于所有这些限制，他将不能满足这三个城市对支援部队的所有需求。于是，他决定不考虑成本，使得运送到这些城市的物资最多。那么总统怎样才能达到这个目的呢？在网络中标出在美国和俄罗斯联邦之间使用的线路。

e. 如果即使所有的美军和供应物资抵达圣彼得堡、莫斯科和罗斯托夫之前，沃塔切夫司令的军队中关于下一次进攻圣彼得堡还是莫斯科的争论使得力量发生分裂，从而莫斯科的军队轻而易举地获胜，沃塔切夫总司令被关押的话，那么下一步将要重建由于沃塔切夫军队进攻而夷为平地的七个城市。

总统优先考虑的是帮助俄罗斯政府以最小的成本重建从莫斯科到七个城市的通讯线路。任意两个俄罗斯城市之间架设通讯线路的成本根据电缆运输费用、地区破坏程度以及地形复杂程度而不同。幸好，每一个城市都可以间接地和其他所有的城市连接上。圣彼得堡以及罗斯托夫和莫斯科之间已经连接上了。因此，只要这七个城市之中任何一个城市和圣彼得堡或罗斯托夫相连，同莫斯科也就连通了。两个城市之间有可能更换通讯线路的成本如下表所示。

为了使得莫斯科以及所有七个城市之间恢复联系的总成本最小，应该在哪些城市之间重新架设通讯线路？

| 两城市之间 | 重新建立交通线路的成本（美元） |
|---|---|
| 圣彼得堡与喀山 | 210000 |
| 圣彼得堡与 Perm | 185000 |
| 圣彼得堡与 Ufa | 225000 |
| 莫斯科与 Ufa | 310000 |
| 莫斯科与萨马拉 | 195000 |
| 莫斯科与奥伦堡 | 440000 |
| 莫斯科与萨拉托夫 | 140000 |
| 罗斯托夫与萨拉托夫 | 200000 |
| 罗斯托夫与奥伦堡 | 120000 |
| 喀山与 Perm | 150000 |
| 喀山与 Ufa | 105000 |
| 喀山与萨马拉 | 95000 |
| Perm 与叶卡捷琳堡 | 85000 |
| Perm 与 Ufa | 125000 |
| 叶卡捷琳堡与 Ufa | 100000 |
| Ufa 与奥伦堡 | 75000 |
| 萨拉托夫与萨马拉 | 100000 |
| 萨拉托夫与奥伦堡 | 95000 |




## 案例 7.2　资金的运作

杰克用紧张的手捋了捋曾经梳得油光的头发，松开了曾经系得很好的丝绸领带，然后他又把冒汗的双手在曾经熨得笔挺的裤子上使劲儿地搓。今天真的是很糟糕的一天。

在过去的几个月里，杰克听到了从华尔街传来的流言——这些流言都来自那些以直言不讳而闻名的投资银行家和证券经纪人。他们传言：日本将要面临一次经济崩溃，发出这个传言的原因是他们相信通过向公众发布这些骇人听闻的消息可以加速经济崩溃的发生。

而今天，他们所惧怕的事情终于发生了。杰克和他的同事们聚集到一台专门播放布鲁伯格（Bloomberg）频道的小电视机前，当杰克听到了在日本市场发生的恐怖事件时，他惊呆了，完全不敢相信自己的耳朵。而且，日本市场也引起了东亚其他国家的金融市场的恐慌。他开始麻木了。格兰特·希尔（Grant Hill）协会是西海岸一家专门从事货币交易的小公司，作为该公司的亚洲海外投资经理，对于这次经济崩溃所带来的负面影响，杰克承担着个人责任。而格兰特·希尔协会也将因此而受到负面的影响。

当初，杰克没有理会关于日本经济崩溃传言的警告。他大大增加了格兰特·希尔协会在日本市场的投资份额。由于日本市场的行情要比去年预计的好，所以杰克就在上个月把公司在日本投资由原来的 250 万美元增加到 1500 万美元。在那时，1 美元值 80 日元。

好景不长。杰克意识到了现在由于日元的贬值，导致美元和日元的比率为1: 125。他如果把投资结算成日元的话，没有任何的损失，但是现在当把所有的投资兑换成美元，就带来了巨额的损失。杰克深深地吸了一口气，闭上了双眼，思索着怎样才能控

制住这次严重的损失。

杰克的沉思被从角落的一个大办公室里传来呼喊他名字的声音打断了。格兰特·希尔协会的总经理格兰特·希尔大声喊道:"杰克,你给我滚过来!"

杰克从椅子上跳起来,很不情愿地朝格兰特·希尔的办公室望了望里,他正在大发雷霆。理顺了一下自己的头发,系好领带,杰克迅速走进总经理的办公室。

杰克一进门,格兰特·希尔就怒视着杰克,继续吼道:"杰克!我不想听你说一句话,你不要给我找任何的借口!赶快把这个局面收拾好!把我所有压在日元的钱都兑换出来!我的心腹告诉我,这仅仅是一个开始!赶紧把我所有的资金换成安全的美元债券!现在就去!不要忘了别把头寸放在印度尼西亚和马来西亚,尽快!"

杰克知道现在最好什么也别说。他点了点头,急忙转身,几乎跑着出了办公室。

安全地回到了他的办公桌后,杰克开始构思一个方案,使得把投资从日本、印度尼西亚和马来西亚转移出去。过去在外国市场上的投资经验告诉他当从市场上抽回资金时,什么时候该买进数百万的美元和怎样可以把资金从市场上收回来几乎是同等重要的。格兰特·希尔协会的银行合作伙伴在把一种货币兑换成另一种货币以及在全球进行巨额资金转账时都收取不同的交易费用。

而现在更糟糕的是,东亚国家的政府对个人或公司把本国货币兑换成某一特定外国货币和把资金从本国抽走的行为施加严格的管制。实施这个严厉的措施,其目的是为了减少外国投资的流失,从而防止这些地区的经济发生彻底的崩溃。由于格兰特·希尔协会持有的现金为105亿印度尼西亚卢比和280万马来西亚吉林特,加上持有的日元现金,所以还不清楚应该如何把这些持有现金兑换成美元。

杰克需要找到一种最划算的方法来把库存现金转换成美元。在他公司的主页上,他总能找到世界上绝大多数货币的实时汇率(见表1)。

**表1 货币汇率**

| 由 \ 比 | 日　元 | 卢　比 | 林吉特 | 美　元 | 加拿大元 | 欧　元 | 英　镑 | 比　索 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日本日元 | 1 | 50 | 0.04 | 0.008 | 0.01 | 0.0064 | 0.0048 | 0.0768 |
| 印度尼西亚卢比 | | 1 | 0.0008 | 0.00016 | 0.0002 | 0.000128 | 0.000096 | 0.001536 |
| 马来西亚林吉特 | | | 1 | 0.2 | 0.25 | 0.16 | 0.12 | 1.92 |
| 美　元 | | | | 1 | 1.25 | 0.8 | 0.6 | 9.6 |
| 加拿大元 | | | | | 1 | 0.64 | 0.48 | 7.68 |
| 欧　元 | | | | | | 1 | 0.75 | 12 |
| 英　镑 | | | | | | | 1 | 16 |
| 墨西哥比索 | | | | | | | | 1 |

表1为杰克提供了有关货币汇率的信息,例如,1日元相当于0.008美元。通过打了几个电话以后,他发现在这样一个关键时期里,他的公司必须为大笔的货币交易支付交易成本(见表2)。

**表2 交易成本(百分比)**

| 由 \ 比 | 日　元 | 卢　比 | 林吉特 | 美　元 | 加拿大元 | 欧　元 | 英　镑 | 比　索 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日　元 | — | 0.5 | 0.5 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.25 | 0.5 |
| 卢　比 | | — | 0.7 | 0.5 | 0.3 | 0.3 | 0.75 | 0.75 |
| 林吉特 | | | — | 0.7 | 0.7 | 0.4 | 0.45 | 0.5 |
| 美　元 | | | | — | 0.05 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 加拿大元 | | | | | — | 0.2 | 0.1 | 0.1 |
| 欧　元 | | | | | | — | 0.05 | 0.5 |
| 英　镑 | | | | | | | — | 0.5 |
| 比　索 | | | | | | | | — |

杰克注意到把一种货币兑换成另一种货币的交易成本与逆向操作的交易成本是相等的。最后,他

找到了允许把他公司的本国货币兑换成日本、印度　尼西亚和马来西亚货币的最大量(见表 3)。

**表 3　交易限制**

| 由＼比 | 日　元 | 卢　比 | 林吉特 | 美　元 | 加拿大元 | 欧　元 | 英　镑 | 比　索 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日　元 | — | 5000 | 5000 | 2000 | 2000 | 2000 | 2000 | 4000 |
| 卢　比 | 5000 | — | 2000 | 200 | 200 | 1000 | 500 | 200 |
| 林吉特 | 3000 | 4500 | — | 1500 | 1500 | 2500 | 1000 | 1000 |

a. 把杰克的问题作为最小费用流问题进行描述，画出问题网络图。确定网络中的供应点和需求点。

b. 杰克必须执行哪些货币的交易，把投资从日元、卢比和吉林特转换成美元才能确保格兰特·希尔协会在完成所有交易后的美元数额最大?

c. 世界贸易组织禁止交易管制，因为它鼓励了保护主义。如果没有交易管制，杰克应该采取什么方法去把持有现金从这几种亚洲的货币分别兑换为美元?

d. 为了回避世界贸易组织禁止交易限制的要求，印度尼西亚政府引入了新的税制来保护其本国货币，税制规定卢比在交易时交易成本增长 500%。在已知新的交易成本但没有交易限制的情况下，请问杰克应该完成哪些货币交易，把持有现金从这几种亚洲的货币分别兑换为美元?

e. 杰克认识到他的分析是不全面的，因为这没有包括将会影响其货币兑换计划的所有方面的因素。描述一下杰克在作出最后决定以前还应该注意哪些因素影响。

CHAPTER

# 8 用 PERT/CPM 进行项目管理

## 学习目标

完成本章学习后,你应该掌握:

1. 描述 PERT/CPM 能提供给项目管理的帮助类型。
2. 明确建立 PERT/CPM 项目网络需要的信息类型。
3. 运用这些信息为特定项目建立项目网络。
4. 运用项目网络建立完整的日程安排,包括每个活动应该开始与结束的最早和最迟时间。
5. 明确关键瓶颈活动,也就是为了不延误项目工期一定不能延迟的活动。
6. 找出在最后期限内完成项目的近似概率。
7. 找出为了在目标完成期限内完成项目的最低成本的方法。
8. 运用系统的程序帮助计划日常安排以及控制项目成本。
9. 从管理角度评价 PERT/CPM。
10. 了解现在的一些 PERT/CPM 的扩展。

对任何一个管理者来说,最具有挑战性的工作之一就是对需要协调遍及整个组织大量活动的规模宏大的项目进行管理。在计划如何协调所有的这些活动、编制实际日程安排和接下来监控整个项目进度中,管理者对所有的细节问题都必须加以认真考虑。

幸运的是,计划审评技术(program evaluation and review technique,简称 PERT)和关键路径法(critical path method,简称 CPM)这两种密切相关的管理科学技术可以帮助项目管理者完成这些任务。这些技术都大量使用了上一章中所介绍的网络来帮助我们计划并展示所有活动的协调。这些技术通常使用软件包来处理所需要的数据,以制定日程以及对整个项目的进度进行监控。项目管理软件,如管理科学课件中的 MS Project(微软的项目管理软件),对于完成这些工作是非常有用的。

PERT 和 CPM 被广泛应用于各种各样的项目之中,当然也包

括以下所列举的各个方面。

1. 新工厂的建造。
2. 新产品的研制和开发。
3. 美国国家航空及太空总署(NASA)的太空探险计划。
4. 电影的制作。
5. 船舶的建造。
6. 政府赞助新武器系统的研制项目。
7. 主要设施的重新布置。
8. 核电站的维修和保养。
9. 管理信息系统的安装。
10. 广告运动的实施。

PERT 技术和 CPM 技术在 20 世纪 50 年代晚期被分别开发出来。从那以后,它们就一直跻身于应用最为广泛的管理科学技术之列。

PERT 技术和 CPM 技术的最早版本之间有一些重大的差异,这一点我们将在本章后面的篇幅中进行说明。尽管如此,这两种技术拥有许多的共同点。而且,这些年来这两种技术也在不断地相互融合。事实上,今天的软件包往往包含了这两种技术从初始版本以来所有的重要功能。

因此,这些技术的使用者在使用这两个名字的时候往往并不加以区分,甚至把它们合并成缩写为 PERT/CPM,我们就是经常这样做的。只有当描述它们各自的特性时,我们才会去区分它们之间的差异。

下一节我们将要介绍一个贯穿整章的案例研究,以此为例来说明使用 PERT/CPM 进行项目分析的各种方法。

## 8.1　案例研究:科信建筑公司项目

科信建筑公司(Reliable Construction Company)从一个大的制造商那里成功中标了一个价值 540 万美元的新工厂建设项目。制造商要求这个新工厂在一年之内能够投入使用。因此,合同包含了下面所列出的一些条款:

- 如果科信建筑公司从现在起在 47 周的时间内不能完成这个建设任务,就要赔偿 30 万美元。
- 为了对快速的工程建设进行额外的奖励,如果这个项目能在 40 周内完成的话,科信建筑公司就会获得 15 万美元的奖金。

为了确保工程能按照进度进行,科信建筑公司安排了最好的建筑管理人员大卫·佩蒂参加到这个项目的管理中来。佩蒂先生在公司中拥有多年的工作经验和骄人的工作成绩,管理层对他非常信任。佩蒂先生刚从社区学院毕业时只是一个木匠,但不久就成为了公司中最年轻的工头,因此他完全了解整个建筑业务。当他是工头的时候,他在晚上空余时间里上了夜大并取得了工商管理学位。在 5 年的时间中,学习是很艰辛的,可是佩蒂先生发现他十分喜欢工商管理主修科目并且学得很棒。他最喜欢的课是研究生水平的项目管理选修课,也就是在这个课程中熟练掌握了 PERT/CPM。光荣地拿到了工商管理学位不久以后,他很快就晋升为建筑部经理。到目前为止,他已经在这个职位上为公司工作了 14 年之久。传

言说，在一年内，公司董事长的退休会造成一些高层管理职位的空缺，按照职位排序他将会进入到最高管理层中。虽然佩蒂先生十分愿意接受这次机会，但是他并不急于升职。尽管这份工作会带来很大的压力，但是他还是十分喜欢接受作为一个建筑管理人员所面临的挑战，其中包括有机会应用最新的项目管理技术。

佩蒂先生十分乐意地接受了在如此重要的一个项目之中担任项目经理的最新任命。他期待着按照进度完成项目所存在的挑战，况且还有可能会取得进度上的提前。然而，因为他对在不增加额外成本的基础上40周内完成项目表示怀疑，所以他把主要精力放在47周内完成项目的最初计划制定之上。

佩蒂先生必须要安排全体员工在不同的时间里完成不同的施工任务。表8.1向我们展示了不同活动的排列。第三列向我们提供了关于协调员工进度的重要附加信息。

对于任何一个给出的活动来说，表8.1中第三列所给出的紧前活动(immediate predecessors)就是那些进行这些活动之前刚刚完成的活动[很显然，对于每一个紧前活动来说，这些活动就被称为紧后活动(immediate successor)]。

**表8.1 科信建筑公司项目的活动列表**

| 活动编号 | 活动说明 | 紧前活动 | 估计工期(周) |
|---|---|---|---|
| A | 挖掘 | — | 2 |
| B | 打地基 | A | 4 |
| C | 承重墙施工 | B | 10 |
| D | 封顶 | C | 6 |
| E | 安装外部管道 | C | 4 |
| F | 安装内部管道 | E | 5 |
| G | 外墙施工 | D | 7 |
| H | 外部上漆 | E,G | 9 |
| I | 电路铺设 | C | 7 |
| J | 竖墙板 | F,I | 8 |
| K | 铺地板 | J | 4 |
| L | 内部上漆 | J | 5 |
| M | 安装外部设备 | H | 2 |
| N | 安装内部设备 | K,L | 6 |

例如，在开展某个紧前活动时，在这一活动进行之前所有的紧前活动都必须全部要完成。

1. 开掘之前并不需要等待任何其他活动的完成。
2. 开掘必须要在开始打地基之前完成。
3. 打地基必须要在外墙施工之前完成，以此类推。

这是在以后几节中会解决的几个关键问题。

如何更加直观在这个表格中的第一行就说明了：

为了给这些项目建立时间进度计划，佩蒂先生和全体工头进行协商，以便估计出这些活动中每一项活动正常情况下的完成时间。表8.1中的最右边一列给出了这些估计值。

把所有这些时间加起来总共是79周。这个数字已经远远超出了这个项目工期。幸好，这些活动中有些活动能够同时进行，这就大大地减少了项目完成所需要的时间。

在了解了表8.1中所含的各种信息之后，佩蒂先生需要解决下面几个问题：

1. 如何用图表示出这个项目中的活动流程？(8.2节)

2. 如果没有延误工期的话,完成这个项目总共需要多少时间?(8.3 节)
3. 各个活动最晚什么时候必须开始,以及到什么时候必须完成,才能赶上工程的完工日期?(8.3 节)
4. 如果没有延误的话,每一个单项活动最早什么时候可以开始,最早什么时候可以完成?(8.3 节)
5. 为了不耽误工程的完工日期,任何延误都必须加以避免的那些关键的"瓶颈"活动是什么?(8.3 节)
6. 在不影响项目完工时间的基础上,其他的活动能够承受多长时间的推迟?(8.3 节)
7. 得到了对每个活动工期精确估计的不确定性,项目在期限(47 周)内完成的概率是多少?(8.4 节)
8. 如果要用额外的资金来加速工程进度的话,怎样才能以最低的成本达到目标完成时间(40 周)?(8.5 节)
9. 如何对成本进行实时监控,以使项目成本控制在预算之内?(8.6 节)

由于经常使用 PERT/CPM,佩蒂先生知道这种技术在解答这些问题中将起到不可估量的作用(你会在上面圆括号中所标明的章节中了解到这一点)。

**问题回顾**

1. 在科信建筑公司中标的项目合同中,财务方面有哪些条款?
2. 什么是佩蒂先生努力所要达到的最后完工期限?
3. 一个活动的紧前活动是什么意思?紧后活动又是什么意思呢?
4. 针对这个项目,佩蒂先生收集了哪三种类型的信息?

## 8.2　用网络图直观显示项目

在上一章里,我们说明了如何用这些极有价值的网络图来表示并帮助分析各种各样的问题。同样,网络图在解决项目的问题上也将起到同样重要的作用。它们能够表示出活动之间的各种关系并展示未来的前景。它们可以帮助进行项目分析,并解答上一节末尾提出的问题。

### 项目网络

表示整个项目的网络图称为项目网络(project network)。一个项目网络包括许多的节点(一般用小圆圈或是长方形表示)和连接这些节点的弧(用箭头表示)(如果先前没有学习第 7 章讨论节点和弧的内容,那么在本章中,你可以把它们当作是在网络中给圆圈或长方形以及箭头所起的名字)。

就像在表 8.1 中所示的一样,描述这个项目需要三方面的信息:

> 这是在项目网络中需要显示的关键信息。

1. 活动的信息:把整个项目分成多个单独的部分(根据想要的详细程度)。
2. 活动次序关系:确定每一个活动的紧前活动。
3. 时间信息:估计每一个活动所需要的时间。

项目网络需要传递所有这些信息。我们有两种类型的项目网络可以满足这些要求。

第一种是用弧表示活动(activity-on-arc)的项目网络,简称 AOA 项目网络。每一个活动都是用一段弧来表示的。节点用来区分一个活动(一条离开该节点的弧)和它的紧前活动(一条指向该节点的弧)。因此这些弧的先后次序就代表了活动之间的先后关系。

另外一种是用节点表示活动(activity-on-node)的项目网络,简称 AON 项目网络。在这个网络中,每一个活动都用一个节点来表示。弧则是用来表示活动之间的先后关系。值得注意的是,对于表示拥有紧前活动的节点来说,它的每一个紧前活动都各有一个弧指向它。

在 PERT 和 CPM 的最早版本中使用了 AOA 的项目网络,因此在很多年里它就成了常用的一种类型。然而,同样是要传达相同的信息,与 AOA 项目网络相比起来,AON 项目网络有着十分重要的优势:

因为这些优势我们会采用 AON 网络项目。

1. AON 项目网络比 AOA 项目网络容易建立。
2. 对于那些没有经验的使用者(包括许多管理者在内)来说,AON 项目网络要比 AOA 项目网络更容易理解。
3. 如果项目中有所变动的话,AON 项目网络要比 AOA 项目网络更容易修改。

基于这些原因,AON 项目网络也越来越受到实际应用者的欢迎了。在某种程度上它似乎将要成为我们常用的类型。因此,在这里,我们主要介绍 AON 项目网络。

图8.1 就显示了科信建筑公司的项目网络图①。同样是参照了表8.1 中第三列,图中标出了一条弧是如何从一个活动的紧前活动指向这个活动的。因为活动 A 没有紧前活动,所以就有一条弧就从始点(start node)指向了活动 A。与之相类似,因为活动 M 和 N 没有紧后活动,所以弧就从这些活动指向了终点(finish node)。因此,我们从项目网络就可以一目了然地看出所有活动的次序关系(包括该项目的开始和结束)。根据表 8.1 中最右边的一列,代表每一个活动的节点周围的数字记录了完成这个活动所需要的估计工期(以周为单位)。

MS Project 是建立和分析网络项目的通用软件之一。

对于这种规模大小或者更大一些的项目,我们一般并不会通过活动列表直接来建立项目网络。如果你在这方面有困难的话,你可以参看 CD-ROM 中关于这一章的附录,那里面简要说明了建立项目网络的系统化程序并附有举例说明。

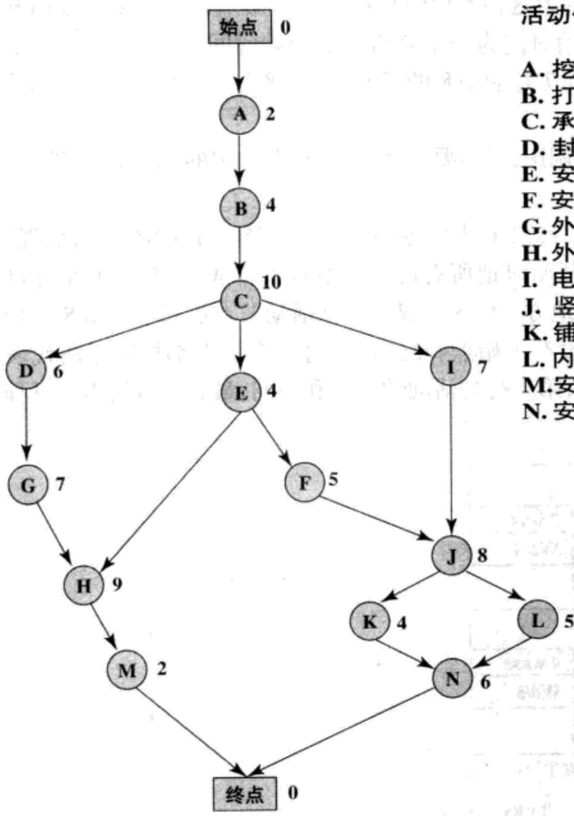
在实际应用中,建立项目网络通常要用到软件。下面我们就来介绍一下如何用 MS Project 软件(在管理科学课件里面)来处理科信建筑公司的项目。

## 使用 MS Project

应用 MS Project 的第一步就是要输入活动列表资料(见表8.1)。选择“视图”(View)菜单,然后从中选择“表”(Table)。从弹出的下一级菜单中选择“进入”(Entry)来建立一个需要输入信息的表格。这个关于科信建筑公司的表格如图 8.2 所示。你需要输入活动的名称、每一个活动的工期、第一个活动的开始日期以及每一个活动的紧前活动。完全输入了这些信息以后,程序就会立即自动建立表格的其他部分(包括右边的图表)。

程序默认的工期是以天为单位的,所以我们需要把单位变成为周。要进行这样的变

① 虽然项目网络图通常都是从左往右绘制的,但是我们在本书中自上而下地绘制网络图以便更好地适应本书的印刷页面。




**活动代号**

**A.** 挖掘
**B.** 打地基
**C.** 承重墙施工
**D.** 封顶
**E.** 安装外部管道
**F.** 安装内部管道
**G.** 外墙施工
**H.** 外部上漆
**I.** 电路铺设
**J.** 竖墙板
**K.** 铺地板
**L.** 内部上漆
**M.** 安装外部设备
**N.** 安装内部设备

**图 8.1**　科信建筑公司项目的项目网络。

| | Task Name | Duration | Start | Finish | Predecessors |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (A) Excavate | 2 wks | W1/1 | W2/5 | |
| 2 | (B) Foundation | 4 wks | W3/1 | W6/5 | 1 |
| 3 | (C) Rough wall | 10 wks | W7/1 | W16/5 | 2 |
| 4 | (D) Roof | 6 wks | W17/1 | W22/5 | 3 |
| 5 | (E) Exterior plumbing | 4 wks | W17/1 | W20/5 | 3 |
| 6 | (F) Interior plumbing | 5 wks | W21/1 | W25/5 | 5 |
| 7 | (G) Exterior siding | 7 wks | W23/1 | W29/5 | 4 |
| 8 | (H) Exterior painting | 9 wks | W30/1 | W38/5 | 5,7 |
| 9 | (I) Electrical work | 7 wks | W17/1 | W23/5 | 3 |
| 10 | (J) Wallboard | 8 wks | W26/1 | W33/5 | 6,9 |
| 11 | (K) Flooring | 4 wks | W34/1 | W37/5 | 10 |
| 12 | (L) Interior painting | 5 wks | W34/1 | W38/5 | 10 |
| 13 | (M) Exterior fixtures | 2 wks | W39/1 | W40/5 | 8 |
| 14 | (N) Interior fixtures | 6 wks | W39/1 | W44/5 | 11,12 |

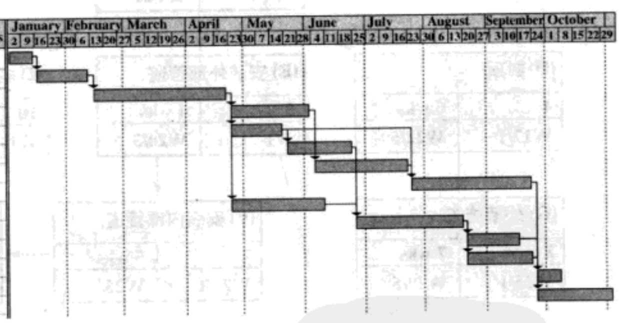



**图 8.2**　用 MS Project 为科信建筑公司项目的活动列表编制的电子表，右边的是这个项目的甘特图。

换，只需要在“工具”(Tool)菜单中选择“选项”(Option)，然后在“日程”(Schedule)选项下面改变“工期显示单位”(Durations is entered in)即可。

默认的时间格式为日历格式(例如:1/2/03)。在“工具”菜单栏下面选择“选项”，然后在“视图”选项下面选择“日期格式”(Data format)，这样就可以改变时间的格式了。我们选择从 0 开始计时。因此，第一个活动的开始时间为 W1/1，这是第一周第一天的简写形式，而且我们采用了五天工作制。例如：如果第一个活动的工期是两周，那么它的完成时间就要表示成为 W2/5(第二周，第五天)。

位于右边的图叫做甘特图(Gantt chart)。在实际应用中，如果要显示一个项目的进度

计划，甘特图的应用就十分广泛了。因为这种条形图直观地表示出了各个活动的起始和结束的时间(这个表格假定了项目的开始时间为一个公历年的开始时间)。箭头表示了活动之间的次序关系。例如:活动5和活动7是活动8的紧前活动，那么就有两个箭头分别从活动5和活动7指向活动8。

这个项目输入表格可以随时返回调用，只需要选择 “视图”菜单中的“表格”:“进入”就可以了。

你可以通过屏幕左下方的视图工具条来选择各种不同的视图。甘特图是默认视图。PERT图显示了项目网络。这个视图开始时把所有的活动节点都排成了整行，但是你可以把这些活动节点用鼠标拖到你想要的地方。图8.3显示了把活动节点放到了与图8.1相对应的位置上所得到的项目网络(只是没有了始点和终点)。每一个节点都标明了所代表活动的许多信息。第一行是活动的名字，第二行是活动的编号和工期，最后一行给出了日程的开始和完成时间。

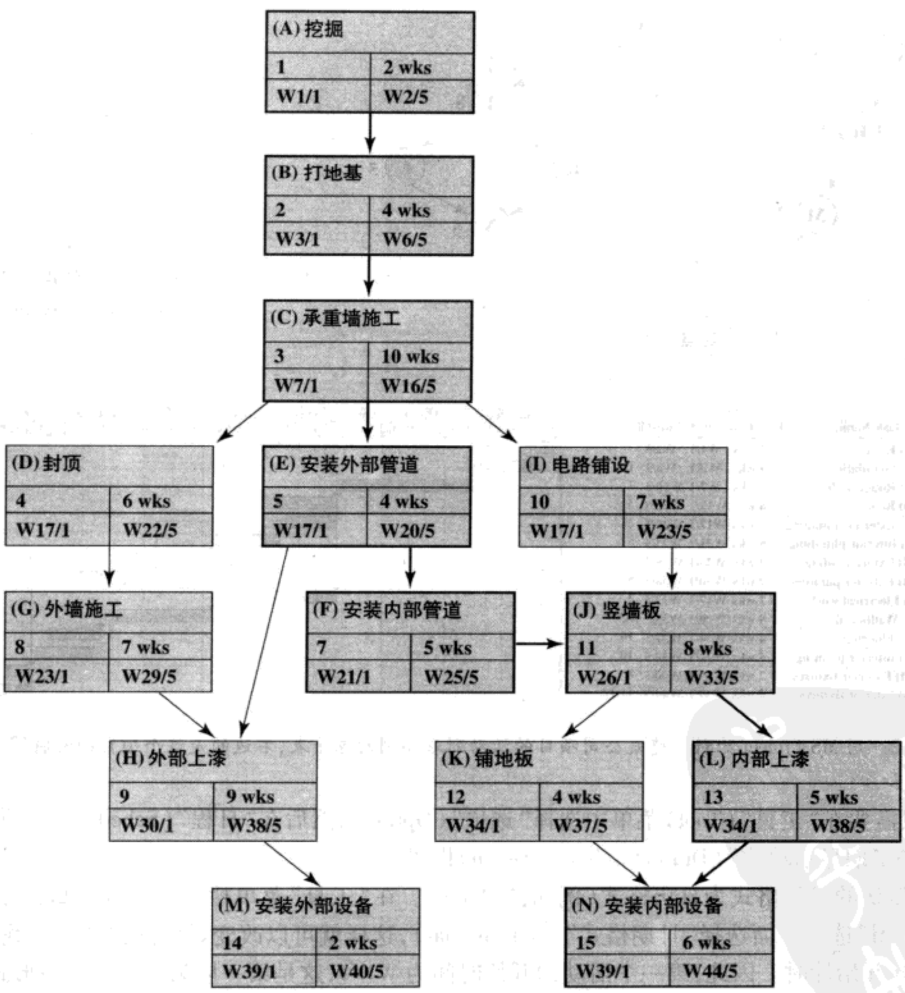



图 8.3 用 MS Project 建立的科信建筑公司的项目网络。

MS Project 软件还给出了在随后的章节中我们要讲到的类型的一些信息。当它出现时我们会进行说明。与其这样继续在下面的章节中演示输出的形式,不如在你自己的管理科学课件中通过 MS Project 软件来进行演示。在此就不再多讲了。

### 问题回顾

1. 项目网络需要传达出哪三种信息?
2. 用弧表示活动的项目网络(AOA)与用节点表示活动的项目网络(AON)有什么区别?我们在这里用了哪种类型?
3. 甘特图中的长条表示了什么?

## 8.3 用 PERT/CPM 进行项目排程

在8.1节最后我们提到科信建筑公司的项目经理佩蒂先生想要寻求一系列问题的答案并且解决问题的最好的方法就是使用 PERT/CPM。在上一节中,我们已经就他的第一个问题进行了回答。现在我们在这一节中要回答下面五个问题:

**问题2**:如果没有延误工期,完成这个项目需要的总时间是多少?

**问题3**:各个活动最晚什么时候开始,以及到什么时候一定要完成,才能赶上工程的完工日期?

**问题4**:如果没有延误的话,每一个单项活动最早什么时候可以开始,最早什么时候可以完成?

**问题5**:为了不耽误工程的完工日期,任何延误都必须加以避免的那些关键的"瓶颈"活动是什么?

**问题6**:在不影响项目完工时间的基础上,其他的活动能够推迟多少时间?

图8.1中的项目网络向我们提供了两类至关重要的信息:相应的活动一定要完成的次序和每一个活动(预计的)工期。这就使得我们可以解决所有的问题了。那么现在我们重点来看一看问题2和问题5。

### 关键路径

完成项目需要多长时间?前面我们讲到了,如果把所有的时间都相加起来的话,就是79周。然而,这并不是问题的答案。因为这些活动中有些是可以同时进行或几乎同时进行的。

与之相关联的是在网络图中路径的长度。

网络图的路径(path)是指沿着箭头(弧)方向从始点到终点所有线路中的一条。路径的长度(length of path)是指沿着路径所有活动(预计)工期总和。

表8.2给出了图8.1网络图的六条路径,同时还给出了这些路径中工期相加所得的路径长度。这些路径的长度范围从31周到最长的44周(表中的第四条路径)。

已经给出了这些路径的长度,那么你认为(预计)项目工期(项目所需要的总时间)应该是多少呢?让我们来推算一下。

项目工期不能比任一路径的长度短。

因为任何一个给出路径中的活动都只能一个接一个按照顺序进行而不能重叠，所以项目工期就不可能比路径的长度更短了。然而项目工期也有可能变得长一些，因为路径中有的活动拥有多个紧前活动，这就有可能需要等待那些不在这条路径中的紧前活动完成，显然这要比等待在路径中的紧前活动要花费更多的时间。例如，表 8.2 中的第二条路径，注意活动 H。这个活动拥有两个紧前活动，其中一个（活动 G）不在路径之上，而另一个（活动 E）在路径中。当活动 C 完成以后，活动 E 只需要 4 周多的时间而活动 D 接着是活动 G，这个过程完成却需要 13 周的时间。因此，项目工期要比第二条路径要长得多。

**表 8.2 科信建筑公司项目网络中的路径和路径的长度**

| 路　径 | 长度（单位：周） |
|---|---|
| 始点→A→B→C→D→G→H→M→终点 | 2+4+10+6+7+9+2=40 |
| 始点→A→B→C→E→H→M→终点 | 2+4+10+4+9+2=31 |
| 始点→A→B→C→E→F→J→K→N→终点 | 2+4+10+4+5+8+4+6=43 |
| 始点→A→B→C→E→F→J→L→N→终点 | 2+4+10+4+5+8+5+6=44 |
| 始点→A→B→C→I→J→K→N→终点 | 2+4+10+7+8+4+6=41 |
| 始点→A→B→C→I→J→L→N→终点 | 2+4+10+7+8+5+6=42 |

但是，项目工期总是不会比一条特殊的路径长。这条路径就是网络图中最长的路径。在这条路径中的活动可以连续不断地进行下去而不需要任何停顿（否则，它就不是最长的路径了）。因此，到达终点所需要的时间正好等于该路径的长度。从其他的路径到达终点的时间不会长于这条路径。

于是，我们就得出了一个很重要的结论：

（预计）项目工期正好等于项目网络中最长路径的长度。这条最长的路径就叫做关键路径（critical path）（如果有不止一条的话，它们都是关键路径。）

于是，对于科信建筑公司的项目来说，我们可以得到：

关键路径：始点→A→B→C→E→F→J→L→N→终点

（预计）项目工期 =44 周

现在我们就解答了在本节开始时提到的佩蒂先生的问题 2 和问题 5。如果不发生意外事故耽误工期的话，完成整个项目所需要的总时间大约为 44 周。而且，在这条关键路径上的活动都是关键的瓶颈活动，这就要求在施工中不能有任何的拖延以免延误工期。这些对于佩蒂先生来说是很有价值的信息。因为现在他知道了，要想让整个项目按照日程进行，就必须把注意力集中在确保这些关键活动能够按照日程进行上。而且，如果他想要缩短工期的话（别忘了，如果在 40 周之内完工就会有奖金），那么就应该在这些关键活动上面做文章，减少它们的工时。

关键路径上的活动都是瓶颈活动。任何拖延都会延误工期。

对于像图 8.1 这样的小型项目网络来说，找出所有的路径并且定出最长的路径是一个找出关键路径的十分简便的方法。但是，对于那些较大而且复杂的项目网络来说，却并不是一个简便的方法。PERT/CPM 就转而使用了效率更高的程序来完成这件事。

这种 PERT/CPM 程序不仅对于大型项目十分有效，而且它比起寻找所有路径的方法来

说可以提供更多的信息。尤其是它可以解答在本节开始时所列出的所有五个问题,而不仅仅是两个。这些答案向我们提供了一些关键的信息,可以用来为所有的活动安排日程并评估任何一个活动不按照进度进行所产生的后果。

这个程序的组成部分将在这一节中的后半部分进行说明。

## 为每一项活动安排日程

PERT/CPM 安排日程程序从第四个问题开始进行:如果没有延误的话,最早什么时候可以开始每一个单项活动,最早什么时候可以完成?“没有延误”的意思是:(1)每一个活动的实际完成所用时间和预计工期正好吻合;(2)一旦一项活动的紧前活动完成,这个活动就要马上开始进行。如果在整个工程中都没有延误的话,那么每一个活动的开始时间和结束时间就叫作最早开始时间(earliest start time)和最早结束时间(earliest finish time)。这些时间用以下的符号来表示:

> ES 和 EF 表示如果整个工程都没有延误的话,活动的开始时间和结束时间。

ES = 一个特定活动的最早开始时间

EF = 一个特定活动的最早结束时间

这里

EF = ES + 活动的(预计)工期

我们使用从项目开始起的时段计数(例如在科信建筑公司项目中的星期数),而不是给这些时间注上具体的日历时间。

因此

项目的开始时间 = 0

因为科信建筑公司项目是从活动 A 开始的,所以我们有

活动 A: ES = 0

EF = 0 + 活动的工期(2 周)

= 2

在图 8.1 中活动 A 的旁边标出了它的工期。因为活动 A 一结束紧接着就进行活动 B。所以有:

活动 B: ES = 活动 A 的 EF

= 2

EF = 2 + 活动工期(4 周)

= 6

活动 B 的 ES 计算过程体现了计算 ES 第一条规则。

如果某个活动只有一个紧前活动,那么:

这个活动的 ES = 其紧前活动的 EF

用这条规则很快就可以求出活动 C 的 ES 和 EF,然后是活动 D、E、I 一直到 G、F。

图 8.4 列出了每一项活动的 ES 和 EF,并标注在节点的右边。例如:

活动 G: ES = 活动 D 的 EF
= 22
EF = 22 + 活动工期(7 周)
= 29

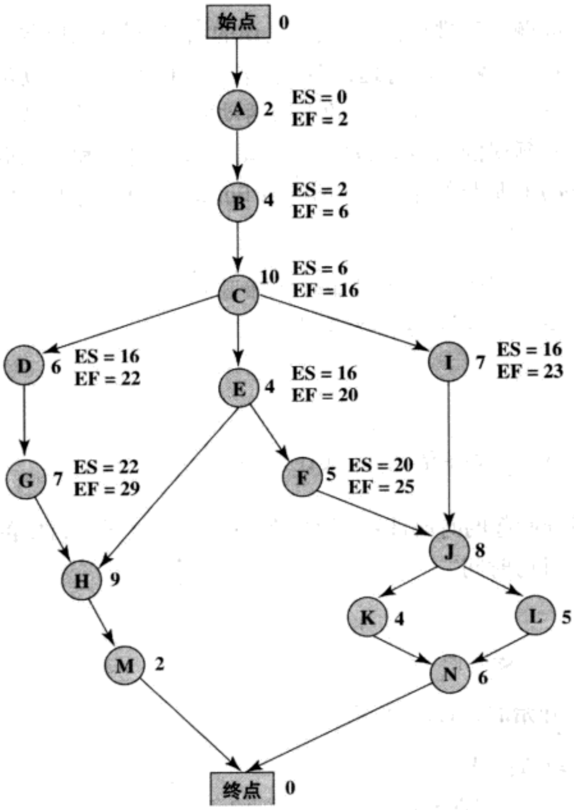



图 8.4 图 8.1 中只有一个紧前活动的活动最早开始时间(ES)和最早结束时间(EF)的计算。

这就是说这项活动从项目开始算起第 22 周开始进行并在第 29 周完成。

现在我们来讨论一下活动 H 的情况,因为它拥有两个紧前活动:活动 G 和活动 E,想要开始进行活动 H,就必须要等活动 G 和活动 E 都完成了才行。于是就有下面的计算过程:

活动 H 的紧前活动:

活动 G 的 EF = 29
活动 E 的 EF = 20
其中较大的一个 EF = 29

因此就可以得出:

活动 H 的 ES = 上面两个 EF 之中较大的一个
= 29

这个计算过程体现了计算任何一个活动最早开始时间的一般规则。

**最早开始时间规则(Earliest Start Time Rule)**

一个活动的最早开始时间就是所有紧前活动的最早结束时间中最大的一个时间。用符号表示为：

ES = 其紧前活动的 EF 中最大的一个

> 最早开始时间规则提供给一个活动最早开始时间，只要计算了 ES 和 EF 的每个紧前活动。

如果活动只有一个紧前活动，第二条规则和前面给出的第一条规则是一样的。但是，第二条规则同样适用于拥有很多个紧前活动的活动。以此类推，把这条规则应用到图 8.4 中的其他活动中，就可以得到图 8.5 中所给出的 ES 和 EF 的一组数值。

我们注意到在图 8.5 中包括了起始节点和终止节点的 ES 和 EF 的数值。因为一般我们把它们看作是所用时间为零的虚活动。对于始点来说，很显然有 ES = 0 = EF。对于终点而言，就像我们在下文中要讲到的一样，一般按照最早开始时间规则来进行计算。

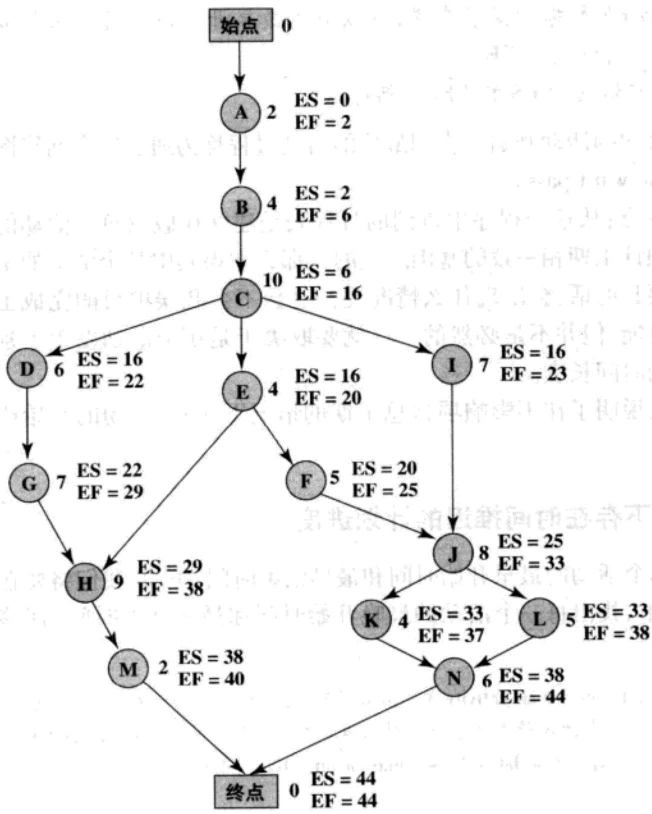



**图 8.5**　在科信建筑公司项目中所有活动的最早开始时间(ES)和最早结束时间(EF)的计算(其中包括始点和终点)。

终点的紧前活动为：

活动 M 的 EF = 40
活动 N 的 EF = 44
其中较大的 EF = 44

因此

终点的 ES = 比较大的 EF
= 44

终点的 EF = 44 + 0 = 44

最后一个节点的 EF 表示如果一切按照计划的话，项目将何时完成。

最后的计算结果表明：如果项目中的每一个活动都按照图 8.5 中所列的开始时间和结束时间（问题 2 的答案）严格进行而没有任何延误的话，那么项目就能够在 44 周之内完成。现在佩蒂先生就可以用这个日程表通知负责每一项活动的员工活动计划开始时间和计划结束时间。

现在我们总结一下为任何一个项目建立这样一个日程的完整步骤。

**得到所有活动最早时间的步骤**

1. 对于项目的每一个开始活动（包括开始节点），设置它的最早开始时间为 ES = 0。
2. 对于已经得到 ES 数据的活动，使用下面的公式计算它的最早结束时间：

$$EF = ES + (\text{预计})\text{每一活动的工期}$$

3. 对于已经得到其紧前活动 EF 数据的活动来说，可以应用最早开始时间规则来计算它的 ES。然后重复第二步得到它的 EF。
4. 重复进行第三步，求出所有活动的 ES 和 EF（包括终点）。

程序从最初的活动开始到最后的活动结束依次寻找每个活动的 ES 和 EF。

这种从最初的活动开始一直到最后的活动过程称为通过这个网络图的前向追溯（forward pass）。

记住这一点：从这个程序中得到的日程表是建立在假设每一活动的实际用时和预计工期相一致的基础之上的。那么如果其中某个活动的工期比预计的要长的话，会出现什么情况呢？这会不会耽误项目的完成工期呢？也许可能，但并不是必然的。这就要取决于是哪个活动发生了延误以及延误的时间长度。

这个程序的下一部分就重点说明了在不影响项目总工期的情况下，一个活动的开始或者结束可以推迟多少时间。

## 在不耽误项目完工期限情况下存在时间推迟的计划进度

我们在前面已经可以得出一个活动的最早开始时间和最早结束时间，下面，我们将要在保持工期在 44 周内完工的前提下，找出每一个活动的最晚开始时间和最晚结束时间（回答第三个问题）。

**活动的最晚开始时间**（the latest start time for an activity）是指假设项目以后的进行过程中没有延误，在不影响项目完成总时间的前提下一个活动最晚可能开始的时间（对于终点来说，仍然是最早结束时间）。对于完成活动，活动的最晚结束时间（the latest finish time for an activity）有着重要的定义。

用符号来表示：

LS 和 LF 分别表示不延误工期的情况下一个活动的最晚开始时间和结束时间。

LS = 一个活动的最晚开始时间
LF = 一个活动的最晚结束时间

而且

$$LS = LF - \text{活动的}(\text{预计})\text{工期}$$

为了得到 LF，我们使用如下规则：

**最晚结束时间规则**

一个活动的最晚结束时间就等于其所有紧后活动最晚开始时间中最小的一个。

用符号表示：

LF = 其紧后活动的最小 LS

因为一个活动的紧后活动一直要等到这个活动结束后才能开始，这个规则也就意味着必须及时完成这个活动，以确保这个活动的所有的紧后活动都能够按照它们的最晚开始时间开始进行。

以图 8.1 中的活动 M 为例，其惟一的紧后活动就是终点。必须要在 44 个时间单位之内到达这个节点，以确保项目能够在 44 周之内完成。于是我们可以为终点添加上如下所示数据。

终点： LF = 它的 EF = 44
LS = 44 − 0 = 44

现在我们把最晚结束时间规则应用到活动 M 上。

活动 M： LF = 终点的 LS
= 44
LS = 44 − 活动工期(2 周)
= 42

（因为活动 M 是项目的最后一个活动，所以我们可以很自然地设定它的 LF 等于终点的最早结束时间，而不用最晚结束时间规则。）

由于活动 M 是活动 H 的惟一紧后活动，所以我们可以把最晚结束时间规则应用到活动 H 上。

活动 H： LF = 活动 M 的 LS
= 42
LS = 42 − 活动工期(9 周)
= 33

> 程序从最后一个活动开始一直回溯到最初的活动来寻找每个活动的 LF 和 LS。

我们注意到，上文中举例说明的这个计算过程是从最后的一个活动开始进行的，在时间上一直回溯到最初的活动。因此和寻找最早开始时间和最早结束时间的前向追溯相比，我们把这一过程叫作通过网络图的逆向追溯（backward pass）。下面是我们对这个过程进行的归纳：

**得到所有活动最晚时间的步骤**

1. 对于整个项目的每一道活动（包括终点）来说，我们设定其最晚结束时间（LF）等于终点的最早结束时间。
2. 对于已经得到 LF 数据的任一活动，我们可以通过下面的公式来计算它的最晚开始时间：

LS = LF − 这个活动的（预计）工期

3. 对于已知其紧后活动 LS 数据的活动来说，可以通过应用最晚结束时间规则得到其

LF。然后应用第二步计算出它的LS。

4. 重复步骤3,直至得到所有活动的LF和LS(包括开始节点)。

图8.6显示了应用这一规则得到的结论。以拥有三个紧后活动的活动C为例。活动C的紧后活动:

活动D的LS=20
活动E的LS=16
活动I的LS=18
最小的LS=16

因此:

活动C的LF=上面的LS数值中最小的一个
=16

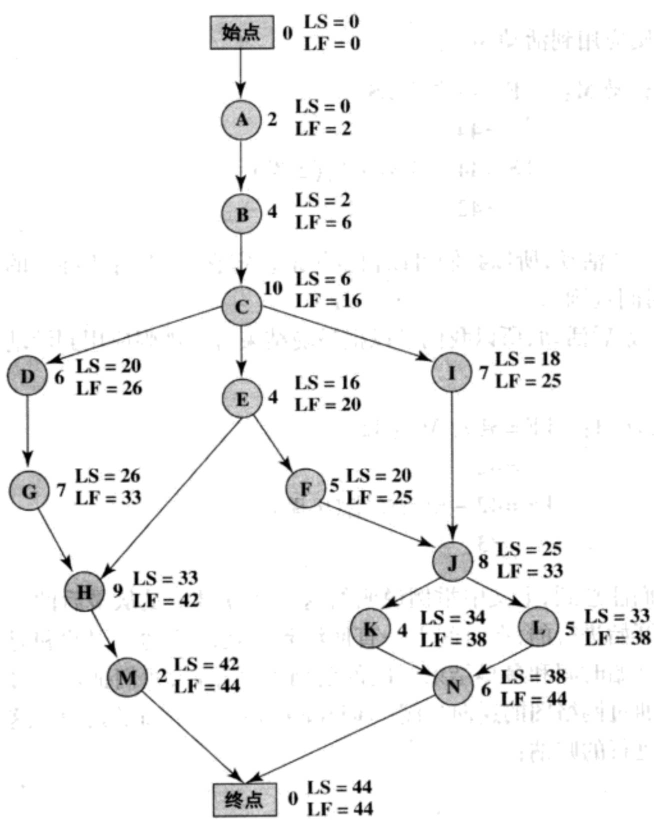



图8.6 科信建筑公司项目中所有活动最晚开始时间(LS)和最晚结束时间(LF)的计算(包括始点和终点)。

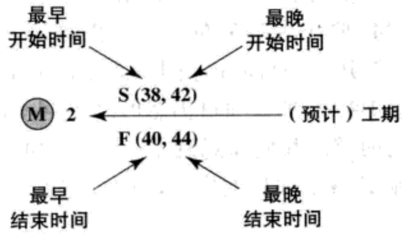
佩蒂先生现在明白了图8.6的进度安排表示了他的"最后机会的进度安排"。即使一个活动的开始和结束时间像图中所示的那么晚,如果不存在后续延误的话,他仍然能够在规定的44周工期内完成这个项目。然而,由于一些不可预料延误的存在,他还是情愿尽可能地使用图8.5所示的最早时间计划表。

如果图8.6中某一活动的开始和结束时间比图8.5中的相应时间晚的话,那么在这个活动的时间安排中就有松弛。用来为一个项目建立日程的PERT/CPM程序的最后一部分

就是要识别出这些松弛并用这些信息来寻找关键路径(这就将回答问题5和问题6)。

## 确定进度时间表中的时差

把图 8.6 中的最晚时间和图 8.5 中的最早时间合并到一个图表能够很容易地找到这些松弛。以活动 M 为例,要像下面这样把有关这个活动的信息都表示在一起。




(注意每一个小括号前面的 S 和 F 是用来区分开始时间和结束时间的。)图 8.7 显示了整个项目的信息。

这种图表使我们更容易看出每一个活动有多少时差。

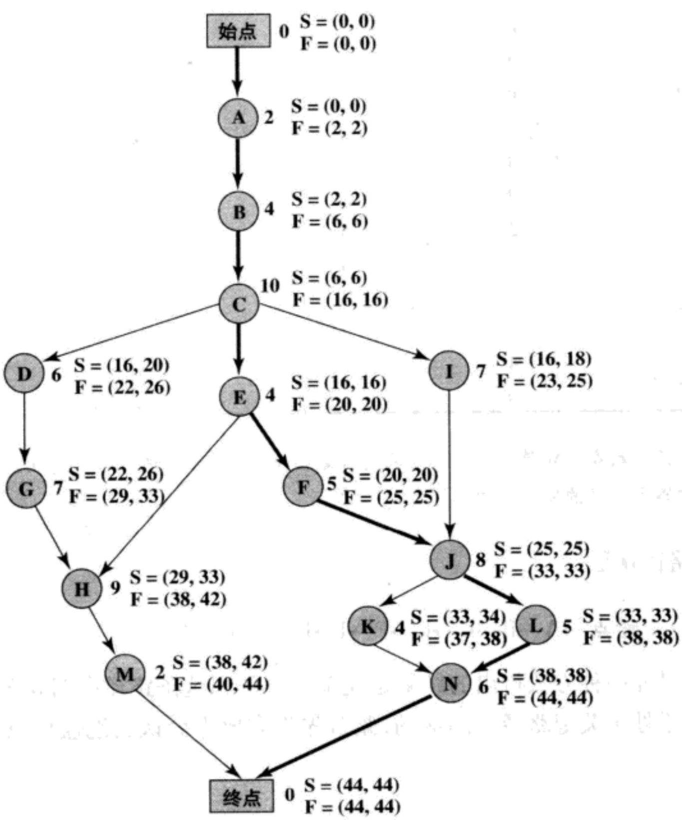



图 8.7　科信建筑公司项目的完整的项目网络,其中在上面的小括号中标明了 ES 和 LS,在下面的小括号中标明了 EF 和 LF,粗黑箭头标明了贯穿网络图的关键路径。

**活动的时差**(the slack of an activity)是指这个活动的最晚结束时间和最早结束时间之差。用符号表示:

$$\text{时差} = LF - EF$$

（因为 LF - EF = LS - ES，所以这两个差值都可以用来计算时差。）

举例来说：

$$活动\ M\ 的时差 = 44 - 40 = 4$$

这意味着在最早时间日程安排下活动 M 中可以拥有多达 4 周的延误而不会耽误整个项目的完成时间 44 周。这些都是很有意义的，因为活动 M 和活动 N 完成以后整个项目也就完成了，活动 N 的最早结束时间（44）要比活动 M 的最早结束时间多出 4 周。只要活动 N 按照计划的进度安排进行，活动 M 在开始进行时（原因可能是前面的活动用的时间比预计的要多）以及在执行中的延误不超过 4 周，那么项目仍然可以在 44 周之内完成。

表 8.3 列出了每一个活动的时差。我们注意到了一些活动的时差为零，这就意味着在这些活动中的任何延误都会影响到整个项目的完成时间。这就是 PERT/CPM 识别关键路径的方法。

**表 8.3　科信建筑公司项目中活动的时差**

| 活　动 | 时差（LF - EF） | 是否处于关键路径上 |
|---|---|---|
| A | 0 | 是 |
| B | 0 | 是 |
| C | 0 | 是 |
| D | 4 | 否 |
| E | 0 | 是 |
| F | 0 | 是 |
| G | 4 | 否 |
| H | 4 | 否 |
| I | 2 | 否 |
| J | 0 | 是 |
| K | 1 | 否 |
| L | 0 | 是 |
| M | 4 | 否 |
| N | 0 | 是 |

在关键路径上的活动应该严格监视来保证项目按时完成。

拥有零时差的活动都在贯穿整个项目网络的关键路径上，所以沿着这条路径的任何延误都会影响整个项目的完成时间。

因此，关键路径就是：

始点→A→B→C→E→F→J→L→N→终点

这和我们在本章节开始时使用另外一种方法得出的结果是完全一致的。这条路径在图 8.7 中用粗黑箭头表示了出来。对于处于关键路径上的活动，佩蒂先生需要十分认真地监控以确保按时完成项目。

## 回　顾

现在让我们回顾一下在本章开始的时候佩蒂先生的问题，并复习一下这些问题是如何通过 PERT/CPM 时间进度设定程序来得到解决的。

**问题 2**：如果没有延误工期，完成这个项目需要的总时间是多少？这个数据就是终点的最早结束时间（EF = 44 周），在图 8.5 和图 8.7 中的底部都给出了这个数据。

**问题 3**：各个活动最晚什么时候必须开始，以及到什么时候一定要完成，才能赶上工程的完工日期？这些时间就是在图 8.6 和图 8.7 中所给出的最晚开始时间（LS）和最晚结束时间（LF）。如果没有其他延误发生的话，它们就是在 44 周内完成项目的“最后机会的时间计划表”。

**问题 4**：如果没有延误的话，每一个单项活动最早什么时候开始，最早什么时候完成？这些时间就是在图 8.5 和图 8.7 中所给出的最早开始时间（ES）和最早结束时间（EF）。这些时间一般用来建立项目的最初日程安排（在这个过程中可能出现的延误会不断地对日程安排作出调整）。

**问题 5**：为了不耽误工程的完工日期，任何延误都必须加以避免的那些关键的“瓶颈”活动是什么？这些活动就是在图 8.7 中用粗黑箭头显示的关键路径上的活动。为了确保项目能够按进度完成，佩蒂先生需要把他的大部分精力放在确保这些活动能够按照时间进度进行上。

**问题 6**：在不影响项目完工时间的基础上，其他的活动能够承受多长时间的推迟？这些可以容忍的延误就是表 8.3 中间一列正的时差。

## 使用计算机来解答这些问题

如果你喜欢使用电子表格来解答这些问题，请参见图 8.8。图的上半部分提供了这些答案。为了得到这些答案，我们必须通过应用这一节阐述的条理将合适的等式输入到不同的单元格中（如图下半部分所示）。E 列的等式就是直接建立在最早开始时间规则的基础之上的。F 列的等式应用了公式：EF = ES + 活动工期，这些时间在单元格时间（D4:D17）中给出。与之相类似，G 列的等式应用了公式：LS = LF − 活动工期。H 列直接应用了最晚结束时间规则。I 列应用了公式：时差 = LF − EF。如果时差等于零，那么 J 列就会显示 Yes，否则就会显示 No。

与直接通过项目网络图计算相比，也许建立电子表格并把等式都输入到表格中计算所花费的时间将会多很多。但是，如果你对自己的直接计算能力有所怀疑的话，你可以依靠 Excel 准确地来完成这项工作。而且，这种电子表格也会以一种很直观明确的形式得出计算结果。

在进入了以项目生成表格（project entry table）（图 8.2）后，你就可以使用 MS Project 软件，在“视图”菜单下选择“表：日程”（Table:Schedule）来生成一个和图 8.8 的上半部分相类似的表格。如同你的管理科学课件中有关这一章的 MS Project 文件所示，这个表格以与图 8.2 和图 8.3 相同时间格式标明了 ES、EF、LS 和 LF。对于每一个活动，这个表格还标明了两个数据，分别叫作自由时差和总时差。当同一路径上的多个活动具有相同的时差时，自由时差只是最后一道活动的时差。总时差也就是我们（以及其他人）所说的时差。关键路径的表示方法可以参考图 8.3，用较宽的箭头来标示（如果使用的是彩色显示器和打印机，关键路径是用红色表示的）。

## 问题回顾

1. 下面几个术语是什么意思：(a) 项目网络的路径；(b) 路径的长度；(c) 关键路径？

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Reliable Construction Co. Project Scheduling Problem** | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | **Activity** | **Description** | **Time** | **ES** | **EF** | **LS** | **LF** | **Slack** | **Critical?** |
| 4 | | A | Excavate | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | Yes |
| 5 | | B | Foundation | 4 | 2 | 6 | 2 | 6 | 0 | Yes |
| 6 | | C | Rough Wall | 10 | 6 | 16 | 6 | 16 | 0 | Yes |
| 7 | | D | Roof | 6 | 16 | 22 | 20 | 26 | 4 | No |
| 8 | | E | Exterior Plumbing | 4 | 16 | 20 | 16 | 20 | 0 | Yes |
| 9 | | F | Interior Plumbing | 5 | 20 | 25 | 20 | 25 | 0 | Yes |
| 10 | | G | Exterior Siding | 7 | 22 | 29 | 26 | 33 | 4 | No |
| 11 | | H | Exterior Painting | 9 | 29 | 38 | 33 | 42 | 4 | No |
| 12 | | I | Electrical Work | 7 | 16 | 23 | 18 | 25 | 2 | No |
| 13 | | J | Wallboard | 8 | 25 | 33 | 25 | 33 | 0 | Yes |
| 14 | | K | Flooring | 4 | 33 | 37 | 34 | 38 | 1 | No |
| 15 | | L | Interior Painting | 5 | 33 | 38 | 33 | 38 | 0 | Yes |
| 16 | | M | Exterior Fixtures | 2 | 38 | 40 | 42 | 44 | 4 | No |
| 17 | | N | Interior Fixtures | 6 | 38 | 44 | 38 | 44 | 0 | Yes |
| 18 | | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | **Project Duration** | 44 | | | | |

| | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | **ES** | **EF** | **LS** | **LF** | **Slack** | **Critical?** |
| 4 | 0 | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G5) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 5 | =MAX(F4) | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G6) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 6 | =MAX(F5) | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G7,G8,G12) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 7 | =MAX(F6) | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G10) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 8 | =MAX(F6) | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G9,G11) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 9 | =MAX(F8) | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G13) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 10 | =MAX(F7) | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G11) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 11 | =MAX(F8,F10) | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G16) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 12 | =MAX(F6) | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G13) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 13 | =MAX(F9,F12) | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G14,G15) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 14 | =MAX(F13) | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G17) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 15 | =MAX(F13) | =ES+Time | =LF-Time | =MIN(G17) | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 16 | =MAX(F11) | =ES+Time | =LF-Time | =ProjectDuration | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 17 | =MAX(F14,F15) | =ES+Time | =LF-Time | =ProjectDuration | =LF-EF | =IF(Slack=0,"Yes","No") |
| 18 | | | | | | |
| 19 | **Project Duration** | =MAX(EF) | | | | |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Activity | B4:B17 |
| Critical? | J4:J17 |
| Description | C4:C17 |
| EF | F4:F17 |
| ES | E4:E17 |
| LF | H4:H17 |
| LS | G4:G17 |
| ProjectDuration | F19 |
| Slack | I4:I17 |
| Time | D4:D17 |

**图 8.8** 图底部的等式说明了如何在电子表格中为科信建筑公司的项目制定项目日程。

2. 怎样做才能在最早开始时间规则的基础之上建立日程安排?
3. 什么是最早开始时间规则?
4. 什么是项目网络中的前向追溯?
5. 为什么建立在最晚开始时间和最晚结束时间基础之上的时间进度表被称为"最后机会的时间计划表"?
6. 什么是最晚结束时间规则?
7. 项目网络中的逆向追溯和前向追溯有什么区别?
8. 关键路径对于项目管理人员有什么重要意义?
9. 通过项目网络寻找关键路径的两种方法是什么?

## 8.4　处理不确定活动工期

现在我们来讨论佩蒂先生的下一个问题，也就是在 8.1 节最后提到的第七个问题。

**问题 7**：在得到了对每个活动工期精确估计的不确定性情况下，项目在期限(47 周)内完成的概率是多少？

如果科信建筑公司不能在最后期限前完成项目的话，就会损失一大笔罚金(30 万美元)。因此，佩蒂先生必须知道在最后期限前完成工作的概率是多少。如果这个概率不高的话，佩蒂先生就要考虑使用代价昂贵的途径(比如说加班)来缩短一部分活动的工期。

> 每一活动实际需要多少时间，有许多的不确定性。

虽然通过 PERT/CPM 时间进度建立程序所得出的 44 周项目总时间能够使人稍微感到一点放心，但是佩蒂先生十分清楚这个估计结果是建立在每一个活动的工期都和预计的活动工期相一致的基础上的，至少对于那些在关键路径上的活动是这样。因为公司在运作这类项目方面没有经验，所以关于每一活动实际需要多少时间，有许多的不确定性。在实际的操作中，每一个活动完成的工期都是具有某种概率分布的随机变量。

通过三种对活动时间的估计，最初版本的 PERT 把这些不确定性因素考虑在内，得到了这些时间概率分布的一些基本信息，如下所述。

### PERT 的三种估计方法

对于每一个活动的三种估计是：

**最大可能估计**($m$) = 完成某项活动最可能出现的工期估计

**乐观估计**($o$) = 在最佳条件下完成某活动的工期估计

**悲观估计**($p$) = 在最不利条件下完成某活动的工期估计

三种估计概率分布图形的位置如图 8.9 所示。

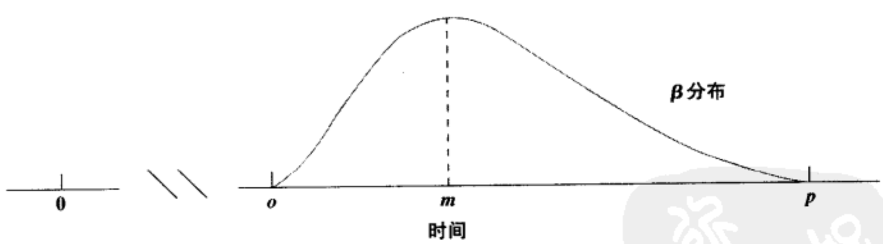



**图 8.9**　PERT 三种活动工期估计的概率分布模型：$m$ = 最大可能估计；$o$ = 乐观估计；$p$ = 悲观估计

我们从图中可以得到，乐观估计和悲观估计处于概率分布曲线上可能出现的极端，而最大可能估计位于概率分布曲线的最高点。为了计算概率分布的均值和方差，PERT 还假设了这种概率分布形式为 $\beta$ 分布(形状如图所示)。如图 8.9 所示，$\beta$ 分布合理的描述了活动时间的分布，包括两个端点($o$ 和 $p$)以及一个最高点($m$)，正好对应于三个时间估计。

设：

$$\mu = \text{图 8.9 中概率分布的均值}$$

$$\sigma^2 = \text{图 8.9 中概率分布的方差}$$

因此,如果每一个活动都重复进行很多次并把每一次的结果都记录下来,$\mu$ 就是这些时间的均值。如果 $\sigma^2=0$,那么所有的这些时间都相同。而如果 $\sigma^2$ 的数值很大,说明这些时间有很大的差异。标准差 $\sigma$($\sigma^2$ 的平方根)也能够用来衡量这种差异。这些时间之中有许多都分布在$(\mu-\sigma)$到$(\mu+\sigma)$之间,但是也有一些时间不在这个范围之内。然而比如 $\beta$ 分布,大多数的概率分布几乎所有的时间数据都在$(\mu-3\sigma)$到$(\mu+3\sigma)$的范围之内进行变化(例如,对于一个正态分布来说,99.73% 的时间数据分布在这个范围之内)。换句话说,最大时间和最小时间之间的差距是 $6\sigma$。于是我们得到计算 $\sigma^2$ 的近似公式为:

> 乐观估计和悲观估计之间的差距大致是 $6\sigma$。

$$\sigma^2 = \left(\frac{p-o}{6}\right)^2$$

与之相类似,$\mu$ 的近似公式为:

$$\mu = \frac{o+4m+p}{6}$$

很显然,我们可以从公式中看到,最可能时间估计起到最重要的作用,而其他两种估计处于同等的次要地位。

我们要说明这几个计算和的公式在近年引起了一定的争议。在 8.7 节中,一些研究对这些估计提出质疑,认为要选择其他估计方法。但是,就目前来说,这些公式仍是标准 PERT 程序的一部分。

> MS Project 软件包括使用这三种估计方法,如同你的管理科学课件中的 MS Project 文件所示。

MS Project 软件提供了一个选项,可以使用这个公式为每一个活动计算出的值。在"视图"菜单下选择"表:PA_PERT 输入"(Table:PA_PERT Entry)选项可以输入各个活动的三种估计(最可能估计时间就是期望工期)。然后在"视图"菜单下选择"工具栏:PERT 分析"(Toolbar:PERT Analysis)选项得到一个可以对这些估计进行各种分析的工具栏。选择"计算 PERT"(Calculate PERT),用上面所介绍的公式重新计算工时得到 $\mu$ 值。另外的一个选项用来显示基于每一个活动三种工时估计的甘特图。

佩蒂先生和负责各个活动的小组负责人进行了接触并要求每一个活动的工期都要作出这三种估计。结果如表 8.4 中的前四列所示。

例如,活动 C 的三种估计的结果分别为:

$$\text{活动 C:}\quad o=6 \qquad m=9 \qquad p=18$$

于是,应用上面所介绍的公式,这个活动的工期均值和方差就近似等于:

$$\mu = \frac{6+4\times 9+18}{6} = 10$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{18-6}{6}\right)^2 = 4$$

我们注意到,活动时间的均值($\mu$)和最大可能时间估计($m$)并不一致。这是很正常的情况(高的活动工期出现得多的可能性使得均值上升),但是一般来说 $\mu$ 至少是很接近 $m$ 的。

**表 8.4 科信建筑公司项目中每一个活动的均值和方差**

| 活动 | 乐观估计时间 $o$ | 最大可能时间 $m$ | 悲观估计时间 $p$ | 均值 $\mu=\frac{o+4m+p}{6}$ | 方差 $\sigma^2=(\frac{p-o}{6})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 3 | 2 | $\frac{1}{9}$ |
| B | 2 | 3.5 | 8 | 4 | 1 |
| C | 6 | 9 | 18 | 10 | 4 |
| D | 4 | 5.5 | 10 | 6 | 1 |
| E | 1 | 4.5 | 5 | 4 | $\frac{4}{9}$ |
| F | 4 | 4 | 10 | 5 | 1 |
| G | 5 | 6.5 | 11 | 7 | 1 |
| H | 5 | 8 | 17 | 9 | 4 |
| I | 3 | 7.5 | 9 | 7 | 1 |
| J | 3 | 9 | 9 | 8 | 1 |
| K | 4 | 4 | 4 | 4 | 0 |
| L | 1 | 5.5 | 7 | 5 | 1 |
| M | 1 | 2 | 3 | 2 | $\frac{1}{9}$ |
| N | 5 | 5.5 | 9 | 6 | $\frac{4}{9}$ |

表 8.4 最后两列给出了每一个活动的均值和方差,计算方法和前面的一样。在这个例子中,每一个活动工期的均值都和表 8.1 中所预计的相同。因此,如果每一个活动的工期都和它的均值相同的话,那么整个项目仍然可以在 44 周之内完成,这比规定的最后工期 47 周要早 3 周(参见图 8.7 中的关键路径的长度为 44 周)。

但是,得到了这些结果以后,佩蒂先生还不是很放心。因为他知道每一个活动的工期都在围绕着它们的均值发生变化。很显然,其中有些活动的工期不可避免要比均值大很多,甚至大到等于悲观估计的时间,这就会大大地影响整个项目的完成时间。

为了分析一下最坏的情形,佩蒂先生把悲观估计时间(如表 8.4 中第四列所示)代入到每一个活动完成的工期之中,对整个项目网络进行重新计算。表 8.5 显示了应用悲观估计时间后项目网络的六条路径以及它们的长度。第四条路径,如图 8.7 所示本来是一条关键路径,可是现在它的长度从 44 周增加到了 69 周,而第一条路径的长度,最初是 40 周(如表 8.2 所示),也迅速增加到了 70 周。因为它是一条最长的路径,所以在这种情况下,它成为了关键路径。整个项目的完成时间也变成了 70 周。

**表 8.5 当每一个活动的工期等于悲观估计时间时科信建筑公司项目中的路径以及路径的长度**

| 路径 | 长度(单位:周) |
|---|---|
| 始点→A→B→C→D→G→H→M→终点 | 3+8+18+10+11+17+3=70 |
| 始点→A→B→C→E→H→M→终点 | 3+8+18+5+17+3=54 |
| 始点→A→B→C→E→F→J→K→N→终点 | 3+8+18+5+10+9+4+9=66 |
| 始点→A→B→C→E→F→J→L→N→终点 | 3+8+18+5+10+9+7+9=69 |
| 始点→A→B→C→I→J→K→N→终点 | 3+8+18+9+9+4+9=60 |
| 始点→A→B→C→I→J→L→N→终点 | 3+8+18+9+9+7+9=63 |

在分析了这种可怕的(虽然是不可能出现的)情形之后,佩蒂先生意识到这离 47 周的最后工期相差甚远。然而,出现这一情况的概率是多少?

PERT/CPM 使用了三个简化的近似来帮助计算这个概率。

## 三个简化近似

为了计算出项目工期不超过 47 周的概率,有必要获得下列关于项目工期概率分布的信息:

**项目工期的概率分布**

1. 这个分布的均值(用 $\mu_p$ 来表示)是多少?
2. 这个分布的方差(用 $\sigma_p^2$ 来表示)是多少?
3. 这个分布是哪种类型的分布?

均值关键路径是假设每个活动的工期都等于它的均值的前提下应用前面所述的程序找到关键路径。

前面我们已经讲过:整个项目的工期(总的时间)就等于项目网络中最长路径的长度。但是,对于表 8.5 中所示的六条路径来说,每一条都有成为最长的路径(也就是关键路径)的可能。这取决于每一个活动的工期在乐观时间和悲观时间之间的变化。由于处理全部这些路径是很复杂的一件事,PERT/CPM 只讨论下面一条路径。

**均值关键路径**(mean critical path)指的是在每一个活动的工期都等于它们的均值的情况下,项目网络中成为关键路径的那一条路径。

为了找到科信的均值关键路径,注意在表 8.4 的第五列所列的平均工期正好等于表 8.1 最右列所列的估计工期。因此,在这个案例中根据平均工期计算的关键路径与前面根据估计工期计算的关键路径是一样的。所以如图 8.7 中所示,科信建筑公司项目中的均值关键路径为:

始点→A→B→C→E→F→J→L→N→终点

**简化近似 1**:假设均值关键路径是项目网络中最长的一条路径。这个近似仅仅是一个很粗略的近似,这个假设并不适用于一般情况。因为在一般情况下,有些活动的工期并不等于它们的均值。幸好当这个假设不成立的时候,项目网络中真正的最长路径通常并不会比均值关键路径长多少(如表 8.5 所示)。

虽然这个近似可以帮助我们计算出 $\mu_p$,但是我们还需要另外一个近似来计算 $\sigma_p^2$。

**简化近似 2**:假设在均值关键路径上的活动工期具有统计独立性。即使我们知道了其他一些活动的工期,这个活动工期的三种估计也不会变化。只有当这些活动在进行当中是完全独立的时候,这个假设才会成立。但是如果一个活动的工期偏离了它的均值,其他的一些活动也产生类似的偏离,这个假设就将成为一个粗略的近似。

现在我们就可以通过一个简单的方法来计算 $\mu_p$ 和 $\sigma_p^2$ 了:

**$\mu_p$ 和 $\sigma_p^2$ 的计算**:根据简化近似 1,项目工期的概率分布均值近似为:

$$\mu_p = \text{在均值关键路径上活动工期均值之和}$$

根据简化近似 1 和简化近似 2,项目工期概率分布的方差近似为:

$$\sigma_p^2 = \text{在均值关键路径上活动工期方差之和}$$

由于在科信建筑公司项目中所有活动的均值和方差已经由表 8.4 给出,我们只需要把在均值关键路径上活动的这些数据记录下来,如表 8.6 所示。把第二列和第三列的数据分

别整列相加，我们就可以得到：

$$\mu_p = 44 \qquad \sigma_p^2 = 9$$

**表 8.6　科信建筑公司项目中和的计算**

| 均值关键路径上的活动 | 均　值 | 方　差 |
|---|---|---|
| A | 2 | $\frac{1}{9}$ |
| B | 4 | 1 |
| C | 10 | 4 |
| E | 4 | $\frac{4}{9}$ |
| F | 5 | 1 |
| J | 8 | 1 |
| L | 5 | 1 |
| N | 6 | $\frac{4}{9}$ |
| 项目的工期 | $\mu_p = 44$ | $\sigma_p^2 = 9$ |

现在我们只需要再确定这个项目工期近似的概率分布形式就可以了。

**简化近似 3**：假设项目工期的概率分布为正态分布，具有如图 8.10 中所示的钟形分布曲线。如果处在均值关键路径上活动的数目不是太少（至少是 5 个）的话，通过应用简化近似 1 和简化近似 2，一个统计学定理（中心极限定理）证明这个假设是一个合理的近似。随着活动数目的增加，这个近似将越来越准确。

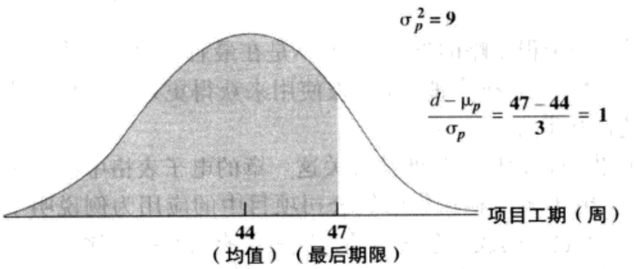



**图 8.10**　从三个简化近似得出科信建筑公司项目工期的概率分布大致为正态分布图。阴影部分的面积就是能够在 47 周的期限之内完成整个项目的概率。

现在我们可以（近似地）确定科信建筑公司项目在 47 周内完成的概率了。

## 最后期限内完成项目的概率的近似计算

设

$d$ = 项目的最后期限

= 47 周

$P(T \leqslant d)$ = 在最后工期（47 周）内完成项目的概率（给定三种简化近似）

为了求出 $P(T \leqslant d)$，首先要计算项目工期的标准差：

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9} = 3$$

然后计算：

$$\frac{d - \mu_p}{\sigma_p} = \frac{47 - 44}{3} = 1$$

$= d$ 超出 $\mu_p$ 的标准差次数

最后,应用后一个刚刚求出的结果,从表 8.7 中读出相应的 $P(T\leqslant d)$ 的值。于是,我们得到:

$$P(T\leqslant d)=0.84$$

**表 8.7 项目在最后期限前完成的近似概率**

| $\frac{d-\mu_p}{\sigma_p}$ | $P(T\leqslant d)$ | $\frac{d-\mu_p}{\sigma_p}$ | $P(T\leqslant d)$ |
|---|---|---|---|
| -3.0 | 0.0014 | 0 | 0.50 |
| -2.5 | 0.0062 | 0.25 | 0.60 |
| -2.0 | 0.023 | 0.5 | 0.69 |
| -1.75 | 0.040 | 0.75 | 0.77 |
| -1.5 | 0.067 | 1.0 | 0.84 |
| -1.25 | 0.11 | 1.25 | 0.89 |
| -1.0 | 0.16 | 1.5 | 0.933 |
| -0.75 | 0.23 | 1.75 | 0.960 |
| -0.5 | 0.31 | 2.0 | 0.977 |
| -0.25 | 0.40 | 2.5 | 0.9938 |
| 0 | 0.50 | 3.0 | 0.9986 |

**注意:**这个 $P(T\leqslant d)$ 所得出的结果只是一个很粗略的近似值,而不是在最后工期前完成项目的真实概率。由于使用了近似 1,实现目标的概率经常被夸大。因此,在不使用高成本来减少某些活动工期的情况下,项目管理人员只能把 $P(T\leqslant d)$ 当作是最后期限前完成项目的准确概率的一个粗略指导。

这个 $P(T\leqslant d)$ 所得出的结果只是一个很粗略的近似值,而不是在最后工期前完成项目的真实概率。因此另一种管理科学技术(计算机模拟)经常被使用来获得更好的近似。我们会在第 16 章回到这个例子来描述该技术。

为了帮助你进行计算 $P(T\leqslant d)$,我们在管理科学课件有关这一章的电子表格中给出了一个 Excel 电子表格。图 8.11 以这个电子表格在科信建筑公司项目中的应用为例说明了这个电子表格的使用方法。在图中电子表格的浅灰色区域输入问题的有关数据。输入完成后,计算结果会显示在其他区域。特别地,输入了每一个活动的三个时间估计后,电子表格会自动在 G 栏和 H 栏算出相应的均值和方差。接下来通过找出均值关键路径(在 F 列输入“ * ”表示处于均值关键路径上的活动 )并计算项目的最后工期(单元格 K12),电子表格会自动计算出均值关键路径长度的均值和方差(在单元格 K7:K8)以及能够在最后期限前完成项目的概率(在单元格 K10)[如果你不能确定哪一条路径是均值关键路径,那么就可以在 F 列中把同一条路径上的活动标记上“ * ”,然后求出这条路径的平均长度。比较这些平均长度(单元格 K7),其中最长的就是均值关键路径]。

佩蒂先生意识到我们所求出的概率 $P(T\leqslant d)=0.84$ 很有可能是一个乐观的近似,因此他有些沉不住气了,因为他认为按照当前的计划,在最后期限前完成整个项目的概率也许只有 60% ~80% 。因此,为了避免公司以很大的概率无法在最后期限前完成项目而遭受到多达 30 万美元的损失,佩蒂先生决定研究一下需要花费多少钱才能使项目的完成时间控制在 40 周之内。如果这么做的时间—成本平衡是有利的,那么公司就有可能因为在 40 周之内完成项目而获得 15 万美元的奖赏。

在下面的一节中我们将展开这个问题的讨论。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Template for PERT Three-Estimate Approach | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | Time Estimates | | On Mean | | | | | |
| 4 | | Activity | *o* | *m* | *p* | Critical Path | μ | $\sigma^2$ | | | |
| 5 | | A | 1 | 2 | 3 | * | 2 | 0.1111 | | Mean Critical | |
| 6 | | B | 2 | 3.5 | 8 | * | 4 | 1 | | Path | |
| 7 | | C | 6 | 9 | 18 | * | 10 | 4 | | μ | 44 |
| 8 | | D | 4 | 5.5 | 10 | | 6 | 1 | | $\sigma^2$ | 9 |
| 9 | | E | 1 | 4.5 | 5 | * | 4 | 0.4444 | | | |
| 10 | | F | 4 | 4 | 10 | * | 5 | 1 | | $P(T \le d)$ = | 0.8413 |
| 11 | | G | 5 | 6.5 | 11 | | 7 | 1 | | where | |
| 12 | | H | 5 | 8 | 17 | | 9 | 4 | | *d* = | 47 |
| 13 | | I | 3 | 7.5 | 9 | | 7 | 1 | | | |
| 14 | | J | 3 | 9 | 9 | * | 8 | 1 | | | |
| 15 | | K | 4 | 4 | 4 | | 4 | 0 | | | |
| 16 | | L | 1 | 5.5 | 7 | * | 5 | 1 | | | |
| 17 | | M | 1 | 2 | 3 | | 2 | 0.1111 | | | |
| 18 | | N | 5 | 5.5 | 9 | * | 6 | 0.4444 | | | |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Activity | B5:B18 |
| ActivityMean | G5:G18 |
| ActivityVariance | H5:H18 |
| CompletionProbability | K10 |
| CriticalPathMean | K7 |
| CriticalPathVariance | K8 |
| *d* | K12 |
| *m* | D5:D18 |
| *o* | C5:C18 |
| OnMeanCriticalPath | F5:F18 |
| *p* | E5:E18 |

| | G | H |
|---|---|---|
| 4 | μ | $\sigma^2$ |
| 5 | =IF(*o*=" "," ",(*o*+4*m+p*)/6) | =IF(*o*=" "," ",((*p*–*o*)/6)^2) |
| 6 | =IF(*o*=" "," ",(*o*+4*m+p*)/6) | =IF(*o*=" "," ",((*p*–*o*)/6)^2) |
| 7 | =IF(*o*=" "," ",(*o*+4*m+p*)/6) | =IF(*o*=" "," ",((*p*–*o*)/6)^2) |
| 8 | =IF(*o*=" "," ",(*o*+4*m+p*)/6) | =IF(*o*=" "," ",((*p*–*o*)/6)^2) |
| 9 | : | : |
| 10 | : | : |

| | J | K |
|---|---|---|
| 5 | | Mean Critical |
| 6 | | Path |
| 7 | μ | =SUMIF(OnMeanCriticalPath,"*",ActivityMean) |
| 8 | $\sigma^2$ | =SUMIF(OnMeanCriticalPath,"*",ActivityVariance) |
| 9 | | |
| 10 | $P(T \le d)$ = | =NORMDIST(*d*,CriticalPathMean,SQRT(CriticalPathVariance),1) |

**图 8.11**　如科信建筑公司项目所体现的，这个管理科学课件的 Excel 模板使得可以高效使用 PERT 的三个估计。

## 问题回顾

1. PERT 三种估计的名称分别是什么？
2. 在一个活动的工期概率分布曲线中，这三种时间估计分别处在什么位置？
3. 在哪一条路径是项目网络中最长路径的问题上，进行了什么简化近似？
4. 在关于活动之间关系的问题上进行了什么简化近似？
5. 求项目的工期概率分布均值($\mu_p$)的公式是什么？
6. 求项目的工期概率分布方差($\sigma_p^2$)的公式是什么？
7. 由什么简化近似构成了项目工期的概率分布的形式？
8. 所求得的在最后期限前完成项目的近似概率，通常比真实的概率大一些还是小一些？

## 8.5　考虑时间—成本平衡

佩蒂先生现在需要研究一下为了把项目的工期降到 40 周之内（公司可以因为提前完成而获得 15 万美元奖励的最后期限）所需要花费的额外支出是多少。因此，这就要对在

8.1 节中最后所提出的问题 8 进行解答。

**问题 8**:如果要用额外的资金来加速工程进度的话,怎样才能以最低的成本达到目标完成时间(40 周)?

佩蒂先生知道在 CPM 技术中提供了使用线性规划的极好的方法来研究诸如时间—成本平衡这类的问题,所以在这里他也使用这种方法来解决这个问题。

首先,我们对一些概念进行说明。

## 每一个活动的时间—成本平衡

这种方法的第一个关键概念是应急处理(Crashing)。

**应急完成一项活动**(crashing an activity)是指通过某些高费用的特殊途径,把活动的完成时间减少到正常水平之下。这些特殊的方法包括加班、雇用一些临时工、使用特殊的省时材料以及使用特殊设备等等。**应急完成项目**(crashing the project)指的是对其中的一些活动进行应急处理从而把工期缩短到正常值以下。

目标是使得项目的预计工期降到所希望的水平。

时间—成本平衡的 CPM 方法就是确定应该把每个活动进行到什么程度(如果有的话)的应急处理,使得项目的预计工期降到所希望的水平。

决策一个活动需要什么程度的应急处理所需的数据都已在这个活动的时间成本曲线上给出了。图 8.12 显示了一个典型的时间—成本曲线图。我们注意到在这个曲线中两个关键点分别是标有正常时间和应急时间的两个点。

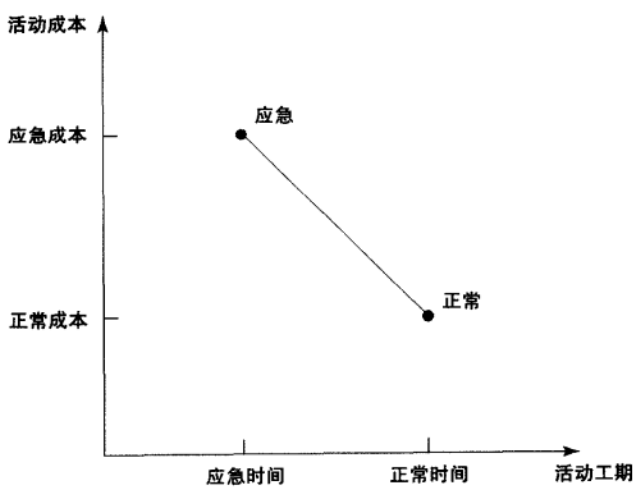



**图 8.12** 某一个活动典型的时间—成本曲线图。

这个曲线中的正常点表示了在正常情况下,通过正常的途径完成这个活动所需要的时间和成本。而应急点则表明了这个活动在全应急状况下所需要的时间和成本。也就是,通过不惜一切地增加成本,尽可能减少活动的工期。

在大多数的实际应用中,我们一般假设某种程度下的部分应急活动可以得到一个时间和成本的组合,这个组合位于这两点(正常时间和应急时间)之间的线段的某一点上(例如,如果我们假设对活动进行刚好是全应急一半的应急处理,那么这个点就位于正常时间和应急时间之间线段的中点)。这种简化近似可以减少我们进行评估时所需要的数据。我们只

要知道了两种情况下的时间和成本就可以了。这两种情况分别是:正常情况(对应于正常点)和应急情况(对应于应急点)。

通过这种方法,佩蒂先生和他的下属以及各个活动的工头一起计算出科信建筑公司项目中每一个活动的这些数据。例如,负责竖墙板的工头通过计算得出:增加两个临时工和加班可以使这个活动的工期由原来的8周下降到6周,6周是最少的时间。这样就像下面正常完成时间为8周的活动J的成本计算,佩蒂先生以及他手下的工作人员就可以计算出通过这种途径所需要的成本。

**活动J(竖墙板)**

正常点:时间=8周 成本=43万美元

应急点:时间=6周 成本=49万美元

时间最大减少量: =8-6=2周

每周的应急成本: =(49-43)/2

=3万美元

表8.8列出了用这个方法得出的各个活动的数据。

**表8.8 科信建筑公司的项目中每一个活动的时间—成本平衡的数据**

| 活动 | 时间(周) | | 成本(万美元) | | 时间的最大缩短量(周) | 每周的应急成本(万美元) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 正常 | 应急 | 正常 | 应急 | | |
| A | 2 | 1 | 18 | 28 | 1 | 10 |
| B | 4 | 2 | 32 | 42 | 2 | 5 |
| C | 10 | 7 | 62 | 86 | 3 | 8 |
| D | 6 | 4 | 26 | 34 | 2 | 4 |
| E | 4 | 3 | 41 | 57 | 1 | 16 |
| F | 5 | 3 | 18 | 26 | 2 | 4 |
| G | 7 | 4 | 90 | 102 | 3 | 4 |
| H | 9 | 6 | 20 | 38 | 3 | 6 |
| I | 7 | 5 | 21 | 27 | 2 | 3 |
| J | 8 | 6 | 43 | 49 | 2 | 3 |
| K | 4 | 3 | 16 | 20 | 1 | 4 |
| L | 5 | 3 | 25 | 35 | 2 | 5 |
| M | 2 | 1 | 10 | 20 | 1 | 10 |
| N | 6 | 3 | 33 | 51 | 3 | 6 |

## 哪一个活动需要进行应急处理?

把表8.8中正常成本和应急成本列中的数据依次相加得到:

总的正常成本=455万美元

总的应急成本=615万美元

我们已经知道为了完成这个项目,公司的预算为540万美元(这个数值并不包括在40周内完成所得到的奖金15万美元以及由于没有在47周之内完成所应付的30万美元罚金)。这个预算必须覆盖管理费用加上表中所列活动的成本,并要为公司带来合理的利润。在成功地以540万美元中标的时候,科信建筑公司的管理层相信只要这些活动的总成本能

够控制在接近正常成本455万美元的水平，就会给公司带来一笔可观的利润。佩蒂先生知道现在他的责任就是要使项目在资金预算和时间进度两个方面都尽可能地按照计划进行。

如同在图8.7中所讲到的，如果项目是正常进行的话，所预计的项目完成时间就是44周（如果其中没有任何延误的话）。然而如果这些活动都进行完全应急处理的话，通过类似的计算，我们就会发现所需要的时间只有28周。但是这样做所需要的成本是615万美元，这个代价太昂贵了。很显然，对所有的活动都进行应急处理并不是一个很好的选择。

然而，佩蒂先生还是想要计算出半应急处理或者完全应急处理部分活动，使得完成项目所需要的时间减少到40周之下的概率。

**问题**：要把项目完成时间下降到40周之内，对一些活动进行应急处理最节省的途径是什么？

> 边际成本分析寻找减少项目完成时间成本最低的途径。

解决这个问题的方法之一是边际成本分析（marginal cost analysis），这种方法使用了表8.8（还有8.3节中的图8.7）最后一列的数据确定减少项目完成时间成本最低的途径（以一周为单位时间长度进行计算）。进行这样的分析最简单的方法就是建立一个如表8.9一样的表格，在表中列出了项目网络中所有的路径以及这些路径的长度。这些数据可以直接从表8.2中得到。

**表8.9 对科信建筑公司项目的最初边际成本分析**

| 应急处理的活动 | 应急成本 | 路径的长度 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ABCDGHM | ABCEHM | ABCEFJKN | ABCEFJLN | ABCIJKN | ABCIJLN |
| | | 40 | 31 | 43 | 44 | 41 | 42 |

因为在表8.9中第四条路径的长度最长（44周），所以将项目完成时间减少1周的惟一途径就是将这条路径上的活动完成时间降低1周。比较表8.8最后一列所给出的每周的应急成本，成本最小的是活动J，为3万美元（注意，虽然活动I有着相同的成本，但是它并不在这条路径上）。因此，第一个改变就是要对活动J进行完全应急处理，以减少它的完成时间（以周为单位）。

如表8.10中第二列所示，这个改变导致了包含活动J在内的每一条路径的长度都减少了1周（表8.9中的第三、四、五和第六条路径）。因为第四条路径仍然是最长的一条路径（43周），重复相同的过程，在这条路径上找到成本最低的活动以缩短这个路径。因为在表8.8的倒数第二列中我们可以得出活动J的最大可能减少时间为2周，所以得出结果还是活动J。表8.10中第三列表示第二次减少活动J的完成时间所得到的结果。

**表8.10 对科信建筑公司的项目进行边际成本分析的最后结果**

| 应急处理的活动 | 应急成本（万美元） | 路径的长度 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ABCDGHM | ABCEHM | ABCEFJKN | ABCEFJLN | ABCIJKN | ABCIJLN |
| | | 40 | 31 | 43 | 44 | 41 | 42 |
| J | 3 | 40 | 31 | 42 | 43 | 40 | 41 |
| J | 3 | 40 | 31 | 41 | 42 | 39 | 40 |
| F | 4 | 40 | 31 | 40 | 41 | 39 | 40 |
| F | 4 | 40 | 31 | 39 | 40 | 39 | 40 |

这时，第四条路径仍然是最长的一条路径（42 周），但是活动 J 的完成时间却不能再减少了。根据表 8.8 中最后一列所示，在这条路径上的其他活动之中，活动 F 就成为了缩短时间成本最低的活动（每周 4 万美元）。将活动 J 和活动 F 作为应急活动，使整个项目的完成时间下降到 40 周的总成本计算很简单，只要把表 8.10 第二列的数据相加即可，得出的结果是 14 万美元。图 8.13 显示了由此得出的网络图。

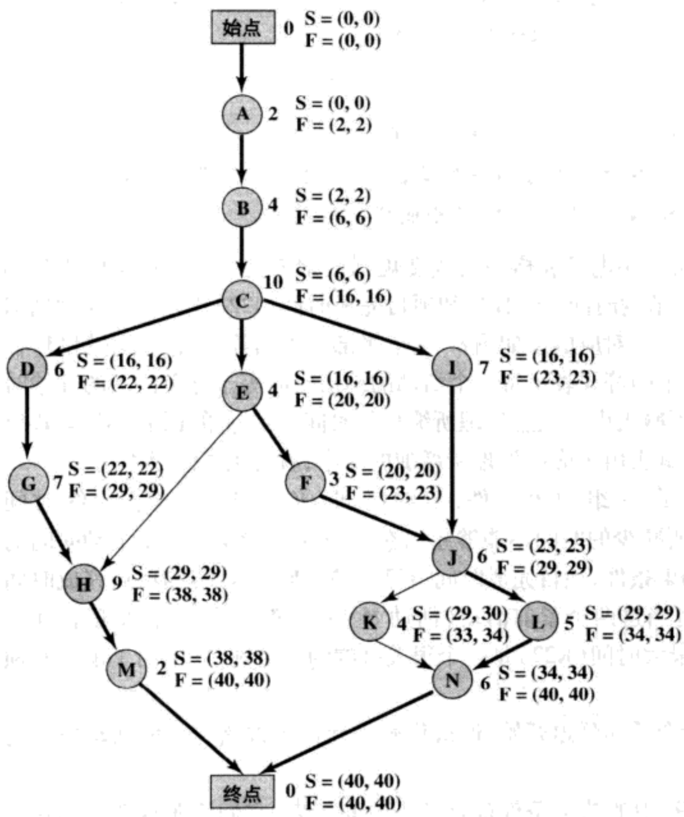



**图 8.13**　活动 J 和活动 F 完全应急处理（其他的活动正常处理）情况下科信建筑公司项目的网络图。黑色箭头表示了在网络图中的三条不同的关键路径。

因为 14 万美元要比在 40 周之内完成项目所得到的 15 万美元奖金稍微少一些，所以看起来佩蒂先生就应该按照这个结果进行。然而，他却认为他很可能一点也不能减少项目的完成时间。这一点我们将在后面进行论述（由于上一节中所讲到的活动完成时间的不确定性，所以他得出的结论是合乎情理的）。

图 8.13 中表明：对活动 J 和活动 F 进行应急处理，使得它们的工期达到应急时间，导致了在这个网络图中出现了三条关键路径。就像我们在表 8.10 中所看到的，这三条路径拥有相同的路径长度 40 周，都是最长路径。

> 线性规划提供了更有效的方法对大型项目进行边际成本分析。

在一个比较大的网络中，边际成本分析法可能会变得非常繁琐。所以，对于一个大型网络来说，非常需要寻求一个比较简便的方法来解决问题。

由于这些的原因，标准的 CPM 程序使用了线性规划（通常订制成一个软件包）。

## 用线性规划来作应急决策

如下所示,寻找以最低成本进行活动应急处理途径的问题可以通过类似于线性规划的方式进行解答。

**问题的重述**:如果考虑项目的总成本,包括应急活动的额外成本,那么问题就变成了在项目工期小于或等于项目管理者希望水平的限制条件下,使得总成本最小化。

需要作出的决策包括:

这些决策在可变单元格中体现。

1. 每一个活动的开始时间。
2. 由于进行了应急处理,每一个活动的工期减少量。
3. 项目的完成时间(不能超出 40 周)。

图 8.14 表明了这个问题可以用电子表格中的线性规划模型描述。需要作出的决策如可变单元格开始时间(I6:I19)、节约时间(J6:J19)和项目完成时间(I22)中所示。B 栏到 H 栏的内容和表 8.8 中的内容是一一对应的。如图 8.14 下半部分中的等式所示,G 栏和 H 栏中的数据直接算了出来。K 栏中的等式表示每一个活动的结束时间等于这个活动的开始时间加上完成活动的正常时间,再减去由于应急处理所缩短的时间。目标单元格总成本(I24)中的等式加上所有的正常成本减去由于应急处理所增加的成本,就得到了总成本。

在 Solver 对话框中最后的一组约束条件,节约时间(J6:J19)≤最大节约时间(G6:G19)说明了每一个活动所减少的时间不能够超出在 G 列中所给出的这个活动时间的最大的减少量。前面的两个约束条件,项目完成时间(I22)≥M 结束(K18)和项目完成时间(I22)≥N 结束(K19)表明只有当这两个紧前活动(活动 M 和 N)都完成了,整个项目才算完成。项目完成时间(I22)≤最大时间(K22)是一个很关键的约束条件,它说明了项目必须要在 40 周之内完成。

虽然开始时间约束允许一个活动延迟开始,但最优解不允许关键路径上的活动发生这类情况。

在单元格开始时间(I6:I19)中的约束条件都是开始时间约束,它们说明这个活动在它的紧前活动完全完成之前不能够开始进行。例如,第一个约束 B 开始(I7)≥A 结束(K6)说明活动 B 只能在活动 A(它的紧前活动)完成之后才能开始进行。当一个活动拥有多个紧前活动的时候,对每一个紧前活动都有这样的约束。例如,活动 H 拥有活动 E 和活动 G 两个紧前活动。与之相对应的,活动 H 就有两个开始时间约束 H 开始(I13)≥E 结束(K10)和 H 开始(I13)≥G 结束(K12)。

你可能已经注意到了开始时间约束中的"≥"允许一个活动在所有紧前活动都完成的情况下经过一个延迟再开始进行。虽然在模型中这种延迟是可行的,可是由于这种延迟会增加总成本(需要进行额外的应急处理来满足项目完成时间约束),所以它并不适合每一个活动。因此,这种模型的最佳解决方法就是除了那些不在关键路径上的活动之外,任何活动都不能有任何的延迟。

图 8.14 中 I 栏和 J 栏显示了在按 Solve 键之后得到的最优解(我们注意到这里有一个延迟,活动 K 在 30 周的时候开始而它的惟一紧前活动却在 29 周的时候结束。但是这无关大局,因为活动 K 并不在关键路径上)。在这里得出的结果和在图 8.13 中使用边际成本分析所得到的结果是完全一样的。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Reliable Construction Co. Project Scheduling Problem with Time–Cost Trade-Offs | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | Maximum | Crash Cost | | | |
| 4 | | | Time | | Cost | | Time | per Week | Start | Time | Finish |
| 5 | | Activity | Normal | Crash | Normal | Crash | Reduction | Saved | Time | Reduction | Time |
| 6 | | A | 2 | 1 | $180,000 | $280,000 | 1 | $100,000 | 0 | 0 | 2 |
| 7 | | B | 4 | 2 | $320,000 | $420,000 | 2 | $50,000 | 2 | 0 | 6 |
| 8 | | C | 10 | 7 | $620,000 | $860,000 | 3 | $80,000 | 6 | 0 | 16 |
| 9 | | D | 6 | 4 | $260,000 | $340,000 | 2 | $40,000 | 16 | 0 | 22 |
| 10 | | E | 4 | 3 | $410,000 | $570,000 | 1 | $160,000 | 16 | 0 | 20 |
| 11 | | F | 5 | 3 | $180,000 | $260,000 | 2 | $40,000 | 20 | 2 | 23 |
| 12 | | G | 7 | 4 | $900,000 | $1,020,000 | 3 | $40,000 | 22 | 0 | 29 |
| 13 | | H | 9 | 6 | $200,000 | $380,000 | 3 | $60,000 | 29 | 0 | 38 |
| 14 | | I | 7 | 5 | $210,000 | $270,000 | 2 | $30,000 | 16 | 0 | 23 |
| 15 | | J | 8 | 6 | $430,000 | $490,000 | 2 | $30,000 | 23 | 2 | 29 |
| 16 | | K | 4 | 3 | $160,000 | $200,000 | 1 | $40,000 | 30 | 0 | 34 |
| 17 | | L | 5 | 3 | $250,000 | $350,000 | 2 | $50,000 | 29 | 0 | 34 |
| 18 | | M | 2 | 1 | $100,000 | $200,000 | 1 | $100,000 | 38 | 0 | 40 |
| 19 | | N | 6 | 3 | $330,000 | $510,000 | 3 | $60,000 | 34 | 0 | 40 |
| 20 | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | Max Time |
| 22 | | | | | | | | Project Finish Time | 40 | ≤ | 40 |
| 23 | | | | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | Total Cost | $4,690,000 | | |

| | G | H |
|---|---|---|
| 3 | Maximum | Crash Cost |
| 4 | Time | per Week |
| 5 | Reduction | Saved |
| 6 | =NormalTime-CrashTime | =(CrashCost-NormalCost)/MaxTimeReduction |
| 7 | =NormalTime-CrashTime | =(CrashCost-NormalCost)/MaxTimeReduction |
| 8 | =NormalTime-CrashTime | =(CrashCost-NormalCost)/MaxTimeReduction |
| 9 | =NormalTime-CrashTime | =(CrashCost-NormalCost)/MaxTimeReduction |
| 10 | : | : |
| 11 | : | : |

| | K |
|---|---|
| 4 | Finish |
| 5 | Time |
| 6 | =StartTime+NormalTime-TimeReduction |
| 7 | =StartTime+NormalTime-TimeReduction |
| 8 | =StartTime+NormalTime-TimeReduction |
| 9 | =StartTime+NormalTime-TimeReduction |
| 10 | : |
| 11 | : |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalCost

Equal To: ○ Max ● Min ○ Value

By Changing Cells:

StartTime,TimeReduction,ProjectFinis

Subject to the Constraints:

BStart >= AFinish
CStart >= BFinish
DStart >= CFinish
EStart >= CFinish
FStart >= EFinish
GStart >= DFinish
HStart >= EFinish
HStart >= GFinish
IStart >= CFinish
JStart >= FFinish
JStart >= IFinish
KStart >= JFinish
LStart >= JFinish
MStart >= HFinish
NStart >= KFinish
NStart >= LFinish
ProjectFinishTime <= MaxTime
ProjectFinishTime >= MFinish
ProjectFinishTime >= NFinish
TimeReduction <= MaxTimeReduction

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| | H | I |
|---|---|---|
| 24 | Total Cost | =SUM(NormalCost)+SUMPRODUCT(CrashCostPerWeekSaved,TimeReduction) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| AFinish | K6 |
| AStart | I6 |
| BFinish | K7 |
| BStart | I7 |
| CFinish | K8 |
| CrashCost | F6:F19 |
| CrashCostPerWeekSaved | H6:H19 |
| CrashTime | D6:D19 |
| CStart | I8 |
| DFinish | K9 |
| DStart | I9 |
| EFinish | K10 |
| EStart | I10 |
| FFinish | K11 |
| FinishTime | K6:K19 |
| FStart | I11 |
| GFinish | K12 |
| GStart | I12 |
| HFinish | K13 |
| HStart | I13 |
| IFinish | K14 |
| IStart | I14 |
| JFinish | K15 |
| JStart | I15 |
| KFinish | K16 |
| KStart | I16 |
| LFinish | K17 |
| LStart | I17 |
| MaxTime | K22 |
| MaxTimeReduction | G6:G19 |
| MFinish | K18 |
| MStart | I18 |
| NFinish | K19 |
| NormalCost | E6:E19 |
| NormalTime | C6:C19 |
| NStart | I19 |
| ProjectFinishTime | I22 |
| StartTime | I6:I19 |
| TimeReduction | J6:J19 |
| TotalCost | I24 |

**图 8.14** 电子表格显示了时间—成本平衡的 CPM 方法在科信建筑公司项目中的应用。正如整个参数对话框所表示的，其中 I 列和 J 列给出了运用 Excel Solver 得出的最优解。

## 佩蒂先生的结论

佩蒂先生总是密切关注表格中最后一行得出的结果。因此,当他的下属把上面对项目进行应急处理使完成时间从44周下降到40周的计划交给他时,他首先关注的是预计总成本469万美元。由于按照正常情况进行而不进行应急处理的总成本是455万美元,所以由于进行应急处理而增加的成本大约是14万美元。而如果公司在40周之内完成这个项目所受到的奖励是15万美元,两者相减还有1万美元的剩余。

> CPM的时间成本平衡方法忽略了工期的不确定性,所以在应急计划下任何估计的项目工期都可能与实际工期有很大出入。

然而,佩蒂先生通过多年的实践知道在计算每一个活动完成所需要的时间以及整个项目完成所需要的时间之中有许多不确定的因素,就像我们在上一节中所讨论的。我们知道PERT中的三个近似导致了我们只能得到项目完成时间的概率分布。在没有应急处理的情况下,这个概率分布有一个44周的均值,但是有一个很大的方差,以至于不能在47周之内完成项目(这将要付出30万美元的罚金)的概率很大(大约为0.2)。在进行应急处理使项目完成时间均值降到40周时,我们同样既有可能在40周之内完成项目,也有可能超出40周,而且两者的概率是相同的,都是50%。那么,为什么我们还要花费额外的14万美元去取得那只有50%概率的15万美元的奖金呢?

**结论1**:这个进行应急处理项目的计划只有50%的概率能够在40周之内完成整个项目。因此计划的额外费用(14万美元)是不确定的。在这种情况下佩蒂先生反对进行任何的应急处理。

佩蒂先生并没有注意到在项目进行到大约一半的时候计划进行应急处理的两个活动(活动F和活动J)。因此,如果项目在活动F之前都很好地按照进度进行的话,贯彻这个应急计划就会使得项目完成时间在40周之内。而且,佩蒂先生知道早日完成这个项目对公司的声誉是很有好处的(当然也是一件卓越的成就)。

有时候到应急活动快开始时再作决策是很有用的。这时有关项目日程的信息可以影响决策。

**结论2**:如果这个应急计划的确能够使项目在40周之内完成并带来15万美元的奖金,那么它在执行中的额外成本就很合理了。因此,佩蒂先生把这个计划当作一个预备的计划。只有项目在活动F之前都按照日程进行得很好,才会使用这个计划。

佩蒂先生其实更关心没有在47周之内完成项目以至于要支付30万美元罚金的概率是多少。在不进行应急处理的情况下,这种情况很有可能发生。佩蒂先生知道通过对活动J(节省时间的单位成本是3万美元)进行应急处理就有可能避免这种情况的发生,如果有必要的话,对活动F(节省时间的单位成本是4万美元)也进行应急处理。只要这些活动位于关键路径之上并且在进行过程中没有延迟,那么这种想法就是正确的。

**结论3**:在避免由于没有在47周之内完成项目而要付出赔偿金30万美元的情况发生的时候,半应急计划和完全应急计划会产生不同的结果,所以我们可以根据这一点很容易地判断应急计划的额外成本是否合理。如果项目在活动F或者活动J之前都按照日程进行得很好,佩蒂先生就会部分地或者是完全地使用这个计划。

除了要严格监控项目进行的进度(以及作出进行应急处理的决策)之外,佩蒂先生还要密切注意项目的成本,一定要尽量使成本保持在预算之内。下面的章节将介绍他是如何做

到这一点的。

## 问题回顾

1. 对一个活动进行应急处理有哪些方法?
2. 在时间—成本曲线上最关键的两点是什么? 这两点显示了什么?
3. 对一个活动进行应急处理是否总是能够减少项目的完成时间? 为什么?
4. 当对一个项目进行边际成本分析的时候,所检查的成本是什么?
5. 当使用线性规划作出应急决策时,应作出什么决策?
6. 在线性规划公式中,说出每一个开始时间约束的含义。
7. 为什么即使在额外成本低于提前完成所得奖金的情况下,佩蒂先生仍然决定不使用应急处理项目的计划?

## 8.6　项目成本的安排和控制

任何一个像佩蒂先生这样出色的项目经理都会在项目的完成时间和成本两个方面进行认真的计划和监控。由此可见,项目的进度和成本都是很重要的。

8.3 节和 8.4 节描述了 PERT/CPM 在开发一个日程安排并且将活动或项目完成时间的不确定性考虑在内时是如何解决时间方面问题的。8.5 节把重点同时放在了时间和成本两个方面,向我们介绍了时间与成本平衡的 CPM 方法。

佩蒂先生现在把他的注意力都集中到成本上来了。现在我们要回答在 8.1 节中最后一部分所提出的第九个问题。

**问题 9**:如何进行成本实时监控,把生产成本控制在预算之内?

佩蒂先生还记得以被称为 PERT/Cost 的 PERT/CPM 技术就是专门为这个目的所发展起来的。

PERT/Cost 是一个帮助项目管理人员对项目成本进行计划、安排和控制的系统化程序(一般是计算机程序)。

PERT/Cost 程序以对每一个活动按照计划途径(包括应急处理)完成的工期进行估计开始。佩蒂先生暂时并不计划进行应急处理,所以这个项目中每一个活动的估计成本就是上一节表 8.8 中在正常成本一栏中所给出的成本。这些成本在表 8.11 中的项目预算中也给出了。这个表格还向我们展示了完成每一个活动所需要的时间(在表 8.1、表 8.8 的正常成本栏以及图 8.1 到图 8.8 已经给出)。用每一个活动的成本除以活动时间得到表 8.11 最右边一列所示的数据。

**假设**:当用 PERT/Cost 的时候,我们通常假设完成一个活动所需要的成本在整个活动的工期内以固定的比率随时间上升。佩蒂先生作出了这样的假设,所以在表 8.11 中最右边的一栏中列出了活动工期内每一周的成本估计。

当把这种技术应用到一个拥有许多活动的规模比较大的项目中时,我们通常把这些活动中有关联的活动合并成一个“工作包”,我们在这些工作包的基础之上进行项目预算以及项目成本安排,而不是每一个单独的活动。现在佩蒂先生选择不这样做,因为这个项目只有

14 个活动。

**表 8.11 科信建筑公司的项目预算**

| 活动 | 预计所用时间(周) | 预计成本(万美元) | 单位时间成本(美元) |
|---|---|---|---|
| A | 2 | 18 | 90000 |
| B | 4 | 32 | 80000 |
| C | 10 | 62 | 62000 |
| D | 6 | 26 | 43333 |
| E | 4 | 41 | 102500 |
| F | 5 | 18 | 36000 |
| G | 7 | 90 | 128571 |
| H | 9 | 20 | 22222 |
| I | 7 | 21 | 30000 |
| J | 8 | 43 | 53750 |
| K | 4 | 16 | 40000 |
| L | 5 | 25 | 50000 |
| M | 2 | 10 | 50000 |
| N | 6 | 33 | 55000 |

## 安排项目成本

> PERT/Cost 技术提供每周的项目开支安排,这样项目经理就可以监控项目是否在预算范围内。

佩蒂先生必须要清楚在项目的进行过程中需要多少钱才能维持项目的开支。在每一个活动都按照最早开始时间进行的情况下,PERT/Cost 使用表 8.11 中最右边一列中的数据建立一个每周的项目开支安排。使用 PERT/Cost 技术,在所有活动按其最晚开始时间进行的情况下重复相同的步骤,就可以表示出其在延误开支方面的灵活性。

为了完成这项工作,在本章管理科学课件学习辅助的 Excel 文件中包含了一个用于生成 45 个时段项目成本安排的 Excel 模板(标记为 PERT Cost)[在 MS Project 中执行下面的步骤也能得到相同的结果:在"视图"菜单下选择"表:成本"(Table:Cost),然后选择"报表"(Report),接着选择"成本…"(Cost…)选项和"现金流量"(Cash Flow)报表]。图 8.15 针对科信建筑公司项目的开始阶段,以图 8.5 第一次得到的最早开始时间(E 列)为基础向我们展示了这个 Excel 模板(包括输出单元格中的等式)。B 列、C 列以及 D 列都是直接来自于表 8.11。图 8.16 向前跳进,显示了从 17 到 25 周模板。由于活动 D、E 和 I 都有相同的最早开始时间 16 周(从项目开始算起第 16 周),它们从 17 周开始起进行。就像图 8.15 中 F 栏一样,图 8.16 中从 W 列到 AE 列给出了每一个活动的单位时间成本以及活动完成所需要的时间。第 21 行表示了每一周总的活动成本。

模板第 22 行表示了从第一周到指定第几周的总项目成本。例如,考虑 17 周的情况。在 17 周之前,活动 A、B、C 已经完成了,而且没有开始其他的活动,所以前面 16 周的项目成本就是 180000 + 320000 + 620000 = 1120000 美元,再加上第 17 周的项目成本得到 1120000 + 175833 = 1295833 美元。

因此,图 8.16(以及前面和后面的几周)向佩蒂先生显示了假设项目能够始终以最早开始时间日程进行,覆盖每周的开支以及总的开支所必需的资金是多少。

相反,当活动按照最晚开始时间进行的时候,PERT/Cost 用相同的程序可以得到相应的

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Template for PERT/Cost | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Estimated | | | | | | | |
| 4 | | | Duration | Estimated | Start | Cost Per Week | Week | Week | Week | Week |
| 5 | | Activity | (weeks) | Cost | Time | of Its Duration | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | | A | 2 | $180,000 | 0 | $90,000 | $90,000 | $90,000 | $0 | |
| 7 | | B | 4 | $320,000 | 2 | $80,000 | $0 | $0 | $80,000 | |
| 8 | | C | 10 | $620,000 | 6 | $62,000 | $0 | $0 | $0 | … |
| 9 | | D | 6 | $260,000 | 16 | $43,333 | $0 | $0 | $0 | |
| 10 | | E | 4 | $410,000 | 16 | $102,500 | $0 | $0 | $0 | |
| 11 | | F | 5 | $180,000 | 20 | $36,000 | $0 | $0 | $0 | |
| 12 | | G | 7 | $900,000 | 22 | $128,571 | $0 | $0 | $0 | … |
| 13 | | H | 9 | $200,000 | 29 | $22,222 | $0 | $0 | $0 | |
| 14 | | I | 7 | $210,000 | 16 | $30,000 | $0 | $0 | $0 | |
| 15 | | J | 8 | $430,000 | 25 | $53,750 | $0 | $0 | $0 | |
| 16 | | K | 4 | $160,000 | 33 | $40,000 | $0 | $0 | $0 | … |
| 17 | | L | 5 | $250,000 | 33 | $50,000 | $0 | $0 | $0 | |
| 18 | | M | 2 | $100,000 | 38 | $50,000 | $0 | $0 | $0 | |
| 19 | | N | 6 | $330,000 | 38 | $55,000 | $0 | $0 | $0 | |
| 20 | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | Weekly Project Cost | $90,000 | $90,000 | $80,000 | … |
| 22 | | | | | | Cumulative Project Cost | $90,000 | $180,000 | $260,000 | … |

| | F | G | H |
|---|---|---|---|
| 4 | Cost Per Week | Week | Week |
| 5 | of Its Duration | 1 | 2 |
| 6 | =EstimatedCost/EstimatedDuration | =IF(AND(Week>StartTime,Week<=StartTime+EstimatedDuration),CostPerWeek,0) | … |
| 7 | =EstimatedCost/EstimatedDuration | =IF(AND(Week>StartTime,Week<=StartTime+EstimatedDuration),CostPerWeek,0) | … |
| 8 | =EstimatedCost/EstimatedDuration | =IF(AND(Week>StartTime,Week<=StartTime+EstimatedDuration),CostPerWeek,0) | … |
| 9 | : | : | |
| 10 | : | : | |

| | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | Weekly Project Cost | =SUM(G6:G19) | =SUM(H6:H19) | =SUM(I6:I19) | … |
| 22 | Cumulative Project Cost | =G21 | =G22+H21 | =H22+I21 | … |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Activity | B6:B19 |
| CostPerWeek | F6:F19 |
| CumulativeProjectCost | G22:AY22 |
| EstimatedCost | D6:D19 |
| EstimatedDuration | C6:C19 |
| StartTime | E6:E19 |
| Week | G5:AY5 |
| WeeklyProjectCost | G21:AY21 |

**图 8.15**　管理科学课件中应用 PERT/Cost 程序的 Excel 模板。这里显示的是使用最早开始时间的科信建筑该项目的开始阶段。

信息。这些最晚开始时间最早在图 8.6 中得到，现在在图 8.17 中 E 列再重复一次。这个表格的其他部分的产生过程和图 8.16 的是完全相同的。例如，由于活动 D 的最晚开始时间是第 20 周(最早开始时间是第 16 周)，所以它从 21 周开始才有了周 43333 美元的成本，而不是从第 17 周开始就有。与之相类似，因为活动 G 的最晚开始时间是第 26 周，所以在这个图中所考虑的几周内没有将对应的成本输入进去。

图 8.17(以及前面和后面的几周)显示了在不影响项目完成时间的前提下，尽可能延长活动时间，每周的单位成本以及总成本是多少。图 8.17 的第 22 行显示了这种延迟确实可以暂时节省相当数额的成本。当公司资金短缺的时候，这有很大的帮助(然而，这种延迟只

| | A | B | E | W | X | Y | Z | AA | AB | AC | AD | AE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Template for PERT/Cost | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | Start | Week | Week | Week | Week | Week | Week | Week | Week | Week |
| 5 | | Activity | Time | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 6 | | A | 0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 7 | | B | 2 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 8 | | C | 6 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 9 | | D | 16 | $43,333 | $43,333 | $43,333 | $43,333 | $43,333 | $43,333 | $0 | $0 | $0 |
| 10 | | E | 16 | $102,500 | $102,500 | $102,500 | $102,500 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 11 | | F | 20 | $0 | $0 | $0 | $0 | $36,000 | $36,000 | $36,000 | $36,000 | $36,000 |
| 12 | | G | 22 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $128,571 | $128,571 | $128,571 |
| 13 | | H | 29 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 14 | | I | 16 | $30,000 | $30,000 | $30,000 | $30,000 | $30,000 | $30,000 | $30,000 | $0 | $0 |
| 15 | | J | 25 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 16 | | K | 33 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 17 | | L | 33 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 18 | | M | 38 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 19 | | N | 38 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 20 | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | $175,833 | $175,833 | $175,833 | $175,833 | $109,333 | $109,333 | $194,571 | $164,571 | $164,571 |
| 22 | | | | $1,295,833 | $1,471,667 | $1,647,500 | $1,823,333 | $1,932,667 | $2,042,000 | $2,236,571 | $2,401,143 | $2,565,714 |

**图 8.16** 图 8.15 扩展得到的电子表格，表示的时间为第 17 周到第 25 周。

有在迫不得已的情况下才使用。这是因为任何一个活动发生了意料之外的延误都可能会给项目的完成带来延误）。

> 延迟活动开始时间可以延迟成本，在资金短缺的时候有帮助，但同时也增大了不能按时完成任务的风险。

为了使得图 8.16 的第 22 行和图 8.17 的第 23 行的内容对比更加直观，我们最好把整个 44 周项目中的这两行数据画在同一张图上，如图 8.18 所示。由于对于最初 16 周的三个活动 A、B、C 来说，最早开始时间和最晚开始时间是相同的，所以在这段时间内，对于这两种不同的开始时间类型来说，累计项目成本是不会发生变化的。在 16 周之后，我们通过把图 8.16 和图 8.17 第 22 行的数据（以及后面几周的数据）以描点法在坐标上画出来，就可以得到两条完全不同的曲线。由于不管是使用最早开始时间还是最晚开始时间，最后项目都能够在 44 周之内完成，所以在曲线图上它们最后又重合在一点。这一点的总成本是 4550000 美元。任何一条曲线上的点都表示了周项目成本发生了变化。

> 图 8.18 显示了惟一可行的不会延迟工期的周预算。

实际上，在图 8.18 中所用的开始时间和活动成本都只是实际成本的估计值。但是不管是使用哪种开始时间，当按照进度进行时，这个图可以向我们提供每一周累计项目成本的最佳预测。如果选择了其中的一种开始时间进度安排，最佳预测就变成一个需要今后在执行过程中严格遵守的预算。在两条曲线之间的阴影部分的预算也可以通过选择要求一个活动在最早开始时间和最晚开始时间之间的一个时间点开始的工作安排来获得。安排项目在 44 周之内完成的惟一可行预算就是这两条曲线之一或是这两条曲线之间的阴影部分。

科信建筑公司在收到支付款后有足够的资金支付开销。于是佩蒂先生就选择了使用最早开始时间来建立工作日程，以便能够有机会尽快地完成这个项目（他仍然很担心在 47 周

| | A | B | E | W | X | Y | Z | AA | AB | AC | AD | AE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Template for PERT/Cost | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | Start | Week | Week | Week | Week | Week | Week | Week | Week | Week |
| 5 | | Activity | Time | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 6 | | A | 0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 7 | | B | 2 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 8 | | C | 6 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 9 | | D | 20 | $0 | $0 | $0 | $0 | $43,333 | $43,333 | $43,333 | $43,000 | $43,333 |
| 10 | | E | 16 | $102,500 | $102,500 | $102,500 | $102,500 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 11 | | F | 20 | $0 | $0 | $0 | $0 | $36,000 | $36,000 | $36,000 | $36,000 | $36,000 |
| 12 | | G | 26 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 13 | | H | 33 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 14 | | I | 18 | $0 | $0 | $30,000 | $30,000 | $30,000 | $30,000 | $30,000 | $30,000 | $30,000 |
| 15 | | J | 25 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 16 | | K | 34 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 17 | | L | 33 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 18 | | M | 42 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 19 | | N | 38 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 | $0 |
| 20 | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | $102,500 | $102,500 | $132,500 | $132,500 | $109,333 | $109,333 | $109,333 | $109,333 | $109,333 |
| 22 | | | | $1,222,500 | $1,325,000 | $1,457,500 | $1,590,000 | $1,699,333 | $1,808,667 | $1,918,000 | $2,027,333 | $2,136,667 |

图 8.17　当使用最晚开始时间时，在科信项目的第 17 周到第 25 周的 PERT/Cost 程序应用。

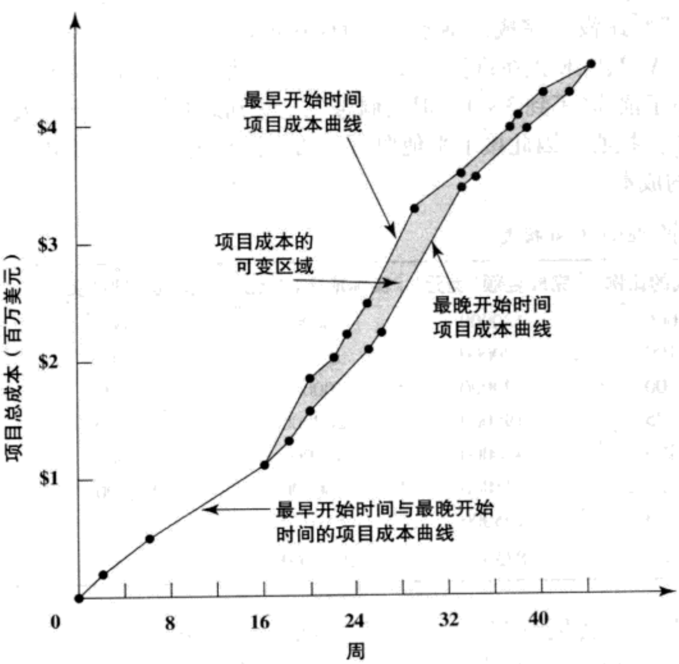



图 8.18　当所有的活动都按照最早开始时间（上面的一条成本曲线）或者最晚开始时间（下面的一条曲线）开始时，项目累计成本的安排情况。

之内不能完成项目而遭到 30 万美元罚金的概率会很大）。因此，他对该项目的预算就如图 8.18 成本曲线的上界所示。

## 项目成本的控制

一旦项目开始进行,佩蒂先生就必须要对实际成本进行认真监控并采取适当的措施来避免严重的超支。监控成本的一条重要途径就是每天将实际成本与图 8.18 预算曲线的上界进行比较。

然而,由于可能出现实际工作进度和计划工作进度不一致的情况,这种监控成本的方法本身并不能自我相适应。例如,假设单个活动的成本超过计划成本,而一些延迟使得某些活动不能按照日程开始。这些延迟可能会导致到每一天截止的总成本要低于预算累计项目成本,因此给人一个印象是项目成本处于良好的监控之下。而且,不管项目的成本情况从总体上来说是否令人满意,佩蒂先生需要一些关于单个活动成本状况的信息,以便找出出现问题的地方,采取正确的措施。

> PERT/Cost 报表给出每个活动的执行成本,会表明有问题的点以便采取相应的行动。

因此,PERT/Cost 会定期产生出一个反映每一个活动成本执行情况的报表。表 8.12 就展示了项目进行 22 周(正好是项目完成时间的一半)后的成本执行情况。第一列给出了至少是在这段时间里开始进行的活动。第二列给出了每一个活动的预算总成本(同前面表 8.11 第三列所示的一样)。第三列表示现在活动完成了百分之多少。第二列与第三列相乘得到第四列,表示了在这个活动上工作完成的预算值。

佩蒂先生把第四列与第五列到此时为止的实际成本相比较。用第五列减去第四列得到了到此时为止每一个活动的超支成本,如表格最右边的一列所示(超支成本为负表示节约成本)。

佩蒂先生特别注意报表中那些还没有完成的活动,因为现在他还可以调整这些活动(他使用早先时候的报表在活动 A、B、C、E 正在进行时进行监控,这使得四个活动的总成本达到了预算要求)。活动 D 略高于预算(不到 3%)。但是佩蒂先生对到此时为止产生了大量超支成本的活动 F 和活动 I 十分担心。因此接下来他要对这两个活动进行研究,并和其他工头一起研究改进这些活动的成本。

**表 8.12 科信建筑公司项目 22 周后的 PERT/Cost 报表**

| 活动 | 预算成本(美元) | 完成的比例 | 完成金额(美元) | 实际成本(美元) | 成本超出量(美元) |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 180000 | 100% | 180000 | 200000 | 20000 |
| B | 320000 | 100 | 320000 | 330000 | 10000 |
| C | 620000 | 100 | 620000 | 600000 | -20000 |
| D | 260000 | 75 | 195000 | 200000 | 5000 |
| E | 410000 | 100 | 410000 | 400000 | -10000 |
| F | 180000 | 25 | 45000 | 60000 | 15000 |
| I | 210000 | 50 | 105000 | 130000 | 25000 |
| 合计 | 2180000 | | 1875000 | 1920000 | 45000 |

我们注意到在表 8.12 中的底部一行里到 22 周为止的累计项目成本(1920000 美元)。这个数字显然大大的低于在图 8.16 中单元格 AB22 里所给出的项目累计成本预算(2042000 美元)。如果没有其他信息的话,这个对比表明到目前为止项目成本效率很好。然而,项目成本在预算之内的真正原因就是当前的活动都晚于项目日程安排,计划在早先时候发生的成本还没有发生。PERT/Cost 程序报表提供了一些很有价值的附加信息,这些信

息描述了到此时为止更为准确的成本状况。通过关注每一个单独的活动而不是整个项目，这个报表找出了目前有问题的点(活动 F 和 I)，要求佩蒂先生及时解决。因此，这个报表使得他有时间采取适当的措施来处理超支成本。

## 问题回顾

1. PERT/Cost 的目的是什么？
2. PERT/Cost 程序是如何开始的？
3. 针对在活动进行期间成本是如何分布的问题，通常要作出什么假设？
4. 什么是工作包？
5. PERT/Cost 使用哪两种工作安排为基础安排成本？
6. 对于每一个时间段项目成本，PERT/Cost 提供哪两种信息？
7. 关于每一个活动的成本状况，PERT/Cost 报表提供什么信息？
8. 在项目管理人员已经通过比较到至时为止的实际成本和预算累计成本来评估整个项目成本状况后，为什么还需要使用 PERT/Cost 报表？

## 8.7　从管理的视角评价 PERT/CPM

PERT/CPM 经受住了时间的考验。虽然它已经使用了 40 年，但是仍然是管理科学领域中应用最为广泛的技术之一。它是项目管理者的标准工具。

### PERT/CPM 的价值

PERT/CPM 的价值很大程度上源于它为计划一个项目提供了基本框架。我们回忆一下制定计划的步骤：(1)找出项目中需要执行的活动；(2)估计每一个活动所需要的时间；(3)找出活动的紧前活动；(4)建立项目网络，直观地展现出这些活动间的关系。严格执行这些步骤就能够作出所需的计划。

由 PERT/CPM 所产生的日程信息对于项目管理者来说也是很重要的。在没有任何延误的情况下，每一个活动何时开始？在不影响整个项目完成时间的前提下，一个活动可以容忍多长时间的延迟？网络图中不能够容忍任何延迟的关键路径是哪一条？活动完成时间的不确定性有什么影响？在目前计划下，能够在最后工期之前完成整个项目的概率是多少？PERT/CPM 可以回答这些问题。

PERT/CPM 还可以在其他方面为项目管理人员提供帮助，如建立日程安排以及项目预算是关键的问题。时间—成本平衡的 CPM 方法使得我们能够探求使用额外成本缩短项目工期的途径。PERT/Cost 向我们提供了一个对项目成本进行计划、安排和控制的系统化程序。

PERT/CPM 以各种方式举例说明了管理科学的应用。它的建模方法着眼于问题的主要特征(活动、紧前关系、时间和成本)上，不至于陷入那些无足轻重的细节之中。最后得到的模型(项目网络和可选择的线性规划公式)是非常容易理解和应用的。它解决了所有对于管理人员来说是很重要的事情(制定计划、安排进度、处理不确定性、建立时间—成本平衡以及控制成本)。它帮助项目管理人员及时有效地处理这些问题。

## 使用计算机

为了满足新的需要，PERT/CPM 继续在不断的发展中。在最初的 40 年中，主要是依靠手工解决问题。有时项目网络非常复杂，记录计划的修改成为一项主要任务。当然，把这些修改通知负责每一个活动的工头是一件十分令人厌烦的事情。计算机改变了所有这一切。

现在经过了许多年，PERT/CPM 已经高度计算机化了。在个人计算机以及工作站上运行的 PERT/CPM 软件包无论在数量还是质量上都取得了十分显著的进步。项目管理软件（例如 MS Project①）现在已经成为项目管理者的标准工具。这使得 PERT/CPM 可以应用于每一个涉及巨额资金、可能包含成千上万个活动的项目。项目计划中所做的修改现在几乎可以同步得到结果并进行研究。日程安排中的实际修改以及所导致的计划更新等，都可以毫不费力、直观地记录下来。通过计算机网络和通讯系统把这些结果传递给相关的小组已经变得十分快捷。

但是，PERT/CPM 不是万能药，无法解决所有的问题。对于某些应用，它有一些重要的不足。下面我们将简要介绍每一个不足之处，以及它们是如何在 PERT/CPM 的改进和拓展研究中被发现的。

## 工期均值和方差的近似处理

在 8.4 节中我们讲到了 PERT 的三个近似。它们简化了每一个活动工期概率分布均值和方差的计算。我们知道使用这种方法只能得到最有可能时间估计、乐观估计时间和悲观估计时间。得到了这三个估计值，再通过简单的公式计算就可以得到近似均值和近似方差。使用各个活动的近似均值和近似方差就可以计算出指定时间段内能够完成项目的概率。

不幸的是，很多后来的研究表明这种方法只能得到均值和方差的相当粗糙的近似值。部分的困难在于这种方法是针对概率分布极端的乐观估计时间和悲观估计时间的。这两个终点代表小概率事件（可能发生的最好和最坏的情形），这已经远远超出了估计人员的经验范围。这些估计的准确性和可靠性都不如那些不处于概率分布极端的点。例如，研究表明，如果把概率的范围定位于 10% ~90%，就可以得到一个比较好的估计。那么，乐观估计时间和悲观估计时间就被描述成各有 10% 的概率做得更好或者做得更坏。中间估计就也可以通过定位于概率分布 50% 的点得到改进。

这样修改三种估计的定义导致在计算活动的工期均值和方差时要使用复杂得多的公式才行。然而，由于现在分析过程都计算机化了，这也不是什么难事。很重要的一点是通过这种方式得到了这些比较好的均值和方差的近似值。②

## 最后工期内完成项目概率的近似

在 PERT/CPM 所做的所有假设和简单近似中，有一个特别有争议。这就是 8.4 节所讲

---

① 项目管理 46 软件包的情况请参见 M. Elliot 的"Buyer's Guide: Project Management Software," IIE Solutions, March 2001, pp. 45 – 52。

② 如果希望获得更进一步的信息，可以参见如 D. L. Keefer and W. A. Verdini 的"Better Estimation of PERT Activity Time Parameters," Management Science 39 (September 1993). pp. 1086 – 91. 还可以参见 A. H. – L. Lau, H. – S. Lau, and Y. Zhang 的"A Simple and Logical Alternative for Making PERT Time Estimate," IIE Transactions 28 (March 1996). pp. 183 – 92。

到的简化近似 1，假设在项目网络中均值关键路径是最长的一条路径。这个近似值大大简化了在指定工期内完成项目近似概率的计算过程。然而，实际上，有很大的概率甚至是相当大的概率会出现其他某一条或某几条路径比均值关键路径还要长。从而与真正的概率相比较，这样计算出来的最后期限前完成项目的概率通常在某种程度上被放大了。PERT/CPM 没有给出出现这种错误的可能性有多大（研究发现通常这些错误都很小，但有时也会变得很大）。因此，将这样得出的概率作为根据的项目管理人员往往会被误导。

> 计算机仿真技术可以更好地近似得到这个概率。在 16.3 节中将描述它如何应用于科信建筑公司的项目中。

为了找到一个比较准确的近似值，管理科学家们进行了大量的研究工作。其中一个方法为概率加上上限和下限①。

另外一个方法是使用要在第 15、16 章中介绍的计算机仿真技术来近似得到这个概率。在实际应用中我们通常使用这种方法对 PERT/CPM 的近似加以改进。在 16.3 节中我们将详细讲述在科信建筑公司的项目中是如何应用的。

## 处理重叠活动

PERT/CPM 另外一个十分重要的假设是一个活动只有在它的紧前活动完全完成之后才能够开始进行。虽然这个假设看起来完全合情合理，但是有些时候这个假设也只是现实中一个很粗略的假设。

例如，在科信建筑公司项目中的活动 H（外部上漆）和它的紧前活动 G（外墙施工）。很显然，在外墙还没有立起来的时候是不能够进行油漆工作的。但是，还有这种可能，就是在竖外墙过程中，当一面墙建起来的时候就马上进行油漆工作。因此，在活动 G 完成之前也可以进行活动 H。虽然这其中需要进行很认真的协调，但是这样重叠活动可以缩短 PERT/CPM 预测的项目完成所需时间。

优先日程图示法（precedence diagramming method，简称 PDM）作为 PERT/CPM 的一个很重要补充，就是专门用来处理这样的重叠活动的②。PDM 方法提供了四种活动和其每一个紧前活动的关系。

**第一种：**一个活动只有在它的紧前活动已经进行了一定的时间之后才可以开始进行。
**第二种：**一个活动只有在它的紧前活动已经完成了一定的时间之后才能够完成。
**第三种：**一个活动只有在它的紧前活动开始进行了一定的时间之后才能够完成。
**第四种：**一个活动只有在它的紧前活动已经完成了一定的时间之后才可以开始进行（我们注意到这种选择不是使活动重叠，而是在活动之间制造时间差。例如，在等待油漆干以前进行上漆工作之后的活动）。

在上面每一个选择之中所讲到的一定的时间也可以表述为紧前活动工作量的某一比例。

编入这些选择之后，PDM 就可以像 PERT/CPM 一样广泛用于确定最早开始时间、最晚开始时间、关键路径以及研究时间—成本平衡等方面。

虽然，PDM 为 PERT/CPM 添加了相当程度的柔性，但是 PDM 技术在应用范围和知名度

① 参见如 J. Kamburowski 的 "Bounding the Distribution of Project Duration in PERT Networks", Operations Research Letters 12 (July 1992). Pp. 17 – 22。

② 如果希望获得有关 PDM 的介绍，请参见第 136 ~ 144 页的 A. B. Badiru and P. S. Pulat, "Comprehensive Project management: Integrating Optimization Models, Management Principles, and Computers" (Englewood Cliffs, NJ: Prentice – Hall, 1995)。

方面都不如 PERT/CPM。不过这种情况正在逐步改变。

## 活动资源分配的合并

PERT/CPM 假设:每一个活动在正常情况下(或是在应急情况下)都有着充足的资源(资金、人员、设备等等)来进行分配。但是在实际情况中,许多项目在进行中只能为每一道活动配置有限的资源。在计划项目中极富挑战性的一项工作就是确定资源如何分配给每一个活动。

PERT/CPM 没有考虑如何为活动配置资源。

一旦资源分配完毕,就可以用通常的方式应用 PERT/CPM。但是为了努力同时达到期望的目标,更好的方式是使用 PERT/CPM 所生成的计划和进度来合并这些资源。例如,一个通常的目标就是分配这些资源,使得项目完成时间最短。

管理科学专家在这方面已经进行了许多研究(而且还将继续进行下去),并得到了同时进行资源配置和安排项目活动进度这两件事情的方法。但是这个主题已经超出了本书的讨论范围。不过我们可以看到许多关于这个主题的书籍。①

## 发展前景

如果忽略它的不足,毫无疑问,PERT/CPM 将在可预见的未来继续得到广泛应用。它向项目管理人员提供了大部分他们想要得到的东西:结构、日程、控制进度的工具(最晚开始时间、时差、关键路径等等)、成本控制(PERT/Cost)以及还有研究时间—成本平衡的柔性。

虽然涉及 PERT 三种估计方法的一些近似值是有问题的,但是最终这些错误没有那么重要。正是对项目完成所需时间进行估计的过程促进了项目管理人员和下属之间的有效交流,促使他们共同设定开始时间、活动所用的时间以及项目完成所需时间的目标。共同努力实现这些目标可能使得他们充满自我实现希望地进行预测,不必考虑导致这些目标的不准确的数学运算。

与之类似,尽管 PERT/CPM 的假设只能应用在没有活动重叠发生的情况下,适度的活动重叠可能性不会改变 PERT/CPM 产生的日程安排的有效性。事实上,拥有一小部分活动重叠可以补偿项目进行中"不可预料的延迟"的时差。而这些延迟很显然使得项目完成所需时间增多了。

即使在需要对活动进行资源配置的时候,对于一些项目只要先根据常识进行配置然后使用 PERT/CPM 就可以获得满意的结果。

然而很不幸的是,在本章中所讲到的对 PERT/CPM 的改进和拓展到现在为止还不能很好地在实践中得到整合。一些应用价值已被证明的老方法的确还在发挥着它们的作用。但是如果在某些基础之上进行改进和拓展,我们就可以使之变成一个新的更好的方法。我们希望这些拓展和改进部分能够逐渐在更为广阔的范围内得到应用。我们也希望在项目管理和项目安排(多在欧洲)的科学领域之中,近期和现在的研究能够继续进行下去,并在未来得到更多的进步。

---

① 例如,参见同上一本书的第 162 ~ 209 页,也请参见 L. Özdamar 和 G. Ulusay 的"A Survey on the Resource-Constrained Project Scheduling Problem" IIE transactions 27(1995 年 10 月),第 574 ~ 86 页;S. S. Erenguc, T. Ahn 和 D. G. Conway 的"The Resource Constrained Project Scheduling Problem with Mutiple Crashable Modes: An Exact Solution Method," Naval Research Logistics 48 (2001 年 3 月),pp. 107 – 27。

**问题回顾**

1. 在管理一个项目中 PERT/CPM 提出了哪些重要的管理问题？
2. 在最近几年之中 PERT/CPM 由最初的手工操作转变到计算机化操作，这带来了哪些好处？
3. 在 PERT 的三个估计之中，涉及活动工期概率分布中的点的选择如何影响了悲观时间和乐观时间的估计？
4. 改进 PERT/CPM 得到的项目在期限内完成概率近似值的方法有哪些？
5. 拓展 PERT/CPM 使得活动和它们的紧前活动可以重叠的方法叫什么？
6. 在正常的情况下，对每一道活动所使用的资源可得性，PERT/CPM 做了哪些假设？
7. 除了近似值本身，应用估计活动完成所需时间的过程还有哪些其他的好处？
8. 考虑到 PERT/CPM 已经是一项非常成熟的管理科学技术，新的改进和拓展是否仍然会出现？

## 8.8　本章小结

自从 50 年代初露端倪以来，PERT（项目审评技术）和 CPM（关键路径法）得到了广泛应用。它们帮助项目管理人员对项目进行计划、安排以及控制。随着时间的推移，这两种技术逐渐合二为一，所以现在我们所说的 PERT/CPM 指的就是整合了两种原始技术所有功能的合并技术。

PERT/CPM 开始于把一个项目分成多个独立的活动，识别出每一个活动的紧前活动，估计每一个活动的工期。接下来就是要构造出项目网络图来直观地表示出所有这些信息。实现这一目的的所有网络图中应用最广泛的是用节点表示活动的项目网络（AON）。在这种网络图之中我们使用节点表示每一个活动。

然后 PERT/CPM 为项目管理人员提供了进行日程安排的信息，包括最早开始时间、最晚开始时间以及每一个活动的时差，而且它还可以辨别出关键路径。在这条关键路径上，所有活动的任何延误都会对整个项目的工期产生影响。因为关键路径是项目网络图中最长的一条路径，如果所有的活动都严格按照日程进行的话，关键路径的长度就是整个项目的完成时间。

然而，让所有的活动都严格按照日程进行是很困难的一件事。因为在确定每一道活动完成所需时间的时候经常会遇到许多不确定因素。计划评审技术三点时间估计法通过对每一道活动所需时间进行三种不同的估计（最大可能估计、乐观估计、悲观估计）解决了这个问题。在计算活动所需时间概率分布的近似方差和近似平均值时，我们用到了这些数据。于是，我们近似得到了项目在规定期限内完成的概率。

时间—成本平衡的 CPM 方法使得项目管理人员能够研究改变项目完成期限时总成本的变化情况。在正常的情况下或在全应急情况下，进行这项工作所需的数据就是这个活动的工期以及所用的成本。边际成本分析和线性规划这两种方法都可以用来确定（如果可能的话）对每一道活动要进行什么程度的应急处理才能使得在指定期限内完成项目的成本最小。

PERT/CPM 之中的 PERT/Cost 技术为项目管理人员提供了一个系统程序来进行计划、进度安排、项目成本控制。不管活动是按照最早开始时间开始还是按照最晚开始时间进行，它都会生成一个完整的每个时间段的活动成本安排。它还可以定期生成一个报表，评估每

一个活动的成本执行情况,包括找出出现超支成本的地方。

PERT/CPM 确实有一些很重要的不足。这些不足的其中之一就是当估计活动所用的时间均值和方差以及估计项目在最后期限内完成概率时使用了很有问题的近似值。另外一个不足就是即使有时候可能会发生活动重叠,它也只允许一道活动在其紧前活动完全完成之后开始进行。另外,PERT/CPM 也没有解决如何把有限的资源分配给每一个活动的问题。

然而,PERT/CPM 可以向项目管理人员提供他们所需要的大部分帮助,这一点在长期的实践之中已经得到了证实。为了弥补这些的不足,需要对 PERT/CPM 进行不断的改进和拓展(例如,在处理活动重叠问题中使用 PDM 技术)。

## 专业术语

**活动**(activity) 在每一个项目之中所需要完成的单个任务。(8.1 节)

**用箭头表示活动(AOA)的项目网络**(activity - on - arc project network):在一个项目网络之中使用箭头来表示每一个活动。(8.2 节)

**用节点表示活动(AON)的项目网络**(activity - on - node project network):在一个项目网络之中使用节点(圆圈或矩形)来表示每一个活动。弧(箭头)表示活动之间的先后关系。(8.2 节)

**弧**(arc):项目网络图中的箭头。(8.2 节)

**逆向追溯** (Backward pass):在一个项目网络图中从项目的末尾向前面移动,以确定出每一个活动的最晚结束时间和最晚开始时间。(8.3 节)

**CPM** 关键路径法的缩写,一种帮助项目管理者贯彻责任的技术。(前言)

**时间—成本平衡的** CPM **方法**:当使用不同程度的应急措施来缩短工期的时候,对项目的总成本和工期进行平衡的方法。(8.5 节)

**应急点**(crashing point):时间成本曲线上的一个点,表示了这个活动进行全应急处理,也就是尽可能地使用一切方法来降低项目的工期的时候,活动的工期和成本。(8.5 节)

**应急完成一项活动**(crashing an activity):使用一些需要增加成本的方法来降低项目的工期,使它低于正常的水平。(8.5 节)

**应急完成一项目**(crashing the project):应急处理一个项目之中的一些活动,使项目的工期降低到正常水平之下。(8.5 节)

**关键路径**(critical path):项目网络图之中最长的路径。在这条路径上的活动都是项目的瓶颈活动,这些活动任何的延误都会延误整个项目的完成时间。(8.3 节)

**活动的最早结束时间**(earliest finish time for an activity):在项目的进行过程中没有任何延误的情况下活动结束的时间。(8.3 节)

**活动的最早开始时间**(earliest start time for an activity):在项目的进行过程中没有任何延误的情况下活动开始的时间。(8.3 节)

**EF**:活动最早结束时间的缩写。(8.3 节)

**ES**:活动最早开始时间的缩写。(8.3 节)

**终点**(finish node):在项目网络图中表示项目结束的节点(用方框表示)。(8.2 节)

**前向追溯**(forward pass):在一个项目网络图中从项目开始向后移动,以确定出每一个活动的最早结束时间和最早开始时间。(8.3 节)

**甘特图**(Gantt chart):使用横条来表示活动计划开始和结束时间的一种图表。(8.2 节)

**紧前活动**(immediate predecessor):一个活动的紧前活动就是指这个活动开始进行之前必须要完成的活动。(8.1 节)

**紧后活动**(immediate successor):如果给出了一个活动的紧前活动,那么这个活动就是它所有紧前活动的紧后活动。(8.1 节)

**活动的最晚结束时间**(latest finish time for an activity):在不影响项目工期的情况下(假设在项目进行过程中没有随后的延误),一个活动可能最晚结束的时间。(8.3 节)

**活动的最晚开始时间**(latest start time for an activity):在不影响项目工期的情况下(假设在项目进行过程中没有随后的延误),一个活动可能最晚开始的时间。(8.3 节)

**路径的长度**(length of path):在一条路径上所有活动工期的总和。(8.3 节)

**LF**:活动最晚结束时间的缩写。(8.3 节)

**LS**:活动最晚开始时间的缩写。(8.3 节)

**边际成本分析**(marginal cost analysis):使用应急处

理当前关键路径之上的活动的边际成本,以确定把项目工期降低到期望水平的成本最低的方法。(8.5 节)

**均值关键路径**(mean critical path):如果项目网络图路径中每一个活动的工期都等于均值的话,那么这条路径就是关键路径。(8.4 节)

**最大可能估计**(most likely estimate):对活动工期最有可能出现的值的估计。(8.4 节)

**节点**(node):在项目网络图中作为连接点的小圆圈或小方框。(8.2 节)

**正常点**(normal point):当项目正常进行的时候,时间成本曲线图上表示活动工期和成本点。(8.5 节)

**乐观估计**(optimistic estimate):在乐观的情形下对项目工期的估计。(8.4 节)

**路径**(path):在项目网络图中从起始点到结束点沿着箭头方向的路程。(8.3 节)

**PERT**:计划评审技术的缩写,一种帮助项目管理者贯彻责任的技术。(前言)

**PERT/Cost**:一种帮助项目管理者计划、安排和对项目成本进行控制的系统性程序(通常是计算机化的程序)。(8.6 节)

**PERT/CPM**:PERT 和 CPM 两种技术的结合体。(前言)

**计划评审技术三点时间估计法**(PERT three-estimate approach):通过对每一个活动进行三种估计(最大可能估计、乐观估计和悲观估计)来处理工期不确定性的一种方法。(8.4 节)

**悲观估计**(pessimistic estimate):在悲观的条件下对活动工期的估计。(8.4 节)

**优先日程图示法**(PDM)(precedence diagramming method):PERT/CPM 的一种拓展技术,用来处理活动重叠。(8.7 节)

**项目网络**(project network):用来直观展示项目的网络。(8.2 节)

**活动的时差**(slack for an activity):在不影响项目工期的前提下,能够延迟的时间总量(假设在项目进行之中没有随后的延误发生)。通过活动最晚结束时间和最早结束时间之间的差值得到。(8.3 节)

**始点**(start node):在项目网络之中表示项目开始的节点(用小方框表示)。(8.2 节)

## 本章管理科学课件的学习辅助

"Ch. 8—用 PERT/CPM 进行项目管理"Excel 文件:

科信建筑公司案例(项目安排)

计划评审技术三点时间估计法的模板(标记为 PERT)

科信建筑公司案例(时间—成本平衡的 CPM 方法)

PERT/Cost 模板(标记为 PERT Cost)

科信建筑公司案例 ES 的成本安排

科信建筑公司案例 LS 的成本安排

**特殊软件:**

MS Project(微软项目管理软件)

MS Project 文件:

科信建筑公司案例项目安排

科信建筑公司案例三点时间估计法数据

基于最早开始时间的科信建筑公司案例的成本安排(持续 8 周)

**Excel 加载宏:**

Premium Solver

**CD-ROM 中第 8 章的补充材料:**

建立项目网络的程序

## 习 题

我们将在可以使用 Excel 解决的问题左边插入一个 E 作为标识。在这个标识的星号表示必须要使用 Excel(除非你的指导老师不允许你使用)。在解决某些问题时你的指导老师也许也会建议你使用 MS Project。在问题的序号上标记有星号"*"表示至少有部分答案已经在本书的后面给出。

8.1. 克里斯廷·菲利浦斯负责为她的公司制定明年春天营销管理培训计划和协调工作。克里斯廷已经列出了这个项目的各个活动,如下表所示:

| 活 动 | 活动内容 | 紧前活动 | 估计时间(周) |
|---|---|---|---|
| A | 选址 | — | 2 |
| B | 获得发言人名单 | — | 3 |
| C | 制定发言人交通计划 | A,B | 2 |
| D | 准备和邮寄宣传小册子 | A,B | 2 |
| E | 接受预定 | D | 3 |

a. 构造这个项目的项目网络。

b. 找出这个网络图的所有路径以及路径长度,并指出哪一条路径是关键路径。

c. 找出每一个活动的最早时间、最晚时间以及时差。并用这些数据来确定出关键路径。

d. 如果克里斯廷在一周内就找到了开会地点,比计划中提前了一周的时间,是否会缩短整个项目完成所用的时间?为什么?

8.2.* 让我们重新考虑习题8.1。克里斯廷已经为这个项目制定出了更为详细的计划,于是就有了如下表所示扩展的活动列表:

| 活 动 | 活动内容 | 紧前活动 | 估计时间(周) |
|---|---|---|---|
| A | 选址 | — | 2 |
| B | 获得主要发言人名单 | — | 1 |
| C | 获得其他发言人名单 | B | 2 |
| D | 为主讲人制定交通计划 | A,B | 2 |
| E | 为其他发言人制定交通计划 | A,C | 3 |
| F | 进行食品安排 | A | 2 |
| G | 商谈住宿价格 | A | 1 |
| H | 准备宣传小册子 | C,G | 1 |
| I | 邮寄宣传小册子 | H | 1 |
| J | 接受预定 | I | 3 |
| K | 准备宣传资料 | C,F | 4 |

在这种情况下,继续讨论一下习题8.1中所提出的问题。

8.3. 考虑拥有下表所示活动的项目。

| 活动 | 紧前活动 | 估计时间(月) |
|---|---|---|
| A | — | 1 |
| B | A | 2 |
| C | B | 4 |
| D | B | 3 |
| E | B | 2 |
| F | C | 3 |
| G | D,E | 5 |
| H | F | 1 |
| I | G,H | 4 |
| J | I | 2 |
| K | I | 3 |
| L | J | 3 |
| M | K | 5 |
| N | L | 4 |

a. 为这个项目建立项目网络图。

b. 找出每一个活动的最早开始时间和最早结束时间。

c. 找出每一个活动的最晚开始时间和最晚结束时间。

d. 找出每一个活动的时差,并确定出哪一条路径是关键路径。

8.4. 你和你的几个朋友计划要进行一次意大利晚餐。需要执行的任务、任务的紧前活动以及完成它们所需要的时间如下表所示:

| 活动 | 活动内容 | 紧前活动 | 估计时间(分) |
|---|---|---|---|
| A | 购买意大利干酪 | — | 30 |
| B | 把意大利干酪切成片 | A | 5 |
| C | 打两个鸡蛋 | — | 2 |
| D | 混合鸡蛋和意大利干酪 | C | 3 |
| E | 把洋葱和蘑菇切成丝 | — | 7 |
| F | 煮土豆汁 | E | 25 |
| G | 烧开大量的水 | — | 15 |
| H | 煮意大利面条 | G | 10 |
| I | 除去面条中的水分 | H | 2 |
| J | 把这些原料混合 | I,F,D,B | 10 |
| K | 预热烤箱 | — | 15 |
| L | 烘烤意大利面条 | J,K | 30 |

a. 设计项目网络图。

b. 找出通过网络图的所有路径以及路径长度，并指出哪一条路径是关键路径。

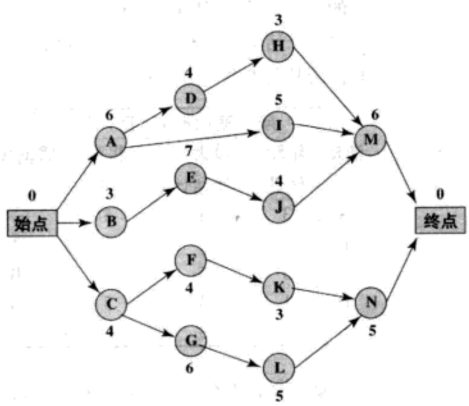
c. 找出每一个活动的最早开始时间和最早结束时间。

d. 找出每一个活动的最晚开始时间和最晚结束时间。

e. 找出每一个活动的时差，并确定出关键路径。

f. 由于在你们准备切洋葱和蘑菇的时候，正好有一个电话，你们被打断了 6 分钟，那么这份晚餐将会延误多久呢？如果你们使用了食品粉碎机，这将使你们用于切洋葱和蘑菇的时间由 7 分钟下降到 2 分钟，那么晚餐会晚多久呢？

8.5.* 肯·约翰斯顿是摩根斯丹利(Stanley Morgan)银行的数据处理管理人员。他正在计划一个新的管理信息系统项目。现在他准备启动这个项目，并且想要在 20 周之内完成。在他确认了项目所需要执行的 14 个独立活动以及它们的紧前关系和估计完成时间(以周为单位)之后，肯建立了如下图所示的项目网络图。




a. 找出这个项目网络图的所有路径以及路径的长度，并指出关键路径。

b. 找出每一个活动的最早时间、最晚时间和时差。如果没有延误的话，肯是否能够在预定的时间内完成这个项目？

c. 使用从 b 中得到的信息确定哪一条路径是关键路径。为了使项目能够按照计划进行，肯需要着重注意哪些活动？

d. 如果活动 I 多用了两周的时间，使用 b 中所得到的信息确定项目完成所需要的时间是多少？如果活动 H 多用了两周，项目完成需要多少时间？如果活动 J 多用了两周，项目完成需要多少时间？

8.6. 一个包含了六个活动的项目的基本情况如下表所示：

| 活动 | 紧前活动 | 估计工期(月) |
|---|---|---|
| A | — | 5 |
| B | — | 1 |
| C | B | 2 |
| D | A,C | 4 |
| E | A | 6 |
| F | D,E | 3 |

a. 建立这个项目的网络图。

b. 找出每一个活动的最早时间、最晚时间以及时差，并指出哪一条路径是关键路径。

c. 如果其他所有的活动都按照日程进行的话，在不影响完成项目所用时间的基础上，活动 D 的最长工期是多少？

8.7. 重新考虑 8.1 节中介绍的科信建筑公司的案例。并参考 8.3 节末尾图 8.7 所得到的完整项目网络。我们注意到当使用 PERT 的三个估计的时候，这个表中活动的估计工期和表 8.4 中所得到的平均值是相同的。现在如果我们使用表 8.4 中得到的悲观估计时间来代替图 8.7 中的估计工期，找出这个项目网络图所有新的最早时间、最晚时间和时差，指出关键路径并确定项目的总估计工期(表 8.5 提供了一些线索)。

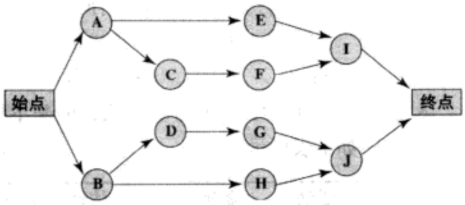
8.8.* 在问题 8.7 中，如果使用乐观估计时间，结果将会是怎样？

8.9. 在问题 8.7 中，如果使用表 8.8(8.5 节)中所给出的应急时间，结果将会怎样？

8.10.* 如果使用 PERT 的三种估计，一个活动的三个估计如下所示：乐观估计时间为 30 天；最大可能估计是 36 天；悲观估计时间是 48 天。那么这个活动完成所用的时间均值和方差的最终估计值是多少？

8.11. 阿尔弗雷德·罗文斯顿是一家主要的医药公司康健(Better Health)公司研发部的负责人。他正要进行的一个非常重要的项目是要发明出一种抵抗爱滋病的新药。在他的机构之中，他把所有人员分成了 10 个小组负责这个研发项目的不同阶段。我们把这些阶段标记为 A,B,…,J。执行它们的小组也就被标为 A,B,…,J 组。在下列的项目网络图中给出

了这些活动的紧前关系。




为了对付竞争，公司的 CEO 已经告诉阿尔弗雷德如果可能的话他希望在 22 个月内把这种药研制出来。

阿尔弗雷德非常清楚每一个小组需要多少时间完成工作具有相当的不确定性。使用 PERT 的三种估计，每一组的经理对本组工作时间作出了最可能估计、乐观估计和悲观估计。使用 PERT 公式，这些估计被转化为每一组活动时间概率分布均值和方差的估计，如下表所示（经过取整）：

| 活动 | 工期（月） | |
|---|---|---|
| | 均值估计 | 方差估计 |
| A | 4 | 5 |
| B | 6 | 10 |
| C | 4 | 8 |
| D | 3 | 6 |
| E | 8 | 12 |
| F | 4 | 6 |
| G | 3 | 5 |
| H | 7 | 14 |
| I | 5 | 8 |
| J | 5 | 7 |

a. 找出这个项目的均值关键路径。

b. 使用这条均值关键路径和表 8.7 找出项目在 22 个月内完成的近似概率。

c. 现在考虑这个项目网络的其他三条路径。对于这些路径中的每一条，使用表 8.7 找出项目在 22 个月内完成的近似概率。

d. 对于药物在 22 个月内试制成功的可能性，阿尔弗雷德应当怎样向 CEO 解释？

E*8.12. 现在我们来重新研究一下问题 8.11。对于每一个活动来说，这里是可以得到习题 8.11 的表中活动工期均值和方差的三种时间估计，如下表所示：

| 活动 | 所需要的时间（月） | | |
|---|---|---|---|
| | 乐观估计 | 最大可能估计 | 悲观估计 |
| A | 1.5 | 2 | 15 |
| B | 2 | 3.5 | 21 |
| C | 1 | 1.5 | 18 |
| D | 0.5 | 1 | 15 |
| E | 3 | 5 | 24 |
| F | 1 | 2 | 16 |
| G | 0.5 | 1 | 14 |
| H | 2.5 | 3.5 | 25 |
| I | 1 | 3 | 18 |
| J | 2 | 3 | 18 |

（我们注意到由于在这些研究活动所用时间的高度的不确定性，所以每一个活动的悲观估计都要比乐观估计和最大可能估计大上好几倍。）

现在使用管理科学课件中的 Excel 模板继续解决习题 8.11 中的问题，输入了这些活动所用时间的三种估计值之后，立即就会得到活动所用时间的平均值和方差。在指定了每一条路径后，这个模板还将显示这个项目在 22 周之内完成的近似概率。

8.13. 比尔·弗雷德伦德是里恩考·劳格（Lincoin Log）建筑公司的总裁，他正在考虑投标一个建设项目。比尔已经确定出了项目中需要完成的五个活动，并使用了 PERT 的三种估计得到每一个活动的三种估计值。这些活动以及它们的紧前关系如同下表所示。

| 活动 | 所需要的时间（月） | | | 紧前关系 |
|---|---|---|---|---|
| | 乐观估计 | 最大可能估计 | 悲观估计 | |
| A | 3 | 4 | 5 | — |
| B | 2 | 2 | 2 | A |
| C | 3 | 5 | 6 | B |
| D | 1 | 3 | 5 | A |
| E | 2 | 3 | 5 | B,D |

如果项目没有在 11 周之内完成，公司要支付 500000 美元的罚金。比尔非常关心这个项目有多大的概率能够在规定的时间内完成。

a. 建立这个项目的项目网络。

E b. 找出每一个活动工期的均值和方差的估计值。

E c. 找出均值关键路径。

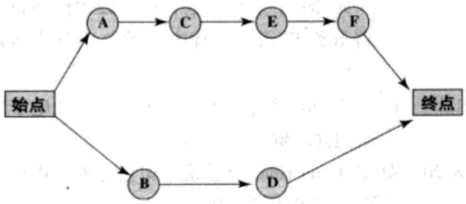
E d. 求出项目在规定时间内完成的近似概率。

e. 比尔认为，如果这个项目能够在 11 周之内完成，则这个很有可能中标的项目将会给公司带来大约 250000 美元的利润。如果项目不能在 11 周内完成的话，由于有罚

金，所以公司将会损失大约 250000 美元。因此，只有当在规定期限内完成项目的概率超过 50% 的时候，他才能进行投标。对此你有何建议？

8.14. *莎伦·罗维是电子玩具(Electronic Toys)公司的营销副总裁。她正在进行一个为新系列的电子玩具设计广告活动的项目。她希望这个项目能够在 57 天之内完成，以便能够赶在圣诞季节之前及时推出这个广告活动。

莎伦确认出了在这个项目中需要完成的五个活动(分别标记为 A，B，…，F)。考虑到这些活动开始的顺序，她还构建了下面的项目网络。




使用 PERT 的三种估计方法之后，莎伦得到了如下表所示的每一个活动工期估计。

| 活动 | 所需要的时间(天) | | |
|---|---|---|---|
| | 乐观估计 | 最大可能估计 | 悲观估计 |
| A | 12 | 12 | 12 |
| B | 15 | 21 | 39 |
| C | 12 | 15 | 18 |
| D | 18 | 27 | 36 |
| E | 12 | 18 | 24 |
| F | 2 | 5 | 14 |

E　a. 找出每一个活动的均值和方差的估计值。

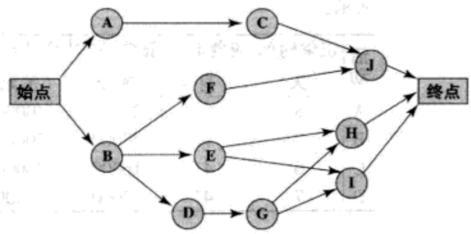
b. 找出均值关键路径。

E　c. 使用均值关键路径求出在 57 天之内完成项目的近似概率。

d. 考虑另外的一条路径，求出这条路径在 57 天之内完成的近似概率。

e. 由于这些路径并没有发生交叉，所以可用下面所讲的方法得到项目在 57 天之内完成概率的一个更好的估计值。如果这两条路径都在 57 天之内完成，那么这个项目就可以在 57 天之内完成。因此，项目在 57 天之内完成的概率就等于上面所得到两个概率的乘积。这个答案对于在 c 部分中求出的概率的准确性有什么启示？

8.15. 洛克希德(Lockhead)飞机制造公司正在着手进行一个为美国空军开发一种新型战斗机的项目。公司和美国国防部的合同中规定了这个项目一定要在 100 周之内完成。否则的话，公司就要为延误交付支付罚金。这个项目拥有 10 个活动(分别标记为 A，B，…，J)。这些活动以及它们之间的紧前关系如下图所示。




使用 PERT 的三种估计，得到每一个活动工期的三种估计，如下表所示：

| 活动 | 所需要的时间(周) | | |
|---|---|---|---|
| | 乐观估计 | 最大可能估计 | 悲观估计 |
| A | 28 | 32 | 36 |
| B | 22 | 28 | 32 |
| C | 26 | 36 | 46 |
| D | 14 | 16 | 18 |
| E | 32 | 32 | 32 |
| F | 40 | 52 | 74 |
| G | 12 | 16 | 24 |
| H | 16 | 20 | 26 |
| I | 26 | 34 | 42 |
| J | 12 | 16 | 30 |

E　a. 找出每一个活动的均值和方差的估计值。

b. 找出均值关键路径。

E　c. 求出在 100 周之内完成项目的近似概率。

d. 上面求得的概率比实际概率大一些还是小一些？

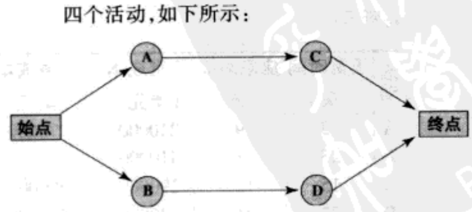
8.16. 判断下面有关 PERT 三种估计的说法是否正确，并用本章中的结论(标出引用页码)来验证你的判断。

a. 假设活动工期不长于乐观估计时间，不短于悲观估计时间。

b. 假设活动工期呈现一个正态分布。

c. 假设均值关键路径是项目网络图所有路径之中所用时间最少的一条路径。

8.17. 亭科(Tinker)建筑公司正在着手进行一个项目，并要求在 12 个月之内完成。这个项目有四个活动，如下所示：




项目经理肖恩·墨菲觉得在正常的情况下他不可能在最后期限内完成这个项目。因

此，他决定使用时间—成本平衡的 CPM 方法来确定出对项目进行应急处理的最经济的方法。他收集了这四个活动的有关数据，如下所示：

| 活动 | 正常时间（天） | 应急时间（月） | 正常成本（美元） | 应急成本（美元） |
|---|---|---|---|---|
| A | 8 | 5 | 25000 | 40000 |
| B | 9 | 7 | 20000 | 30000 |
| C | 6 | 4 | 16000 | 24000 |
| D | 7 | 4 | 27000 | 45000 |

使用边际成本分析方法来解决这个问题。

8.18. 重新考虑习题 8.17 中所讲到的亭科建筑公司的问题。在上大学的时候，肖恩修了管理科学课。这门课花了一个月的时间讲授线性规划。于是，肖恩想用线性规划来分析这个问题。

a. 研究项目网络图上面的一条路径。规划一个拥有两个变量的线性规划模型（用代数形式），使得在 12 月之内完成这个项目的成本最小，使用图解法来求解这个问题。

b. 使用同样的方法来研究项目网络中下面的一条路径。

c. 把在前面两个问题中得到的线性规划模型合并成为一个完整的线性规划模型（用代数形式），使得在 12 月之内完成这个项目的成本最小，并指出这个模型的最优解。

E* d. 以图 8.14 的形式为这个问题构造一个电子表格模型并求解。

E* e. 如果把最后期限分别定为 11 个月和 13 个月，请在这两种情况下使用这个模型对问题重新求解。

8.19. 重新研究在习题 8.14 中所讲到的电子玩具（Electronic Toys）公司的问题。莎伦认为项目无法在 57 天完成的可能性还是很大的。因此，为了确保项目能够在最后期限内完成，她决定对整个项目进行应急处理，使用时间—成本平衡的 CPM 方法确定如何使用最经济的方式来实现目标。

莎伦收集了应用这种方法所需的数据，如下表所示：

| 活动 | 正常时间（天） | 应急时间（天） | 正常成本（美元） | 应急成本（美元） |
|---|---|---|---|---|
| A | 12 | 9 | 210000 | 270000 |
| B | 23 | 18 | 410000 | 460000 |
| C | 15 | 12 | 290000 | 320000 |
| D | 27 | 21 | 440000 | 500000 |
| E | 18 | 14 | 350000 | 410000 |
| F | 6 | 4 | 160000 | 210000 |

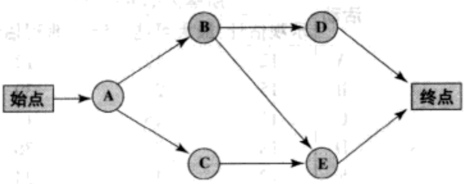
表中的正常时间是从问题 8.14 中的原始数据得到的均值的估计值。均值关键路径给出了这样的一个估计：这个项目能够在 51 天之内完成。但是，莎伦知道，根据前面的分析，有些悲观估计的数值可能要远远大于所得到的平均值，项目的完成时间很有可能要大大超出 51 天。为了确保项目能够在 57 天之内完成，她要求（使用 CPM 分析得到的）基于平均值的项目完成时间必须要控制在 47 天之内。

a. 研究项目网络中下方的一条路径，使用边际成本分析方法确定一种把这条路径减少到 47 天的最经济的方法。

b. 用上面的方法来重新研究项目网络中上方的一条路径。对项目进行应急处理使项目工期降低到 47 天的最优方法的总应急成本是多少？

E* c. 把这个问题构建成符合线性规划的电子表格模型并求解。

8.20. *好家（Good Homes）建筑公司正在着手进行一个大型新家居项目。公司的总裁迈克尔·迪恩正在对这个项目的进度进行安排。迈克尔确认出了五个主要的活动（分别标记为 A，B，…，E）。这些活动以及它们之间的紧前关系如下图所示。




他还收集了关于每一个活动的正常点和应急点的下列的数据。

| 活动 | 正常时间（周） | 应急时间（周） | 正常成本（美元） | 应急成本（美元） |
|---|---|---|---|---|
| A | 3 | 2 | 54000 | 60000 |
| B | 4 | 3 | 62000 | 65000 |
| C | 5 | 2 | 66000 | 70000 |
| D | 3 | 1 | 40000 | 43000 |
| E | 4 | 2 | 75000 | 80000 |

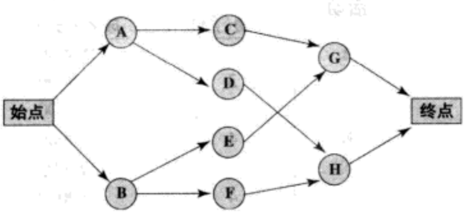
这些成本包含了在活动执行过程中的原料、设备和劳动成本等直接成本，还包含了监督管理、其他的公司日常开支以及所使用资金的利息等间接成本。迈克尔估计这些间接成本为每周 5000 美元。他想使整个项目的成本达到一个最小值。因此，为了节省一些间接成本，迈克尔决定要对项目进行适当的应急处理，使节省的时间内每一周的应急成本都小于 5000 美元。

a. 为了分析应急处理的影响，当项目在正常状态下进行的时候，找出每一个活动的最早时间、最晚时间和时差。并指出相应的关键路径和项目工期。

b. 使用边际成本分析方法确定哪一个活动需要进行应急处理以及可以使项目的总成本减少多少。在这个计划安排下，每一个活动的工期和成本是多少？

E* c. 构建一个符合线性规划的电子表格模型，并通过从 a 得到的项目工期开始每次缩短项目的最后期限一周，用电子表格对 b 求解。

E*8.21. *21 世纪电影制片公司正在着手开始进行一部很重要的影片的拍摄工作。影片制片人达斯迪·霍夫默决定使用 PERT/CPM 来计划和控制这个关键的项目。他找出了八个主要的活动（分别标记为 A，B，…，H）。这些活动以及它们之间的紧前关系如下表所示：




达斯迪现在得知，另外一部将会在夏季中期上映并能够引起很大轰动的影片正在拍摄。而他的影片也将要在夏季中期上市。这真是不幸。

因此，他和 21 世纪电影制片公司的高级管理层决定要加快影片的拍摄速度，争取在夏初上映（离现在只有 15 周了）。虽然这样做将会大大增加预算，但是管理人员还是觉得这部影片将会国内和国际赢得很大的利润。

达斯迪现在想要找出在 15 周之内完成影片的最经济的方法。他使用了时间—成本平衡的 CPM 方法法，并得到了如下的数据：

| 活动 | 正常时间（周） | 应急时间（周） | 正常成本（百万美元） | 应急成本（百万美元） |
|---|---|---|---|---|
| A | 5 | 3 | 20 | 30 |
| B | 3 | 2 | 10 | 20 |
| C | 4 | 2 | 16 | 24 |
| D | 6 | 3 | 25 | 43 |
| E | 5 | 4 | 22 | 30 |
| F | 7 | 4 | 30 | 48 |
| G | 9 | 5 | 25 | 45 |
| H | 8 | 6 | 30 | 44 |

针对这个问题，构建一个符合线性规划的电子表格模型并求解。

E*8.22. 重新考虑在习题 8.15 中所提出的洛克希德飞机制造公司的问题，这是一个关于为美国空军开发一种新型战斗机的项目。管理人员认为，这个项目的当前计划有超出国防部规定的 100 周最后期限的可能性。公司在超时违约方面有着很不好的记录，所以管理人员很担心再次超时违约，并且影响今后从国防部获得采购合同。而且，管理人员很想避免因超时违约而遭受到的双重惩罚。因此，他们决定要把项目应急完成，并使用时间—成本平衡的 CPM 方法确定如何用十分经济的方法来做到这一点。使用这种方法所需要的数据如下表所示：

| 活动 | 正常时间（周） | 应急时间（周） | 正常成本（百万美元） | 应急成本（百万美元） |
|---|---|---|---|---|
| A | 32 | 28 | 160 | 180 |
| B | 28 | 25 | 125 | 146 |
| C | 36 | 31 | 170 | 210 |
| D | 16 | 13 | 60 | 72 |
| E | 32 | 27 | 135 | 160 |
| F | 54 | 47 | 215 | 257 |
| G | 17 | 15 | 90 | 96 |
| H | 20 | 17 | 120 | 132 |
| I | 34 | 30 | 190 | 226 |
| J | 18 | 16 | 80 | 84 |

这些正常时间是习题 8.15 中的原始数据得到的均值估计。相关的均值关键路径提供了这个项目将在 100 周之内完成的估计。然而，管理人员非常了解活动工期的巨大波动意味着实际活动工期可能要比估计的长许多。因此，管理人员作出决策，规定基于均值（在 CMP 分析方法整个过程都要用到）的预计项目工期不能超过 92 周。

针对这个问题，构建一个符合线性规划的电子表格模型并求解。

8.23. 重新考虑习题 8.20，这是一个好家建筑公司建造一个新的大型家居的项目。迈克尔现在得出了一个关于如何对这个项目进行应急处理的计划（如同本书后面所给的答案）。由于这个计划使得所有的三条路径都成为了关键路径，所以每一个活动的最早开始时间就是它们的最晚开始时间。

迈克尔现在想要使用 PERT/Cost 来对项目的活动进行安排和控制。

a. 找出每一个活动的最早时间、最晚时间和时差。

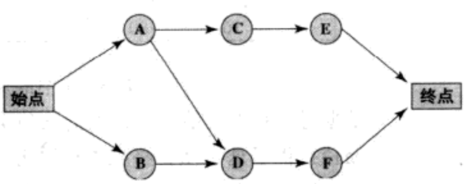
b. 建立像表 8.11 一样的表格来显示这个项目的预算。

c. 构建一个像表 8.16 一样的表格(手工完成),表示基于每个活动最早时间的成本安排。

E* d. 使用相关的 Excel 模板在一个电子表格上完成 b 和 c。

E* e. 在项目开始四周之后,活动 A 已经完成(实际花费为 65000 美元),活动 B 刚刚完成(实际花费为 55000 美元),活动 C 却只完成了 33%(到目前为止已经花费了 44000 美元)。制作一份项目开始四周之后的 PERT/Cost 报表。迈克尔应该把注意力集中到哪些活动上才能改善活动成本状况。

8.24. *P-H 微处理器公司需要承担一个重要的保养和革新工作,对它的制造晶片的设备进行检查和更新。这个项目包含了六个活动(标记为 A,B,…,F)。这些活动以及它们之间的紧前关系如下所示:




所估计的活动工期以及成本如下表所示:

| 活动 | 估计的工期(周) | 估计的成本(美元) |
|---|---|---|
| A | 6 | 420000 |
| B | 2 | 180000 |
| C | 4 | 540000 |
| D | 5 | 360000 |
| E | 7 | 590000 |
| F | 9 | 630000 |

a. 找出每一个活动的最早时间、最晚时间和时差。项目完成的最早结束时间是多少?

E* b. 使用管理科学课件中 PERT/Cost 的 Excel 模板,在一个电子表格中显示基于最早开始时间的预算和成本安排。

E* c. 在最晚开始时间的基础之上重新完成 b。

d. 在最早开始时间或最晚开始时间的基础上,使用这些电子表格来画出一个像图 8.18 一样的图表,显示项目累计成本的安排情况。

E* e. 在四周之后,活动 B 已经完成了(实际花费 200000 美元),而活动 A 只完成了 50%(实际花费 200000 美元),活动 D 也只完成了 50%(实际花费 210000 美元)。制作项目开始四周之后的 PERT/Cost 报表。哪一个活动需要管理人员特别注意来改善成本状况?

8.25. 重新考虑习题 8.5。这是关于摩根斯丹利银行建立新的管理信息系统项目的问题。肯·约翰斯顿已经得到了每一个活动的最早时间、最晚时间和时差。现在他要使用 PERT/Cost 来对项目的成本进行安排和控制。每一个活动估计所用时间以及成本如下表所示:

| 活动 | 估计工期(周) | 估计成本(美元) |
|---|---|---|
| A | 6 | 180000 |
| B | 3 | 75000 |
| C | 4 | 120000 |
| D | 4 | 140000 |
| E | 7 | 175000 |
| F | 4 | 80000 |
| G | 6 | 210000 |
| H | 3 | 45000 |
| I | 5 | 125000 |
| J | 4 | 100000 |
| K | 3 | 60000 |
| L | 5 | 50000 |
| M | 6 | 90000 |
| N | 5 | 150000 |

E* a. 使用管理科学课件中 PERT/Cost 的 Excel 模板,在一个电子表格中显示基于最早开始时间的预算和成本安排。

E* b. 在最晚开始时间的基础之上重新完成 a。

c. 在最早开始时间或最晚开始时间的基础上,使用这些电子表格来画一个如同图 8.18 一样的图表,显示累计项目成本。

d. 八周过去之后,活动 A、B 和 C 已经完成,它们的成本分别是 190000 美元、70000 美元和 150000 美元。活动 D、E、F、G 和 I 正在进行的过程之中,它们完成的比例分别为 40%、50%、60%、25%、20%。这几个活动到目前为止分别实际花费 70000 美元、100000 美元、45000 美元、50000 美元和 35000 美元。制作出 8 周后 PERT/Cost 报表。请问 Ken 应该提高哪一个活动的成本效率?

## 案例 8.1　迈向成功之路

珍尼特·理查德注视着她的搭档吉尔伯特·贝克的眼睛，坚定地说："好吧，让我们开始吧！"

说完这些话后，英特猫（InterCat）就将公开上市了。英特猫是一家由珍尼特·理查德和吉尔伯特·贝克创建的专门为一些小规模消费品业务设计和维护国际互联网目录的公司。这家公司拥有 30 名员工，其中大部分是计算机程序员。许多职员都密切关注着高技术市场，他们断定既然高科技公司在美国比在其他的国家更为人所接受和看重，那么公司就应该只是在美国发行它的股票。这次预计要发行 500 万股。

公司所面临的任务非常艰巨。珍尼特和吉尔伯特知道在发行股票的过程之中需要完成许多步骤。他们也知道他们必须要在 28 周之内完成，因为他们急切地需要得到新的资金来确保公司能够从它的竞争对手那里获得一些有价值的新业务并继续发展下去。他们对快速进行原始公众股的发行也十分重视，因为他们相信这样做就能很大机会卖得一个好股价——因为公众对网络购物非常疯狂，而且已有几个提供网页设计服务的公司上市了。

由于 28 周转眼即逝，珍尼特和吉尔伯特决定制定原始公众股发行过程中的步骤。他们列出了需要完成的每一个主要活动、每一个活动的紧前活动、完成每一个活动所需要的时间以及完成每一个活动所需要的成本。这些情况如下表所示：

| 活　动 | 紧前活动 | 时间(周) | 成本(美元) |
|---|---|---|---|
| 评估每个潜在担保人的声誉 | | 3 | 8000 |
| 选择一个担保人财团 | 评估每个潜在担保人的声誉 | 1.5 | 4500 |
| 协商财团每一个成员的责任 | 选择一个担保人财团 | 2 | 9000 |
| 协商财团每一个成员的佣金 | 选择一个担保人财团 | 3 | 12000 |
| 准备注册声明(包括预计财务状况、公司历史、现有业务以及未来规划) | 协商财团每一个成员的责任和佣金 | 5 | 50000 |
| 把注册报告书提交证券交易委员会(SEC) | 准备注册报告书 | 1 | 1000 |
| 向社会公共机构的投资者进行介绍并激发潜在购买者的兴趣 | 把注册报告书提交证券交易委员会(SEC) | 6 | 25000 |
| 分发招股说明书以及有吸引力的证券说明书 | 把注册报告书提交证券交易委员会(SEC) | 3 | 15000 |
| 计算发行价格 | 把注册报告书提交证券交易委员会(SEC) | 5 | 12000 |
| 从证券交易委员会接到材料不足备忘录 | 把注册报告书提交证券交易委员会(SEC) | 3 | 0 |
| 修改注册报告书并把它提交给证券交易委员会 | 从证券交易委员会接到材料不足备忘录 | 1 | 6000 |
| 从证券交易委员会得到注册确认 | 修改注册报告书并提交证券交易委员会 | 2 | 0 |
| 确认发行遵守"蓝天法"的每条条款 | 向独立投资者进行介绍并激发潜在购买者的兴趣<br>分发招股说明书以及有吸引力的证券说明书<br>计算发行价格<br>从证券交易委员会得到注册确认 | 1 | 5000 |

（续表）

| 活　　动 | 紧前活动 | 时间(周) | 成本(美元) |
|---|---|---|---|
| 指定一个负责登记股票的信托公司 | 从证券交易委员会得到注册确认 | 3 | 12000 |
| 指定一个过户代理 | 从证券交易委员会得到注册确认 | 3.5 | 13000 |
| 发行最终的招股说明书，其中包括通过邮件向所有股票认购者说明的最后价格和所做的修改 | 确认发行遵守“蓝天法”的每条条款<br>指定一个负责登记股票的信托公司<br>指定一个过户代理 | 4.5 | 40000 |
| 打电话给有兴趣的购买者 | 确认发行遵守“蓝天法”的每条条款<br>指定一个过户代理 | 4 | 9000 |

珍尼特和吉尔伯特把这些步骤给公司所有的员工看。作为财务部主管，莱斯利·格雷是不久以前才从商学校毕业的。她记得在大学里她曾经学过各种不同的项目管理工具，于是建议珍尼特和吉尔伯特使用 PERT/CPM 分析方法来进行分析，使得他们明白应该优先考虑哪些方面。

a. 为英特猫公司股票的首次发行过程制作一个项目网络图。整个过程会花费多少时间？在此过程之中的关键活动是什么？

b. 出现如下所示的情况，会对完成这些活动所需要的时间产生怎样的影响？请认真评估每一种情况。

　i. 财团的一些成员态度强硬，所以关于每一个成员责任的协商时间从 2 周增加到了 3 周。

　ii. 担保人在数学方面很有天赋，所以计算股票发行价格的时间从 5 周下降到了 4 周。

　iii. 哇！证券交易委员会在最初的注册报告书中找到了很多的不足之处，所以担保人要多花 2.5 周的时间来修改注册报告书并把它重新提交给证券交易委员会。

　iv. 在新股票的发行过程之中有一些条款与“蓝天法”并不一致。为了保证一致，对条款的修改时间增加到四周。

c. 有消息说，他们的主要竞争对手索夫特塞尔斯(Soft Sales)也正在计划上市融资。因此，他们感到了很大的压力。因为他们担心如果索夫特塞尔斯抢在他们之前进入股市的话，会对公司的股票价格产生很大的影响。想要投资英特猫公司的股票投资者就会减少，因为投资者会认为索夫特塞尔斯是一个更强大、管理更好的公司。于是，珍尼特和吉尔伯特决定必须要在 22 周之内完成这个项目。他们认为，假如他们向某些活动投入更多的资源——人力和财力的话，他们的目标是可能实现的。他们列出了所有可能被缩短的活动、全面缩短后活动所需的时间以及缩短活动所需要的成本。他们也得出结论，部分缩短如下表所示活动的时间是可以做到的，而且当全面缩短时，减少的时间和上升的成本成比例。

| 活　　动 | 时间(周) | 成本(美元) |
|---|---|---|
| 评估每个潜在担保人的声誉 | 1.5 | 14000 |
| 选择一个担保人财团 | 0.5 | 8000 |
| 准备注册声明(包括预计财务状况、公司历史、现有业务以及未来规划) | 4 | 95000 |
| 向社会公共机构的投资者进行介绍并激发潜在购买者的兴趣 | 4 | 60000 |
| 分发招股说明书以及有吸引力的证券说明书 | 2 | 22000 |
| 计算发行价格 | 3.5 | 31000 |
| 修改注册报告书并把它提交给证券交易委员会 | 0.5 | 9000 |
| 确认发行完全符合“蓝天法”的条款 | 0.5 | 8300 |
| 指定一个负责登记股票的信托公司 | 1.5 | 19000 |
| 指定一个过户代理 | 1.5 | 21000 |
| 发行最终的招股说明书，其中包括通过邮件向所有股票认购者说明的最后价格和所做的修改 | 2 | 99000 |
| 打电话给有兴趣的购买者 | 1.5 | 20000 |

英特猫怎样做才能满足由珍尼特和吉尔伯特设定的新的最后期限？

d. 珍尼特和吉尔伯特知道投资银行家都是脚踏两只船的无赖。他们也是索夫特塞尔斯新股发行的牵头认购人。为了保住和英特猫的这笔买卖，这些银行投资家同意透露一点点机密给珍尼特和吉尔伯特。索夫特塞尔斯由于公司的记账紊乱且不完整，所以不得不推迟上市。获得这条新的信息后，珍尼特和吉尔伯特认为他们在首次发行购股票的时间限制上可以放宽一些。现在，他们将在 24 周内而不是 22 周内完成新股发行的整个程序。假设完成指定信托公司和过户机构的时间与成本和 c 部分的一样。那么英特猫怎样做才能满足由珍尼特和吉尔伯特设定的新的最后期限？

## 案例 8.2　“学校的生活结束了……”

Alice Cooper

布伦特·波宁在充满了兴奋和担忧的心情之中开始了大学最后一个学年的生活。兴奋是因为同教授、考试、习题、分数、小组会议、通宵工作等等有关的事情都马上可以结束了；担忧是因为将要面对的一个事实：他在 12 月毕业，这样找工作的时间就只有 4 个月了。

布伦特对于他应该如何找到工作有一点不太自信。在他的第二个和第三个学年之中，他就经常听到高年级的学生谈论如何找到一个好工作的策略。他知道要解决这个问题，首先要拜访一下学校就业指导中心，得到一个找工作的计划。

在开学的第一天——9 月 1 号，他走进了学校就业指导中心，遇上了刚刚毕业的伊莉莎白·莫里威责。她看起来精力充沛，脸上总是带着令人愉快的笑容。布伦特就向伊莉莎白介绍了自己所遇到的问题：他将在 12 月份毕业，想在 1 月份开始工作，他想把 11 月和 12 月整整两个月的时间用来进行面试。这样的一个计划就意味着在 10 月 31 号之前他就应该把他所有的预备资料都准备好，其中包括求职信和简历，并把它们交给自己想要进入的公司。

伊莉莎白意识到如果布伦特想要在 60 天之内完成他的目标的话，这样的安排真是太紧张了。于是她建议布伦特把这两个过程合并到一起，并找出在找工作的过程中所需要完成的关键事件。布伦特和伊莉莎白列出了 19 个关键事件。对于每一个事件，他们要确定出在开始进行这个关键事件之前所必须要完成的事件。他们还要对每一个事件完成所用的时间进行评估。结果如下表所示。

| 关键事件 | 每一个事件的紧前事件 | 完成每一个事件所需要的时间 |
|---|---|---|
| A. 完成网上注册表格并提交给就业中心。 | 没有 | 2 天（其中包括就业中心处理注册表格的时间） |
| B. 留意就业中心的动向，在中心获得所需要的信息以及学校招聘的过程。 | 没有 | 5 天（其中包括布伦特等待就业中心张贴就业信息的时间） |
| C. 写最初的简历，包括所有的学历和工作经历。 | 没有 | 7 天 |
| D. 在因特网上寻找校园招聘以外的工作机会。 | 没有 | 10 天 |
| E. 在整个秋季参加公司的招聘会，了解公司文化并和公司代表进行沟通。 | 没有 | 25 天 |
| F. 查看就业中心的行业信息，得到在每一个行业中的工作和发展机会。找到最适合于自己的工作，参加就业测试。与就业中心手册中列出的校友进行交流，讨论各种工作。 | 完成网上注册表格并提交给就业中心<br>留意就业中心的动向 | 7 天 |
| G. 参加由就业中心举办的模拟面试来练习面试并学习有效的面试技巧。 | 完成网上注册表格并提交给就业中心。留意就业中心的动向 | 4 天（其中包括从布伦特答应参加面试到面试开始进行的一段时间） |

（续表）

| 关键事件 | 每一个事件的紧前事件 | 完成每一个事件所需要的时间 |
|---|---|---|
| H. 向就业中心提交最初的简历以进行面试。 | 完成网上注册表格并提交给就业中心。留意就业中心的动向。写最初的简历 | 2天(其中包括就业中心检查简历的时间) |
| I. 与简历专家进行交流,取得最初简历的修改意见。 | 向就业中心提交最初的简历以进行面试 | 1天 |
| J. 对最初的简历进行修改。 | 与简历专家进行交流,取得最初简历的改进意见 | 4天 |
| K. 参加招聘会,收集公司的简介,与公司代表进行沟通并向公司提交简历。 | 对最初的简历进行修改 | 1天 |
| L. 搜寻校园工作信息,找到适合自己资格和兴趣的工作。 | 查看行业介绍,进行就业测试,与校友交流 | 5天 |
| M. 决定自己所要从事的工作,不管这个信息是从因特网、招聘会还是学校的就业信息表中得到的。 | 在因特网、学校招聘信息表中搜索,参加学校的招聘会 | 3天 |
| N. 获得通过学校招聘会以及开放式面试方式*的公司的面试。 | 决定自己所要从事的工作 | 3天 |
| O. 给没有参加学校招聘会的公司以及参加了学校招聘会但采用封闭式面试方式**的公司写求职信。 | 决定自己所要从事的工作。参加公司的招聘会 | 10天 |
| P. 向就业中心提交求职信以便进行检查。 | 写求职信 | 4天(其中包括就业中心检查求职信的时间) |
| Q. 修改求职信。 | 向就业中心提交求职信以便进行检查 | 4天 |
| R. 对于那些没有参加学校招聘会的公司,向招聘部门邮寄求职信和简历。 | 修改求职信 | 6天(其中包括打印申请材料并进行包装的时间以及这些材料在邮寄过程中所用的时间) |
| S. 对于那些参加了学校招聘会但是却采用了封闭式面试的公司,把求职信和简历交给就业中心 | 修改求职信 | 2天(其中包括打印和包装申请材料的时间) |

* 开放的面试方式:公司并不对想要进行面试的报名者事先进行筛选。任何一个报名者都能够进行面试。但是由于公司只有有限的面试人员,所以感兴趣的报名者都必须要用积点来竞争(从他们所有的积点总数中分配出来),拥有最高积点的报名者就可以进入到面试阶段。

** 封闭的面试方式:公司需要报名者提交他们的求职信、简历以及考试分数。这样公司就可以对想要进行面试的报名者事先进行筛选。

在布伦特与伊莉莎白进行讨论后的那个下午,布伦特又在学校的咖啡屋里遇到了他的伙伴们,并和他们讨论了在这个夏天的努力。布伦特把自己和伊莉莎白的讨论过程告诉给了他的伙伴们。布伦特向他们介绍了自己和伊莉莎白共同制作出来的一个冗长的关键事件的列表,并且说自己担心是否能够完成所有这些关键事件并且找到工作。其中一个伙伴提醒他说,他们曾经在第一个学期里学习一门管理科学课程。这门课就是要教会他们如何组织大型项目的技术。布伦特想起这门课就感到亲切,因为他现在可以用在这门课中所学过的许多种方法来处理找工作的问题了。

a. 画出在面试开始之前完成所有关键事件的项目网络图。如果严格按照日程进行的话,布伦特需要多长的时间才能开始进行面试?在此过程之中的关键步骤是什么?

b. 布伦特意识到完成每一个关键事件所需要的时间具有许多不确定性。在这个学期他将非常忙,例如他要学习一门必修课。而且,有时候学生要与学校就业中心的顾问预约,要等上一段很长的时间。所以除了前面讲到的每一个步骤最有可能使用的时间之外,布伦特还建立了每一个步骤

完成所需时间的乐观估计和悲观估计。请问在最糟糕的情形下完成所有步骤需要多长时间?在最好的情形下完成所有这些步骤需要多长时间?

| 关键事件 | 乐观估计时间(天) | 悲观估计时间(天) |
|---|---|---|
| A | 1 | 4 |
| B | 3 | 10 |
| C | 5 | 14 |
| D | 7 | 12 |
| E | 20 | 30 |
| F | 5 | 12 |
| G | 3 | 8 |
| H | 1 | 6 |
| I | 1 | 1 |
| J | 3 | 6 |
| K | 1 | 1 |
| L | 3 | 10 |
| M | 2 | 4 |
| N | 2 | 8 |
| O | 3 | 12 |

(续表)

| 关键事件 | 乐观估计时间(天) | 悲观估计时间(天) |
|---|---|---|
| P | 2 | 7 |
| Q | 3 | 9 |
| R | 4 | 10 |
| S | 1 | 3 |

c. 为布伦特的找工作过程确定出一条均值关键路径。项目所用时间的方差是多少?

d. 布伦特在 60 天之内完成这个项目的比较粗略的概率是多少?

e. 布伦特意识到在他的计算之中犯了一个很严重的错误。原因是他并不能确定学校招聘会的举行日期。布伦特从校报上得知,招聘会在 24 天之后也就是 9 月 25 号召开。在认真考虑了这个使问题复杂化的事实的基础之上,画出项目网络图。

f. 在这个新的网络图之中,均值关键路径是什么?布伦特在 60 天之内完成这个项目的概率是多少?

CHAPTER

# 9 整数规划

## 学习目标

完成本章学习后,你应该掌握:

1. 指出整数规划和线性规划的不同。
2. 说明一般整数规划问题是如何产生的。
3. 通过对问题的描述,建立一般整数规划模型。
4. 解释如何使用0-1决策变量表示是非问题。
5. 使用0-1决策变量建立互斥方案和相依决策的约束。
6. 根据对问题的描述,建立0-1整数规划模型。
7. 列出0-1整数规划的重要应用领域。
8. 指出辅助0-1变量的作用。
9. 建立使用辅助0-1变量的基本0-1整数规划模型。

整数规划是线性规划的拓展,要求得到整数解。

本章介绍另一种重要的管理科学工具,称为整数规划。它与线性规划联系紧密。事实上管理问题用整数规划表示和用线性规划表示是一样的,只是加了一个约束:部分或所有的决策变量必须是整数(0,1,2,……)。

线性规划模型的特点之一是决策变量可以是满足各种约束的任意值,包括分数和小数(例如$2\frac{3}{4}$或4.1353)。一个决策变量可能在最优解中是整数,但是在大多数情况下仅仅是一个巧合。

在一些应用中,决策变量只有在它们是整数的情况下才有实际意义。例如要向各种活动以整数数量分配人、设备或车辆,因此代表这些数量的决策变量必须是整数(整数变量)。这是整数规划解决的一般问题。

整数规划分为两大类。一个是一般整数规划。它需要至少一部分整数变量有整数值,满足模型的函数的和非负约束。另一个是0-1整数规划。它规定整数变量只能有两个值,0或1。这些0-1变量为涉及一些有关是非问题的管理问题建模提供了巨大的灵活性。每一个是非问题都涉及一些管理选择,其中只有两个

可能的选项：是，接受选择；或否，舍弃这个选择。对于选择是，对 0－1 决策变量赋值为 1，选择否，赋值为 0。0－1 整数规划模型可能会同时考虑非常多的选择（每一个选择对应一个 0－1 决策变量），总体目标是找到这些选择的最佳组合。

9.1 节主要介绍一般整数规划。本章余下篇幅将介绍 0－1 整数规划，包括案例分析、应用调查和关于 0－1 整数规划模型建模的两节。此外，CD-ROM 上有本章的补充阅读材料，关于求解 0－1 整数规划问题的一些观点。

## 9.1　一般整数规划

一般整数规划问题简单地说就是线性规划问题的一种变形，其中一部分或所有的决策变量是整数变量（只能取整数值的变量）。在大多数情况下，这些整数变量可以去满足函数和非负约束的任意整数值（将特定的整数变量的取值限制在 0 或 1 是可以的，但是与 0－1 规划不同的是，至少一部分整数变量不受此限制）。这种问题非常常见①。

例如，对于第 2 章伟恩德玻璃制品公司产品组合问题来说，如果两个决策变量，$D$ 和 $W$，分别代表了门和窗户的总产量，而不是生产率，那么这个问题将是一个一般整数规划模型。因为这些产量需要是整数，$D$ 和 $W$ 将限制为取整数值。

一般整数规划实际应用的一个例子是由 1988 年管理科学弗兰茨 · 厄德曼奖一等奖得主提供的。这个久负盛名的奖项授予了关于旧金山警察局的一项管理科学研究。Interface 杂志 1989 年 1～2 月号上有关于它的介绍。这项研究促使了巡逻警官最优排程和部署计算机系统的开发。这个新系统每年节省了 1100 万美元的开支，增加了 300 万美元的交通肇事收入，并缩短了 20% 的响应时间。其数学模型中主要的决策变量是每一个换班开始时间安排执勤的警官数量。由于这个数量必须是整数，因此决策变量也限制为只能取整数值。

这里有一个使用整数决策变量的例子。

### 举例：TBA 航空公司的问题

TBA 航空公司是一家使用小飞机经营短途航线的小型区域性企业。该公司已经营得不错，其管理层决定拓展它的经营领域。

管理层现在面临的基本问题是采购更多的小型飞机来开辟一些新的短途航线，还是开始通过为一些跨地区航线购买大型的飞机来进军全国市场（或双管齐下）。许多因素都将进入管理层的最终决策，但是最重要的一个是哪一种战略最有可能获得最高收益。

表 9.1 的第一行提供了购买每一种飞机的年净利润期望（包括资本回收成本）。第二行给出了每架飞机的采购成本，以及可用于飞机采购的总可用资金是 1 亿美元。第三行说明了管理层希望小飞机的采购不超过两架，因为增加可获利的短途航线的机会有限，同时管理层并没有规定大型飞机的最大采购数量（除了资金限制以外）。

每一种类型的飞机需要采购多少才能够获得最大的年总净利润？

因为只需要做两个决策，该问题可以作图求解。在使用电子表格之前，我们先用图解法来求解这一问题，以便使读者通过图形，比较线性规划和整数规划，从而加深认识。

① 有一个例外，就像 6.2 节和 7.1 节所提到的一样，特定类型的线性规划问题含有整数解的属性，能够保证最优解取值是整数。

**表 9.1 TBA 航空公司问题的数据**

| | 小型飞机 | 大型飞机 | 可获得的资金总额 |
|---|---|---|---|
| 每架飞机的年利润 | 100 万美元 | 500 万美元 | |
| 飞机的单位购价 | 500 万美元 | 5000 万美元 | 1 亿美元 |
| 最多购买数量 | 2 | 没有限制 | |

## TBA 航空公司问题的线性规划建模

首先,我们用线性规划为该问题建模。为了运用图解法,我们要写出代数形式的线性规划模型。

要作出的决策为:

$S$ = 购买小型机的数量
$L$ = 购买大型机的数量

对这些决策的约束是可获得的资金限制以及最多可购买的小型机的数量限制(此外,还有非负的限制)。模型的目标是要得到最大的年净利润。使用表 9.1 所提供的数据,以百万美元为单位,该问题的线性规划模型如下所示:

$$\text{最大化} \quad \text{利润} = S + 5L$$

约束条件

$$5S + 50L \leqslant 100$$
$$S \leqslant 2$$

且

$$S \geqslant 0 \qquad L \geqslant 0$$

使用图解法,图 9.1 显示了该模型的最优解:

$S = 2$: 购买两架小型机

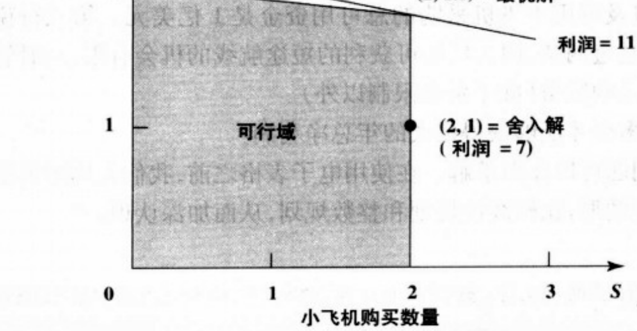



**图 9.1 运用图解法分析 TBA 航空公司问题的线性规划模型,得到最优解 $(S, L) = (2, 1.8)$,舍入解 $(2, 1)$ 作为可行的整数解**

$$L=1.8：\ 购买 1.8 架大型机$$

总净利润为 1100 万美元。

而实际上要购买 1.8 架的飞机是不可能的。因此，这一最优解并不能解决实际问题。我们所能做的只能是取小数的近似值，从而得到模型的舍入解：

$$S=2：\ 购买 2 架小型机$$
$$L=1：\ 购买 1 架大型机$$

> 将线性规划的最优解取整可能无法给出整数规划的最优解。

总利润为 700 万美元。但我们并不能保证舍入解就是模型的最优整数解（实际上，你将会看到它和最优解相差甚远）。

我们所要作的是在模型中添加限制条件，即这些决策变量只能取整数值，从而求解整数规划模型的最优解。这就是我们在强调了这个问题所违反的线性规划假设之后所将要做的。

## TBA 航空公司的问题违背了线性规划可分性假设

线性规划的基本假设之一如下：

**线性规划的可分性假设**（Divisibility Assumption of Linear Programming）：线性规划的决策变量可以是在满足一定的函数约束与非负约束下，包括分数在内的所有实数。因此，决策变量不一定是整数。决策变量代表的是活动的水平，而活动水平也允许是分数形式的。如果实际的问题要求决策变量必须是整数，就不再符合线性规划的可分性假设，因而就必须用整数规划代替线性规划来求解问题。

对于 TBA 航空公司的问题，其中的活动是购买各种类型的飞机，活动的水平是购买飞机的数量。因为飞机只能以整数为单位购买，所以该问题不符合线性规划的可分性假设。

在一些应用中，尽管情况并不符合线性规划的可分性假设，但是线性规划还是可以作为问题的合理近似。例如，如果决策变量的数值很大，模型不可避免的存在一些误差，即使稍微地违背可分性假设也不会对最终结果造成很大的影响。在这种情况下，最好的方法是取最优解的舍入值，如，决策变量 $L=101.8$，只需要将其四舍五入，即取 $L=102$。

但是，TBA 航空公司的例子就另当别论了。如果将其中的 $L=1.8$ 舍入取 $L=2$，需要增加 1000 万美元的购买资金，超过了公司的资金预算额，这是 TBA 公司管理层所不能接受的。因此，我们现在放弃线性规划转而介绍如何用整数规划来解决这一问题。

## TBA 航空公司问题的整数规划建模

整数规划的建模过程与线性规划几乎是完全一样的，除了一个关键的区别——在约束中加入整数约束，将决策变量限制在整数范围内。该问题的整数规划数学模型如下所示：

$$\text{最大化}\quad \text{利润}=S+5L$$

约束条件

$$5S+50L\leqslant 100$$
$$S\leqslant 2$$

且

$$S\geqslant 0\qquad L\geqslant 0$$
$$S,L\ \text{均为整数}$$

原线性规划模型，不包括上面的最后一行，称为整数规划问题的 LP 放宽（LP Relaxa-

tion)。图 9.1 中的可行域是图 9.2 中的阴影部分。

但是,在整数规划中的可行解必须为整数解,即图 9.2 中阴影内的黑点,(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(1,1),(2,1)和(0,2)。最优解,即七个可行解中的最优解,可用下面的方法方便地求得。

这种图解方法除了最后一个步骤外与线性规划方法相同。

**整数规划的图解法**(Graphical Method for Integer Programming):当整数规划问题中只含有两个决策变量时,其最优解可通过应用 2.5 节中的图解法求得,只需在原方法的最后一部分作些改动。因此,与前面一样,首先作出 LP 放宽的可行域,确定目标函数的斜率,而后以该斜率在可行域内平移直线,增大目标函数值。但是,与线性规划不同的一点是,直线平移到可行域内的最后一个整数解即停下来,而不是平移到可行域的边缘。最后平移到的整数解即为最优整数解。

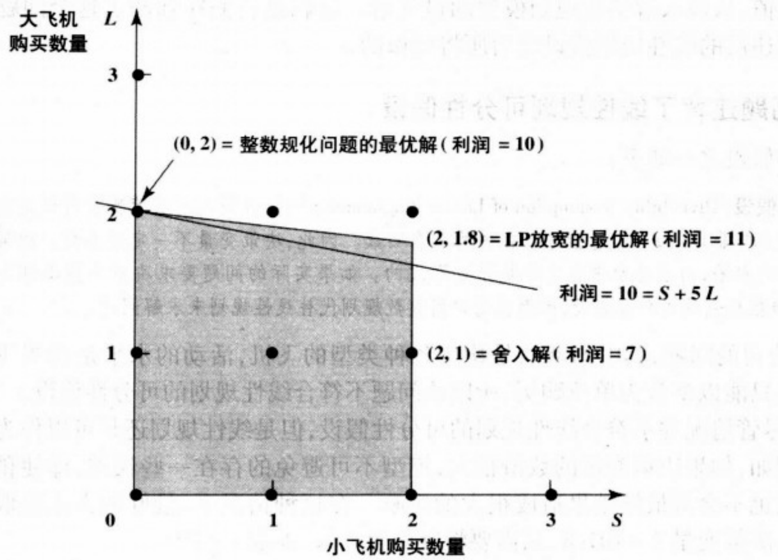



图 9.2 运用图解法分析 TBA 航空公司问题的线性规划模型,得到最优解 $(S,L)=(0,2)$

图 9.2 显示了用图解法求解 TBA 航空公司问题的结果。目标函数直线经过原点(0,0)时,总利润为 0。目标函数直线经过(1,0),(2,0),(0,1),(1,1)和(2,1)时,目标函数值分别为 1,2,5,6 和 7。目标函数线在最后一个可行的整数解(0,2)时,利润增加到 10。因此,最优解为:

$$S=0: \quad \text{不购买小型飞机}$$
$$L=2: \quad \text{购买两架大型机}$$

每年总利润为 1000 万美元。

看一下图 9.2 就可以知道这一最优解与原先线性规划的最优解相差甚远,并不能直接将原先的最优解四舍五入,或者在图 9.2 中将目标函数线移到距原先解最近的四个点上来获得最优的整数解。因此,在求解整数规划问题的最优解时,先求相应的 LP 放宽的最优解是没有多少帮助的。

该例子另一个显著的特征是图 9.2 的舍入解与整数规划的最优解对应的总利润相差很多,最优整数解产生的总利润为 1000 万美元,而舍入解只能带来 700 万美元的总利润。因此,不能依赖舍入解来求得最优解,或者甚至是一个好的可行整数解。在实际应用时,如果许多决策变量都是分数,就很难确定如何舍入所得分数解以获得可行的整数解。为了求得整数规划问题的最优解,必须使用另一种专门设计的方法。现在我们就来介绍这种方法。

## 整数规划问题的电子表格建模与求解

整数规划的电子表格建模过程也是几乎与线性规划完全一样，只不过在最后一步做一些小小的补充。在 Solver 的对话框内规定约束条件时，必须加入一条，要求决策变量(可变单元格)为整数。

> **Excel 窍门：**
> 将某一范围内的可变单元格取值限制为整数，可以选择左边"添加约束"对话框，然后从弹出式菜单中选择"int"。点击"OK"，然后在"Solver"对话框中输入约束：这些单元格 = integer。

图 9.3 显示了如何用电子表格求解 TBA 航空公司问题。除了 Solver 对话框内第三行有些改动之外，该电子表格与线性规划的电子表格模型完全相同。可变单元格必须为整数的约束添加在了"添加约束(Add Constraint)"对话框中。在左边的弹出式菜单中选择单元格(C12:D12)，在中间选择"int"①。

点击"Solve"按钮，图 9.3 的可变单元格显示了最优解$(S,L)=(0,2)$

整数规划求解的运算法则(包含在 Excel Solver 中)不如线性规划的单纯形法高效，这就是为什么当舍入解被认为是合理的近似时，用线性规划的舍入解作为整数规划的近似解，并认为舍入解是合理的。但是，根据问题的困难程度，应用 Excel Solver 或 Premium Solver 可以求解很复杂的整数规划，规划中的决策变量可多达上百个。

现在最好的商业软件(不使用电子表格)可求解包括几千个变量的大型整数规划问题，这一方面的研究还有待于发展和深入。

## 整数规划问题的类型

TBA 航空公司问题中所有的决策变量均为整数，而在其他的一些应用中，可能只有一部分决策变量要求为整数。

**纯整数规划问题**(Pure integer programming)指的是所有的决策变量均为整数的线性规划规划问题，而**混合整数规划问题**(Mixed integer programming)中只有部分决策变量要求为整数(整数变量)，而可分性假设对其余变量是适用的(连续变量)。

> **Excel 窍门：**
> 在"Solver Option"中，"Tolerance"的设置(缺省值是 5%)导致"Solver"在求解一个整数规划问题时，在它找到一个可行解，其目标函数值是在最优解的公差范围内，求解过程就会停止。这有助于加快大型问题的求解过程。对于较小的问题来说(例如作业中的问题)，Tolerance 应当设置为 0 以保证获得最优解。

此外，许多的整数规划问题(包括纯整数规划和混合整数规划)将解的整数值限定为 0 或 1。

**0-1 变量**(Binary variable)是指只能取 0 或 1 的变量，**0-1 整数规划**(Binary integer programming)指那些要求整数的决策变量只能在 0 或 1 两个值中取值的问题(以后我们使用缩写 BIP 表示 0-1 整数规划)。这类问题也可以依据是否所有的决策变量均为 0-1 变量而划分为纯 0-1 整数规划问题和混合 0-1 整数规划问题。

[含有不受取值为 0 或 1 限制的整数规划问题称为一般整数规划(general integer programming)问题，以区别于 BIP 问题。而整数规划(integer programming)

① 大多数的 Excel 版本中，在从弹出式菜单选择了"int"后，Solver 会自动地在"Add Constraint"对话框的右侧写入"integer"。一些 Excel 版本有一个缺陷(例如多数的 Macintosh 版本)。它会在"Add Constraint"对话框右侧留下空白，然后如果你点击"OK"，就会给出一个错误信息。点击"OK"前在由此输入"integer"。这是对这个缺陷的补救。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | TBA Airlines Airplane Purchasing Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Small Airplane | Large Airplane | | | |
| 4 | | Unit Profit ($millions) | 1 | 5 | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | Capital | | Capital |
| 7 | | | Capital per Unit Produced | | Spent | | Available |
| 8 | | Capital ($millions) | 5 | 50 | 100 | ≤ | 100 |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | Total Profit |
| 11 | | | Small Airplane | Large Airplane | | | ($millions) |
| 12 | | Units Produced | 0 | 2 | | | 10 |
| 13 | | | ≤ | | | | |
| 14 | | Maximum Small Airplanes | 2 | | | | |

| | E |
|---|---|
| 6 | Capital |
| 7 | Spent |
| 8 | = SUMPRODUCT(CapitalPerUnitProduced,UnitsProduced) |




| | G |
|---|---|
| 10 | Total Profit |
| 11 | ($millions) |
| 12 | = SUMPRODUCT(UnitProfit,UnitsProduced) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| CapitalAvailable | G8 |
| CapitalPerUnitProduced | C8:D8 |
| CapitalSpent | E8 |
| MaxSmallAirplanes | C14 |
| SmallAirplanes | C12 |
| TotalProfit | G12 |
| UnitProfit | C4:D4 |
| UnitsProduced | C12:D12 |

图 9.3 TBA 航空公司整数规划电子表格模型，其中的可变单元(C7:D7)给出了最优的飞机购买量，而目标单元格(E6)显示了以百万美元计的年总利润。

包含一般整数规划和 BIP。]

BIP 问题的求解比含有相同数量整数变量的一般整数规划问题容易，但是也要比相同规模的线性规划问题困难得多。CD-ROM 上本章的阅读材料（关于求解 0-1 整数规划问题的一些观点）讨论了一些求解大型 BIP 问题的困难和缺陷。一个缺陷被重点指出，简单地对 LP 放宽的最优解进行舍入是求解 BIP 问题的一个特别危险的捷径。

0-1 变量只能在 0 或 1 间取值，因此很适用于是非决策（yes-or-no decisions）。在这类决策中，决策者只能在是或不是两者之间作出选择，于是可以将 0-1 决策变量赋值为 1 表示选择是，用 0 表示否。下面是一些是非决策的例子。

1. 是否应该开展某一特定的项目？
2. 是否应该做某一项固定投资？
3. 是否应该将设备放置在某一特定地点上？

应用 BIP 处理这些决策非常重要,我们将使用本章剩余的篇幅讨论这个主题。我们先从案例研究开始。

**问题回顾**

1. 为什么一些决策变量必须为整数?
2. 整数规划问题与线性规划问题有怎样的区别?
3. 线性规划的可分性假设是什么?
4. 整数规划的 LP 放宽指的是什么?
5. 整数规划的图解法与线性规划的图解法有何区别?
6. 整数规划的最优解是否总是能够通过将 LP 放宽的最优解四舍五入而求得?
7. 纯整数规划与混合整数规划有何区别?
8. 0-1 整数规划是什么含义,这类问题是如何产生的?

## 9.2　案例分析:加利福尼亚制造公司的例子

“史蒂夫,我们现在的形势是这样的,随着业务的发展,我们必须建立一个新厂,甚至可能需要两个。新厂必须靠近密集的技术工人地区,因此我们认为洛杉矶和旧金山是两个较合适的地点。此外,我们还考虑建一个仓库,就建一个,如果仓库与工厂设在同一地点的话,就可以节省运输费用。所以是选择洛杉矶还是旧金山呢? 但是,如果不准备设立新厂的话,也就不需要建任何的仓库,情况就是这样。”

“是的,阿蒙德,我明白了,”史蒂夫·陈回答说,“但是,你作这些决策的标准是什么呢?”

“哦,管理高层的所有成员与我一起讨论了这个问题,”阿蒙德·奥尔特加说,“我们一致同意,在不考虑财务方面因素时,这两个地点是不相上下的。因此,我们认为应该在财务分析的基础上作出决策。这次扩张可使用的资金总量为 1000 万美元,我们希望能通过这一投资取得最多的收益,因此,如何在新厂和库存间分配资金,以及将新厂建在何处,才能给公司带来最大的长期效益,这是要分析决策的问题。以你们的话说,就是要使投资的净现值最大化。”

“是的,这听起来是一个典型的管理科学问题。”

“这就是我叫你进来的原因,史蒂夫。我希望你立即组织一个管理科学方面的研究,确定最能获利的投资组合。我也希望你能够关注可以使用的资金数量和它对我们能够从这些投资中获得多少利润的影响。1000 万美元只是一个暂定的数量。这么多资金会让我们很紧张,因为我们现正在投资其他的一些项目。这些项目需要大量的资金。因此我们倾向于在这个特殊的投资项目上的花费要少于 1000 万美元。前提是最后的几百万不会让我们损失很多。另一方面,无论是向洛杉矶还是旧金山,或者同时向这两个关键城市扩张,都是我们放在首位的工作。它对公司的未来的确有正面的影响,因此我们愿意放手干一把。如果资金上出现许多障碍,我们会筹集更多的资金。因此我们希望你做一些试算分析,告诉我们如果在 500 万美元和 1500 万美元之间改变资金的数量会有什么影响。”

“当然,阿蒙德,我们一直都在做那样的试算分析。我们称之为敏感性分析,因为它涉及到检查结果对可用资金数量有多大的敏感性。”

“好的。现在,史蒂夫,我需要你在两个星期内拿出结果。你能做到吗?”

"可以,阿蒙德,和往常一样,问题之一是我们能否尽快地搜集到所有所需的数据。我们要得到每一种可能的投资组合净现值的良好估计。我需要很多的帮助来得到那些信息。"

"我已经料到你会这么说。我已经让我的下属努力获得这些估计值。我能在今天下午把它们一起给你。"

"太好了。我立即开始工作。"

作为加利福尼亚制造工作的总裁,阿蒙德·奥尔特加在过去已经和史蒂夫·陈,公司最好的管理科学家,有过多次类似的谈话。阿蒙德坚信史蒂夫会再次帮他解决这个问题。

## 背 景

加利福尼亚制造公司是在整个加利福尼亚地区拥有多个工厂和仓库的多元化的公司。但是在洛杉矶和旧金山还没有运作设施。随着公司销量和收入的不断增加,管理层认为向其中的一个或两个地区扩张的时机已经成熟。首要的问题是在洛杉矶还是旧金山,或者在两个城市都建立工厂。管理层也在考虑建立至少一个新的仓库,但是仓库地点限制在新建工厂的城市。

**表 9.2 加利福尼亚制造公司问题的数据**

| 决策序列号 | 是非问题 | 决策变量 | 净现值(百万美元) | 所需资金(百万美元) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 在洛杉矶建工厂? | $x_1$ | 8 | 6 |
| 2 | 在旧金山建工厂? | $x_2$ | 5 | 3 |
| 3 | 在洛杉矶建仓库? | $x_3$ | 6 | 5 |
| 4 | 在旧金山建仓库? | $x_4$ | 4 | 2 |
| | | | | 可用资金:1000 万美元 |

**表 9.3 加利福尼亚制造公司问题的 0-1 决策变量**

| 决策序列号 | 决策变量 | 可能的取值 | 取 1 的含义 | 取 0 的含义 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_1$ | 0 或 1 | 在洛杉矶建厂 | 不在洛杉矶建厂 |
| 2 | $x_2$ | 0 或 1 | 在旧金山建厂 | 不在旧金山建厂 |
| 3 | $x_3$ | 0 或 1 | 在洛杉矶建仓库 | 不在洛杉矶建仓库 |
| 4 | $x_4$ | 0 或 1 | 在旧金山建仓库 | 不在旧金山建仓库 |

需要作出的决策列在表 9.2 第二列的是非问题中。对于每一种情况,如果回答是"是",则对应作出在相应地点(洛杉矶或旧金山)建设相应设施(工厂或仓库)的投资决策。投资所需要的资金在最右边的一列中列出。管理层已经暂定所有投资可以使用的总资金额为 1000 万美元(注意这些资金对于一些投资组合来说是不够的)。第四类显示了如果进行相应投资可以得到的期望净现值(考虑货币时间价值的净长期利润)。史蒂夫·陈的大量管理科学研究工作(以及来自总裁工作人员的大量帮助)已经用于找到这些净现值的期望。正如公司总裁阿蒙德·奥尔特加所说的,现在的目标是找到能够使得总净现值最大的可行的投资组合。

## 引入是非决策的 0-1 决策变量

表 9.2 第二列已经总结出管理层面临的问题是作出四个相关的是非决策。为了建立这个问题的数学模型。史蒂夫·陈需要为每一个决策引入决策变量。由于每一个决策只有两

种选择，是或者否，相应的决策变量也只需要有两个值(一个值对应一种选择)。因此史蒂夫使用0－1变量。它只有0和1两个可能的取值，1表示对于这个决策选择"是"，0表示选择"否"。

这些决策变量列在表9.3的第二列中。最后两列分别给出了1和0对应的含义。

## 处理这些决策之间的内在联系

请记住管理层最多只想建立一个仓库。如果使用相应的决策变量 $x_3$ 和 $x_4$ 来表达，这表示至多只有一个变量可以取值为1。因此，作为该问题数学模型的一部分，这些变量必须满足约束：

$$x_3 + x_4 \leqslant 1$$

> 对于一组互斥方案，只有一个相应的0－1决策变量可以取值为1。

这两个方案(在洛杉矶建仓库或在旧金山建仓库)被称为互斥方案(mutually exclusive alternatives)，因为选择一个方案就不会再选择另一个。一组中含有两个或多个互斥方案在BIP问题中很常见。对于每一组来说，至多只能选择一个方案。相应0－1决策变量的约束如上式所示。也就是这些变量的和必须小于等于1。对于一些互斥方案组，管理层必须去除掉不选择方案的可能性。在这种情况下，该约束将被设置为相应0－1决策变量的和等于1。

加利福尼亚制造公司的问题还含有另一种重要类型的约束。管理层希望仓库建在特定的城市。只有工厂建在那个城市，那里才可以建仓库。以洛杉矶(LA)为例：

> 如果选择"否"，不在洛杉矶建厂(也就是如果选择 $x_1=0$)，那么不能在洛杉矶建仓库(也就是必须选择 $x_3=0$)。
>
> 如果选择"是"，在洛杉矶建厂(也就是如果选择 $x_1=1$)，那么可以在洛杉矶建仓库，也可以不建(也就是可以选择 $x_3=1$ 或 0)。

如何将这些洛杉矶建工厂和仓库决策的联系用数学模型的方式表示为约束？关键在于无论 $x_1$ 取何值，$x_3$ 可能的取值都小于或等于 $x_1$。由于 $x_1$ 和 $x_3$ 都是0－1变量，因此约束

$$x_3 \leqslant x_1$$

使得在确定 $x_1$ 的值后 $x_3$ 的取值能够满足要求。

同样道理，对于旧金山也有相应的约束：

$$x_4 \leqslant x_2$$

和洛杉矶一样，如果不在旧金山建厂($x_2=0$)，旧金山就不会有仓库($x_4=0$)。如果在那里建厂($x_2=1$)，就需要作出建仓库的决策($x_4=1$ 或 0)。

> 如果一个是非决策当且仅当另一个是非决策选择"是"时才能够选择"是"，那么这个是非决策相依于另一个是非决策。

对于任何一个城市，仓库决策被称为相依决策(Contingent decision)，因为该决策取决于一个优先的决策，是否在那里建工厂。一般来说，如果一个是非决策当且仅当另一个是非决策选择"是"时才能够选择"是"，那么这个是非决策相依于另一个是非决策。如上所述，表示这种关系的约束的数学表达式要求前者决策的0－1变量必须小于等于后者决策的0－1变量的值。

表9.2最右边一列显示了四个决策之间另一个联系也就是所考虑的四个设施所花费的资金不超过可用资金(1000万美元)。因此，

模型需要包含一个约束：

$$花费资金 \leqslant 1000\ 万美元$$

所花费的资金如何用四个 0－1 决策变量表达？我们从第一个是非决策（是否在洛杉矶建工厂？）开始。将表 9.2 最右边一列和表 9.3 第一列的信息综合起来：

$$洛杉矶工厂花费资金 = \begin{cases} 600\ 万美元 & 如果\ x_1 = 1 \\ 0 & 如果\ x_1 = 0 \end{cases}$$
$$= 600\ 万美元乘以\ x_1$$

同理，其他三个投资机会花费的资金（单位：百万美元）分别为 $3x_2$，$5x_3$ 和 $2x_4$。于是得到：

$$花费资金 = 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4（百万美元）$$

因此，约束变为：

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leqslant 10$$

## BIP 模型

在阿蒙德·奥尔特加和史蒂夫·陈的对话中提到过，管理层的目标是找到能够使得这些投资总净现值最大的可行的投资组合。因此目标函数的值应当是

$$NPV = 总净现值$$

如果投资决策是建立一个特定的设施（因此相应的决策变量被赋值为 1），该决策的期望净现值在表 9.2 第四列中给出。如果决定不投资（决策变量等于 0），净现值就是 0。因此，使用百万美元为单位，

$$NPV = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

就是要输入目标单元需要被最大化的量。

结合上一节作出的约束，完成的 BIP 模型如图 9.4 所示。这个形式基本上与线性规划相同。一个关键的不同在于使用"Solver"对话框上。每一个决策变量（单元格 C18:D18 和 C16:D16）都被限制为 0－1 变量。完成这项设置，可以在"Add Constraint"对话框中左边的弹出式菜单中选择变量单元格的区域，然后从弹出式菜单中选择"bin"[注意，一些早期版本的 Excel 不含有"bin"这个选项。在这些版本中，0－1 变量可以这样定义：限制变量的取值为整数（选择"int"），然后再添加两个约束，每一个这样的变量必须大于等于 0 并且小于等于 1]。"Solver"对话框显示的其他约束（见图 9.4 左下角）通过使用图中右下角给出的区域名称而显得非常直观。为了方便起见，写入输出单元格 E12 和 D20 的方程使用包含 C17:D17 以及 C11:D11 或 C5:D5 的 SUMPRODUCT 函数，因为这些行中的空格或"≤"都将被"Solver"解析为 0。

Excel Solver 在电子表格的 C18:D18 和 C16:D16 中给出了最优解，也就是在洛杉矶和旧金山都建工厂，但是不建仓库。目标单元格（D20）表明建设这两个工厂总净现值的期望为 1300 万美元。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | California Manufacturing Co. Facility Location Problem | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | NPV ($millions) | LA | SF | | | |
| 4 | | Warehouse | 6 | 4 | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | Factory | 8 | 5 | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | | Capital Required | | | | | |
| 9 | | ($millions) | LA | SF | | | |
| 10 | | Warehouse | 5 | 2 | Capital | | Capital |
| 11 | | | | | Spent | | Available |
| 12 | | Factory | 6 | 3 | 9 | ≤ | 10 |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | | | | | Total | | Maximum |
| 15 | | Build? | LA | SF | Warehouses | | Warehouses |
| 16 | | Warehouse | 0 | 0 | 0 | ≤ | 1 |
| 17 | | | ≤ | ≤ | | | |
| 18 | | Factory | 1 | 1 | | | |
| 19 | | | | | | | |
| 20 | | Total NPV ($millions) | | $13 | | | |




| | E |
|---|---|
| 10 | Capital |
| 11 | Spent |
| 12 | = SUMPRODUCT(CapitalRequired,Build?) |
| 13 | |
| 14 | Total |
| 15 | Warehouses |
| 16 | = SUM(BuildWarehouse?) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Build? | C16:D18 |
| BuildWarehouse? | C16:D16 |
| BuildFactory? | C18:D18 |
| CapitalAvailable | G12 |
| CapitalRequired | C10:D12 |
| CapitalSpent | E12 |
| MaxWarehouses | G16 |
| NPV | C4:D6 |
| TotalNPV | D20 |
| TotalWarehouses | E16 |

| | C | D |
|---|---|---|
| 20 | Total NPV ($millions) | =SUMPRODUCT(NPV,Build?) |

图 9.4 加利福尼亚制造公司案例研究 BIP 模型的电子表格形式。通过使用 Excel Solver，可变单元格 BuildFactory?（C18：D18）和 BuildWarehouse?（C16：D16）给出了最优解。

## 展开敏感性分析

现在史蒂夫 · 陈已经使用 BIP 模型决定了当可用的资金是 1000 万美元时，应该采取的决策。下一个任务是对这个数量进行敏感性分析。阿蒙德 · 奥尔特加希望他确定资金数量

在 500 万美元和 1500 万美元之间变化的情况下对决策的影响。

Excel 敏感性分析报告对于整数规划问题不适用。

在第 5 章我们描述了在约束有一些变化的情况下使用电子表格进行线性规划敏感性分析的三种不同方法：在电子表格上使用试算法、使用“Solver Table”或使用 Excel 敏感性分析报告。前两种方法可以和在线性规划问题中一样应用于整数规划问题。但是第三种方法不行。敏感性分析报告不能用在整数规划问题中（选择它会产生错误信息）。这是因为影子价格和可行域在这里不再适用。与线性规划不同，当右边的约束变化时，整数规划的目标函数值不会以预期的方式变化。

试算法和/或 Solver Table 能够用于整数规划问题的敏感性分析。见5.3 节对使用 Solver Table 更详细的介绍。

使用试算法确定改变可用资金的影响是很直接的。简单地在 CapitalAvailable 单元格（G12）中试着使用不同的值，然后在 Solver 中点击“Solve”。但是进行这个分析的一个更加系统化的方法是使用你的 MS 课件中的一个 Excel 插件，成为“Solver Table”。Solver Table 处理整数规划模型的方式与线性规划模型相同（5.3 节中使用 Solver Table 系统地进行敏感性分析中有介绍）。

在扩展了原始电子表格（图 9.4）以得到更多的空间后，图 9.5 使用 Solver Table 经过以下几个步骤产生了敏感性分析的结果。在表格的第一行，输入指向所有可变单元格或输出单元格的公式。在这个案例中，它们是所有的可变单元格（C16，D16，C18，D18）和目标单元格，TotalNPV（D20）。CapitalAvailable（G12）的测试数据输入了表格的第一行（B26：B36）。然后选择整张表（B25：G36），并从工具菜单中选择“Solver Table”。Column input cell 我们选择 G12（数据单元格 CapitalAvailable），因为这是从表格的第一列发生变化的数据单元格。点击“OK”，然后让 Solver Table使用第一列中 CapitalAvailable（G12）所有测试值重新求解这个问题，并在表的另一列中写入相应的结果。

敏感性分析也可以使用其他数据单元格——NPV（C4：D6），CapitalRequired（C10：D12）和 MaxWarehouses（G16）——用 Solver Table 以相同的方式来进行（或在电子表格上使用试算法）。由于每一种投资组合的净现值期望已经通过很仔细的工作得到了，而且在其他数据单元各种输入的数值没有任何不确定性，因此史蒂夫·陈认为不需要再做更多的敏感性分析。

## 管理结论

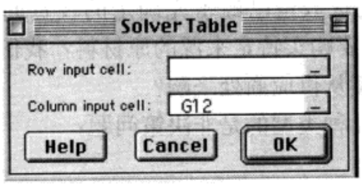
史蒂夫·陈的报告在两个星期的期限之内交到了阿蒙德的手中。这个报告提供了如果管理层决定按照其暂定的决定为这些投资提供 1000 万美元资金的情况下如图 9.4 所示的计划（在洛杉矶和旧金山都建工厂但是不建仓库）。这个计划的一个优点是它只是用了 900 万美元，为目前其他正在投资的项目提供了 100 万美元。这个报告也通过两点强调了表 9.5 所示的结果。一点是如果可用资金的数量下降到 900 万美元以下，公司会遭受重大损失（总净现值将从 1300 万美元降低到 900 万美元）。另一点是增加 100 万美元的可用资金（从 1000 万美元上升到 1100 万美元）将会带来总净现值高达 400 万美元的增长（从 1300 万美元增长到 1700 万美元）。但是进一步增加可用资金的数量（从 1100 万美元增加到 1200 万美元），总净现值的增加幅度会显著变小（从 1700 万美元增长到 1900 万美元）。

阿蒙德与其他高层管理人员在决策前进行了讨论。很快他们就得出结论：将可用资金的数量增加到 1400 万美元将会使公司的资金来源陷入危险的境地，或获得的收益也不多。

| | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | Capital Available | Warehouse | Warehouse | Factory | Factory | Total NPV | |
| 24 | ($millions) | in LA? | in SF? | in LA? | in SF? | ($millions) | |
| 25 | | 0 | 0 | 1 | 1 | 13 | |
| 26 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 9 | |
| 27 | 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 9 | |
| 28 | 7 | 0 | 1 | 0 | 1 | 9 | |
| 29 | 8 | 0 | 1 | 0 | 1 | 9 | |
| 30 | 9 | 0 | 0 | 1 | 1 | 13 | |
| 31 | 10 | 0 | 0 | 1 | 1 | 13 | |
| 32 | 11 | 0 | 1 | 1 | 1 | 17 | |
| 33 | 12 | 0 | 1 | 1 | 1 | 17 | |
| 34 | 13 | 0 | 1 | 1 | 1 | 17 | |
| 35 | 14 | 1 | 0 | 1 | 1 | 19 | |
| 36 | 15 | 1 | 0 | 1 | 1 | 19 | |

Select the entire table (B25:G36), before choosing Solver Table from the Tools menu.

| | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | Capital Available | Warehouse | Warehouse | Factory | Factory | Total NPV |
| 24 | ($millions) | in LA? | in SF? | in LA? | in SF? | ($millions) |
| 25 | | =C16 | =D16 | =C18 | =D18 | =TotalNPV |




| Range Name | Cell |
|---|---|
| TotalNPV | D20 |

**图 9.5** Solver Table 的使用显示了系统地改变这些投资的可用资金数量对最优解和得到的净现值的影响。

讨论主要集中在使用 900 万美元还是 1100 万美元的利弊上。由于后者可以带来大量的收益（增加总净现值 400 万美元），管理层最后决定采用图 9.5 第 32 行的计划。这样，公司将在洛杉矶和旧金山都建立工厂，并在旧金山建仓库，从而获得期望总净现值 1700 万美元。不过由于这项计划需要大量的资金，管理层也决定在两个工厂完工后再建设仓库，使得工厂获得的利润可以支持建设仓库所需的资金。

## 问题回顾

1. 加利福尼亚制造公司需要作出的四个相关决策是什么？
2. 为什么 0-1 决策变量可以用来代表这些决策？
3. 管理层就这个问题制定的目标是什么？
4. 这个问题中的互斥方案是什么？在 BIP 模型的约束中采用什么形式的模型来表示？
5. 在这个问题中有哪些相依决策？在 BIP 模型的约束中采用什么形式的模型来表示？
6. 需要用敏感性分析来检验的暂定管理决策是什么？

## 9.3 其他一些应用

与加利福尼亚制造公司案例一样，管理人员经常要面对是非决策。因此，0－1 整数规划(BIP)广泛应用于帮助管理人员作出这些决策。

我们现在要介绍各种各样的是非决策。我们也会提到一些应用 0－1 整数规划进行决策的实例。

这些应用在 Interface 上都有全面地介绍。如果你希望进一步了情况，在每一个案例中我们都会提供刊登该文章的刊号。大部分文章也可以从互联网上下载。读者可以登录 www. mhhe. com/hillier2e/articles。

### 投资分析

4.2 节梦大公司投资于商业房地产项目的例子展示了如何使用线性规划作出在各个项目上投资多少的资金预算决策。但是，正如加利福尼亚制造公司案例分析所体现的，一些资金预算决策并不涉及到投资多少，而是是否投资一定数量的资金。这个案例中的四个决策是是否投资一定数量的资金，用于在特定的地点(洛杉矶或旧金山)建设特定的设施(工厂或仓库)。

管理层经常面临是否要进行定额投资的问题(投资数量已经事先确定的投资问题)。我们是否需要购买另一个公司的子公司？我们是否需要购买特定来源的原材料？我们是否需要增加一条生产线自己生产特定的部件，而不是继续从供应商处采购？

总的来说，关于定额投资的资金预算决策是以下几种类型的是非决策问题：

对于每一个是非决策：

我们是否应当作出一个定额投资？

$$\text{决策变量} = \begin{cases} 1, & \text{是} \\ 0, & \text{否} \end{cases}$$

1990 年 7～8 月号的 Interface 介绍了 Turkish Petroleum Refineries 公司使用 BIP 分析将数千万美元资金投资于扩大炼油能力和节约能源上。

一个与之不大相同，但是仍然属于这个大类的例子刊登于 Interface1997 年 1～2 月号。这个大型的管理科学研究项目的目的是使得南非军队最高管理层能够以比较小的开支提升南非国防力量的效能。在这个项目中所考虑的“投资”是形成特定类型军事能力需要花费的获取成本和维持费用。一个混合 BIP 模型被用于在满足预算约束的条件下选在能够使得国防力量总体效能最大的特殊能力。这个模型包含超过 16000 个变量(其中有 256 个 0－1 变量)和超过 500 个函数约束。最后获得的国防力量最佳规模和组成方案每年节约了超过 11 亿美元的花费，并带来了其他非货币利益。这项研究带来的效果使得它获得了 1996 年管理科学弗兰茨・厄德曼奖一等奖。

Interface1999 年 1～2 月号介绍了另一个用混合 BIP 模型进行投资分析的获奖应用。这个特殊的模型为投资公司 Grantham, Mayo, Van Otterloo and Company 用于管理价值超过 80 亿美元的资产组合。在每一种情况下，一个投资组合以接近目标组合的方式(以行业和安全性为标准)进行构建，但是含有少得多且更加容易管理的不同股票。关系到一支特定的股票是否应当包含在投资组合中的每一个是非决策都用一个 0－1 变量表示，股票的数量

用离散连续变量表示。在现有的投资组合给定的情况下，要对其进行重新调整以得到最优组合方式，一种明智的做法是通过将为获得最终投资组合所进行的交易次数减少到最低程度来减少交易费用，因此 0－1 变量也用于表示是否改变单个股票持有量的是非决策。在模型中考虑这个问题使得每年投资的交易成本下降了至少 400 万美元。

## 选　址

在这个全球化的经济环境中，许多公司在世界的各个地方开设新厂以获得低廉的劳动力成本以及其他优势。在为一个新的工厂选址前，许多潜在的地点需要进行分析和比较（在加利福尼亚制造公司案例分析中只有为两种设施提供的两个潜在地点）。每一个潜在的地点涉及如下类型是非决策：

对于每一个是非决策：

是否一个特定的地点可以被选作新设施的坐落地？

$$决策变量 = \begin{cases} 1, & 是 \\ 0, & 否 \end{cases}$$

在很多情况下，其目标是选择一个在满足产出需求的情况下使得新设施总成本最小的地点。

正如 1990 年 1～2 月号的 Interface 所介绍的，AT&T 公司使用 BIP 模型帮助大量客户选择他们的电话销售中心。这个模型在提供满意的中心覆盖水平的前提下使得人力、通讯和房产成本最小。在一年中（1988 年），通过这种途径，46 家 AT&T 的客户快速而又可靠地做出了他们的选址是非决策，同时为 AT&T 带来了每年 3.75 亿美元的网络服务和 3100 万美元的设备销售。

接下来，我们介绍一种对于许多公司的选址决策来说扮演了关键角色的一种重要类型的问题。

## 设计一个制造和分销网络

当今的制造商面临着巨大的竞争压力。它们必须在降低生产和配送成本的同时将其产品以更快的速度推向市场。因此任何在广大地理区域（甚至全球范围内）分销产品的企业必须关注其制造和分销网络的设计。

这项设计包含以下几种类型的是非决策：

是否应当维持特定工厂的运营？

是否应当选择特定的地点开设新的工厂？

是否应当维持特定配送中心的运营？

是否应当选择特定的地点开设新的配送中心？

如果每一个市场区域都由一个配送中心供给，那么对于每一个市场区域和配送中心的组合，我们就将有另一种类型的是非决策：

是否应当指定一个特定的配送中心服务一个特定的市场区域？

对于这些类型的每一个是非决策：

$$决策变量 = \begin{cases} 1, & 是 \\ 0, & 否 \end{cases}$$

Ault Foods Limited(Interface 1994 年 7 ~8 月号)通过这种途径设计了它的制造和分销中心。管理人员考虑了 10 个工厂地点、13 个配送中心地点和 48 个市场区。这项 BIP 的应用由于为公司每年节约了 20 万美元而获奖。

Digital Equipment Corporation(Interface 1995 年 1 ~2 月号)介绍了这种类型应用的另一个例子。在那时,这个大型的跨国企业为 25 万客户网站提供服务。其 140 亿美元的年收入中,超过一半来自于美国以外的 81 个国家。因此,这项应用涉及到重建公司整个的全球供应链,包括全球的供应商、工厂、配送中心、潜在地点和市场区域。这项重构每年为公司节约了 5 亿美元的制造费用、3 亿美元的物流成本,并减少了 4 亿美元的金融资产需求。

## 货物配送

在制造和配送网络设计出来投入运营后,就需要作出关于如何运输货物的日常运营决策。其中一些也是是非决策。

例如,假设用卡车运输货物,每一辆卡车在每一次行程中一般向几个客户交付货物。因此这就需要为每一辆卡车选择一条路线(客户交付的顺序),每一条备选路线都产生了以下的是非决策问题:

是非决策可以用于同时选择方案的组合。

是否应当为一辆卡车选择特定路线?

$$决策变量 = \begin{cases} 1, & 是 \\ 0, & 否 \end{cases}$$

其目标是选择出能够使得交付所有货物的总成本最小的路线。

各种复杂的情况可以考虑在内。例如如果卡车规格不同,每一种选择都将包含特定的路线和特定的卡车规格。同样,如果时间安排是一个重要的问题,那么出发时间也可以作为是非决策的一部分。在考虑了所有的因素后,每一个是非决策会有如下所示的形式:

一次货物交付出车应当同时考虑如下所有因素:

1. 特定的路线?
2. 特定的卡车规格?
3. 特定的出发时间?

有一些企业使用 BIP 帮助做出这些类型的决策。一家总部设于密执安州的零售连锁企业,Quality Store(Interface 1987 年 3 ~4 月号)使用这种方法为其送货车辆做出路线选择决策,从而每年节约了大约 45 万美元。Air Products and Chemicals, Inc. (Interface 1983 年 12 月号)使用这种方法制定日交付计划,每年节约了大约 200 万美元。Reynolds Metals Co. (Interface 1991 年 1 ~2 月号)使用部分基于 BIP 的自动配送系统管理超过 200 家工厂、仓库和供应商之间的货物运输,每年节约了超过 700 万美元。Sears, Roebuck and Company(Interface 1999 年 1 ~2 月号)通过使用 BIP 的扩展模型安排货物交付和家政服务队伍,每年节约 4200 万美元。

## 相关活动的排程

我们都会在日常生活中安排一些相关的活动,例如为各种各样的家庭作业排出日程。管理人员也必须安排各种各样相关活动。面对各个新订单,我们应当何时开始生产?我们应该何时开始推销新产品?我们应该何时进行投资以扩大我们的生产能力?

对于任何一种这样的活动，关于如何开始的决策可以用一系列的是非决策表示。每一个可以开始的可能时间段都是一个决策，如下所示：

一个特定的活动是否应当在特定的时间开始？

$$决策变量=\begin{cases}1, & 是\\0, & 否\end{cases}$$

由于一个特定的活动只能够在一个时间段里开始，因此选择不同时间段造成了一组互斥方案。只有一个时间段的决策变量可以取值为 1。

例如这种方法被用于开发一个跨七年的建设计划。在这个计划中将在毗邻得克萨斯体育馆（达拉斯牛仔队的所在地）的地方建设一个七座系列写字楼。这个例子的模型有 49 个 0－1 决策变量。每座写字楼有 7 个决策变量，对应其可能开始建造的时间——七年中的每一年。这个 BIP 的应用由于增加了 630 万美元的利润而获奖（见 Interface 1983 年 10 月号）。

另一个相似但是规模大得多的例子发生在中国（Interface 1995 年 1～2 月号）。中国需要在 15 年里投资至少 2400 亿美元，以满足快速增长的经济对能源的需求。煤和电力的短缺要求建设新的设施，用于运输煤和传输电力，并且需要建设新的水坝和热力、水力以及原子能发电厂。因此，中国国家计划委员会和世界银行合作开发了巨型的混合 BIP 模型来指导在 15 年的计划期内哪些项目可以批准以及何时开始，使得总折现费用最低。据估计，这项管理科学的应用在 15 年内可以为中国节约大约 64 亿美元。

## 安排资产出售

这种应用实际上是上一种应用（安排相关活动）的另一个例子。但是与诸如兴建写字楼或投资兴建发电厂这些活动不同，这些活动是销售（转让）资产以获得收入。这些资产可以是金融资产，如股票债券，也可以是实物资产，如房产。给定一些资产，面临的问题是决定何时销售每一件资产，使得在获得良好的现金流的同时这些资产的净现值最大。

在这种情况下，每一个是非决策都有如下的形式：

在一个特定的时间段里是否应当持有一种特定的资产？

$$决策变量=\begin{cases}1, & 是\\0, & 否\end{cases}$$

Homart Development Company（Interface 1987 年 1～2 月号）是使用这种是非决策的一家公司。这家公司位列美国最大的商用土地开发商之列。其最重要的战略问题之一是安排购物中心和写字楼的转让。在任何一段时间里都有超过 100 种资产需要考虑在 10 年内进行转让。通过使用 BIP 指导进行这项决策，公司从转让计划中多获利 4000 万美元。

## 航空业中的应用

航空工业是管理科学特别重要的用户。例如，一家从美洲航空公司分离出来的大型咨询公司雇用了几百名管理科学专家专门解决公司运输的问题，当然也特别包括航线问题。我们在这里将会介绍两个使用 BIP 的应用案例。

一个案例是飞机指派问题。有几家不同类型的飞机可以使用，问题是在每一条航班上安排什么样的飞机才可以在满足飞行计划的前提下使得总利润最大。需要权衡的最基本的

问题是如果特定航班使用的飞机太小,这会损失一些潜在的客户。但是如果飞机太大,航空公司将会遭受空座飞行带来的更大的损失。

对于每一种飞机类型和航班的组合,我们都有如下的是非决策:

是否应该指派特定类型的飞机飞特定的航班?

$$决策变量 = \begin{cases} 1, & 是 \\ 0, & 否 \end{cases}$$

德尔塔航空公司(Interface 1994 年 1 ~2 月号)每天有 2500 个国内航班,使用 10 种不同类型的 450 架飞机。在每次飞行计划发生变动时,该航空公司就使用一个大型的整数规划模型(大约 40000 个函数约束、20000 个 0 -1 变量和 40000 个一般整数变量)来解决飞机指派问题。这项应用每年为 Delta 航空公司节约了大约 1 亿美元。

相当类似的一个应用是人力规划问题。在这里不是要为航班安排飞机的类型,而是将飞行员和空勤人员指派到一系列的航班上。因此对于从空勤人员基地出发最后返回到相同基地的每一个可行航班序列来说,都需要作出下面的是非决策:

是否应当将特定序列的航班指派给一个空勤人员?

$$决策变量 = \begin{cases} 1, & 是 \\ 0, & 否 \end{cases}$$

其目标是满足计划中所有航班要求的情况下使得提供空勤人员的总成本最小。

美洲航空公司(Interface 1989 年 7 ~8 月号和 1991 年 1 ~2 月号)通过使用 BIP 以月为单位解决空勤人员的人力规划问题,每年节约资金超过 2000 万美元。

这种方法也同样被美国以外的众多航空公司广泛采用。例如新西兰航空公司(Interface 2001 年 1 ~2 月号)通过使用 BIP 优化人力规划,每年节约大约 670 万美元。

在 9.5 节的最后将会给出这一类问题的详细的例子分析。

## 问题回顾

1. 对于每一个是非决策如何定义 0 -1 决策变量?
2. 在定额投资方案的资金预算中,每个是非决策的实质是什么?
3. 在运用 BIP 解决选址问题时,每个是非决策的实质是什么?
4. 在设计公司的生产与分销网络时,会产生哪一类与选址问题一样的是非决策?
5. 运用是非决策如何为每辆卡车分派送货路线?
6. 通过运用 BIP 模型指导决定哪些项目应该通过以及何时开始实施,中国预计可以在 15 年内节省多少资金?
7. 在规划资产出售时,每个是非决策的形式是怎样的?
8. BIP 在航空工业中的两类应用分别是什么?

## 9.4 0 -1 变量的一些其他描述方法

前面两节给出了许多例子来说明是非决策问题是如何产生的。在 BIP 模型中每个是非

决策都是以一个0－1决策变量表示的。

除了这些0－1决策变量，有时引入其他一些0－1决策变量以帮助建立模型。下面是区分这两类0－1变量的术语。

**0－1决策变量**(Binary decision variable)是表示是非决策的0－1变量。辅助0－1变量(auxiliary binary variable)是引入模型的附加0－1变量，不代表一个是非决策，仅仅是为了方便建立纯或混合的BIP模型。辅助0－1变量通常以$y_1$,$y_2$等形式表示。

本节将介绍三种使用辅助变量的方法。在这些方法中，辅助0－1变量在使问题标准化以便于求解方面发挥了重要的作用。为了将重点放在突出辅助变量的作用上，下面举的例子是2.2节中熟悉的伟恩德玻璃公司例子的变形，相应的电子表格线性规划模型在2.3节中。为了进一步唤起你的回忆，下面的图9.6显示了在2.5节中介绍的该问题的图解法求解，其中的P表示的是以美元计的每周总利润。

最初的伟恩德玻璃公司例子中没有是非决策，因此也就不需要使用0－1决策变量。但是，下面每一种变形都会引起问题复杂程度的增加，而通过引入辅助0－1变量建模就能很快地解出(因为伟恩德例子只有两个决策变量，所以在解释如何使用辅助0－1变量以前，我们先用图解法分析各种变形下的问题)。

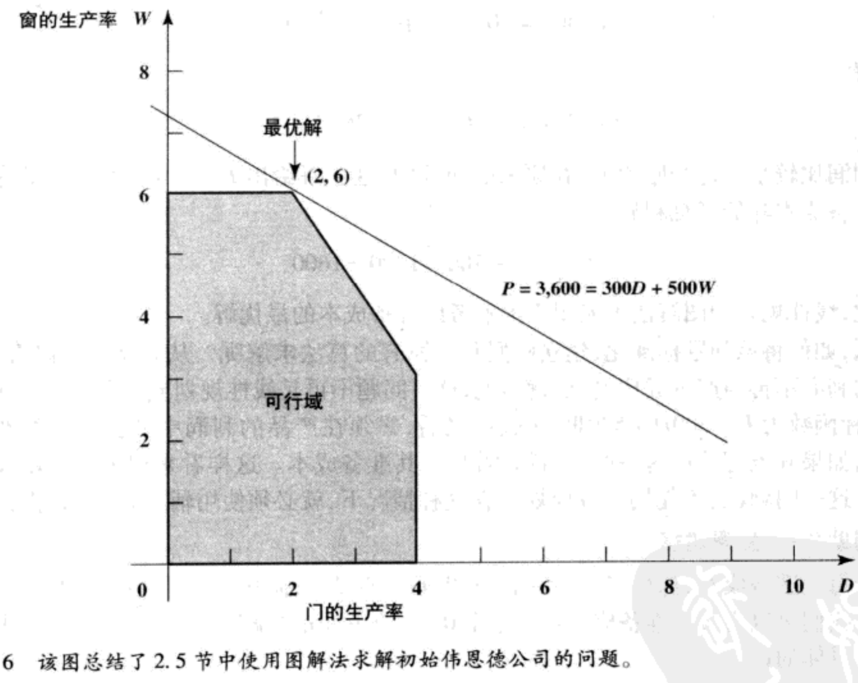



**图9.6** 该图总结了2.5节中使用图解法求解初始伟恩德公司的问题。

## 变形1:在伟恩德的例子中加入生产的启动成本

现在假设将原来的问题作如下变形，

**变形1的变化1**:对于每一种产品，在开始生产之前都需要为安装生产设备支出一次性的准备成本，门、窗的准备成本分别为700美元和1300美元，此外，门、窗的单位利润还是分别保持原来的300美元和500美元。

**变形1的变化2**:一个生产批次在一个星期后即终止，因此原模型的D、W值分别表示门、窗的生

产总量,而不是每周的生产率。因此,必须将门、窗的数量限制在整数范围内。

**表 9.4 在第一种变形下伟恩德问题的净利润**

| | 净利润(美元) | |
|---|---|---|
| 产 量 | 门 | 窗 |
| 0 | 0(300) - 0 = 0 | 0(500) - 0 = 0 |
| 1 | 1(300) - 700 = -400 | 1(500) - 1300 = -800 |
| 2 | 2(300) - 700 = -100 | 2(500) - 1300 = -300 |
| 3 | 3(300) - 700 = 200 | 3(500) - 1300 = 200 |
| 4 | 4(300) - 700 = 500 | 4(500) - 1300 = 700 |
| 5 | 不可行 | 5(500) - 1300 = 1200 |
| 6 | 不可行 | 6(500) - 1300 = 1700 |

表 9.4 表明了生产各种可行数量的门、窗能产生的净利润。注意一点,如果产量少于 3 个单位的话,就不足以支付开始的准备成本。

图 9.7 的各点表示的是问题的各个可行解,将表 9.4 中的相应内容在图上画出,可以得出每个角点的总利润 $P$,最优解转变为:

$$(D,W)=(0,6) \quad 且 \quad P=1700$$

而原始解

$$(D,W)=(2,6) \quad 且 \quad P=1600$$

给出的利润比较小。这个原始解(在原来的问题中,这个解给出 $P=3600$)不再是最优解的原因是准备成本降低了总利润:

$$P=3600-700-1300=1600$$

因此,线性规划的图解法不能用于求解考虑准备成本的最优解。

那么,如何将该问题标准化,建立模型并用原有的算法求解呢?从表 9.4 可以看出,每种产品的利润不再与产量成比例,也就是说,这一问题不再是线性规划或整数规划。在原问题中,目标函数为 $P=300D+500W$,在改动之后,必须在产品的利润中减去相应的准备成本,但是,如果并没有生产这一产品,就无需减去其准备成本。这样看来似乎不能用线性规划来求解这一问题(也不能用整数规划),在这种情况下,就必须使用辅助 0 - 1 变量了。

**用辅助 0 - 1 变量建模**

对于每一准备成本,都只有两种可能,发生或者不发生,而 0 - 1 决策变量也只有两种取值,因此,我们可以为每个准备成本定义一个 0 - 1 决策变量,分别以 0 和 1 两个值来表示两种情况。具体的话,

> 这些辅助 0 - 1 决策变量只有在存在准备成本的情况下才能够减去每一次的准备成本。

$$y_1=\begin{cases}1, & 生产门 \\ 0, & 不生产门\end{cases}$$

$$y_2=\begin{cases}1, & 生产窗 \\ 0, & 不生产窗\end{cases}$$

目标函数可表示为,

$$P=300D+500W-700y_1-1300y_2$$

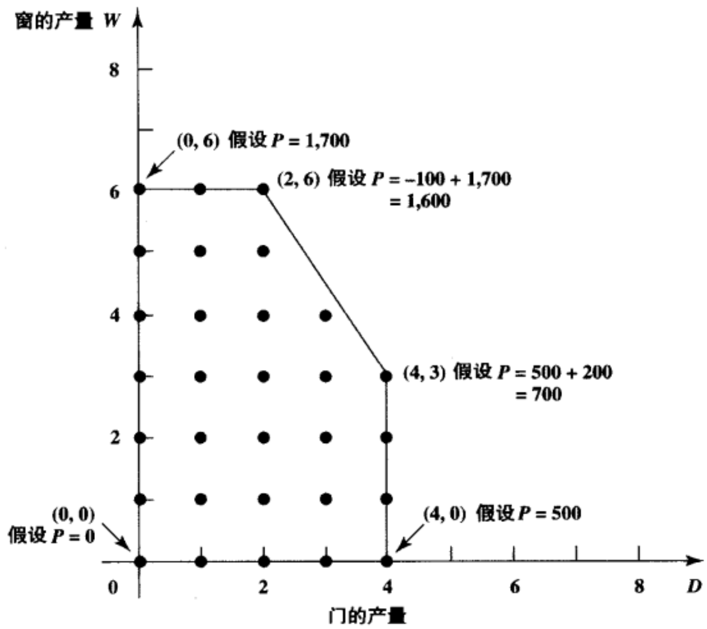



**图9.7**　图中的点是伟恩德公司问题变形 1 的可行解。同时这个图也显示了表 9.4 给出的每一个角点的总利润

这样就符合整数规划的要求了。

因为生产某一产品，就会有相应的准备成本，所以可将辅助 0 - 1 变量与产量直接联系在一起，如下所示：

$$y_1 = \begin{cases} 1, D > 0 & (\text{生产门}) \\ 0, D = 0 & (\text{不生产门}) \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1, W > 0 & (\text{生产窗}) \\ 0, W = 0 & (\text{不生产窗}) \end{cases}$$

我们必须在模型中加入约束条件，以保证维持这些关系（模型的算法只能识别目标函数和函数约束，而不会判别变量的定义）。

那么，在第一个变化模型中的约束条件是什么呢？原模型的约束还是要全部保留的，并且还要加入约束，将 $D$ 和 $W$ 限制为整数（考虑第二个变动），将 $y_1$ 和 $y_2$ 限制为 0 - 1 变量。此外，我们必须使用一些基本的线性规划约束，以保证下面的关系。

如果 $y_1 = 0$，则 $D = 0$，

如果 $y_2 = 0$，则 $W = 0$。

（如果 $y_1 = 1$ 或 $y_2 = 1$，则不会对 $D$ 或 $W$ 加以其他的限制。）

Excel 可以用 IF 函数表示如 $y_1$ 和 $D$，以及 $y_2$ 与 $W$[①] 这样的关系，但不幸的是，在线性规划（整数规划）的格式中不能使用 IF 函数，因此 Solver 不能求解含有该函数的电子表格模型。为了表示这些关系，就需要引入一些一般的线性规划约束。

因为，其他的一些约束将 $D$，$W$ 限制在 $0 \leqslant D \leqslant 4$，$0 \leqslant W \leqslant 6$ 的范围内，所以可以用如下的表达式来约束这些关系。

---

① 这不是直接的，因为例如在 IF 函数中 $y_1$ 不等于 0 的情况下，$D$ 必须设置为等于一个单元格，这个单元格又被限制为等于含有 $D$ 的值的可变单元格。

$$D \leqslant 4y_1$$
$$W \leqslant 6y_2$$

注意到，如果 $y_1=0$，则 $D \leqslant 0$，因为 $D$ 只能为非负值，所以 $D=0$，而如果 $y_1=1$，则 $D \leqslant 4$，这样就允许 $D$ 在其他约束的范围内取任何值。对于 $W$ 来说，$y_2=0$ 和 $y_2=1$ 时也有同样的结论。

在该例中并不一定要取 4 和 6 作为 $y_1$ 和 $y_2$ 的系数，比 4 和 6 大的所有数都可以实现这一效果。只要不取小于 4 和 6 的数就可以，因为如果小于 4、6，在 $y_1=1$ 和 $y_2=1$ 时，就会对 $D$ 和 $W$ 施加了额外的非期望的限制。

在规模更大的问题中，有时很难为这些辅助 0-1 决策变量确定最小可接受系数，因此，通常是用一个比最小可接受系数大的安全合理的数（这里是 99）来建立模型。

图 9.8 显示了在取 99 时，该问题的一种描述方法，前面 14 行与最初的模型一模一样，区别只在于后面的 15-17 行。辅助 0-1 变量 $y_1$ 和 $y_2$ 的值出现在新的可变单元格 Setup?（C17:D17）中。图底部表示的是输入在 16 行的输出单元格中的公式，C16 = 99 * C17 以及 D16 = 99 * D17。因此，约束 UnitsProduced（C14:D14）≤ OnlyIfSetup（C16:D16）所约束的关系式为：$D \leqslant 99y_1$，$W \leqslant 99y_2$。

电子表格中的可变单元格表示的是在运用 Excel Solver 求解之后得出的最优解，最优解为不生产门（$y_1=0, D=0$），而是配置生产窗的生产设施，生产 6 个单位的窗（$y_2=1, W=6$），得到总利润为 1700 美元。

注意，在上面的模型中，最优解确实满足了当 $y_1=0$ 时，$D=0$ 成立，或者当 $y_2=1$ 时，$W>0$ 能够成立的需求。约束条件是准备生产一种产品，而实际上却不生产任何单位（$y_1=0$ 时 $D=0$，或 $y_2=1$ 时 $W=0$）。但是，在求解目标函数的最优解的过程中，会自动的排除这种不太经济的愚蠢做法。如果不引入辅助变量 $y_1$ 和 $y_2$ 是无法实现这一点的。

## 变形 2：包含互斥产品的伟恩德例子

不考虑变形 1，假设仅对最初的伟恩德作如下的变动。

**变形 2 的变化**：两种新产品门与窗具有相同的用户，是互相竞争的。因此，管理层决定不同时生产两种产品，而是只能选择其中的一种，这样，

或者 $D=0$ 或者 $W=0$ （或者两者均为 0）

下面，我们考虑这一具有互斥产品的问题。

图 9.9 显示了该问题的可行区域，即只能在坐标轴的（0,0）到（4,0）以及（0,0）到（0,6）的线段上取值。这就意味着，$x_1$ 与 $x_2$ 中至少有一个为 0。对于这一很小的问题，可以直接从图上看出可行的最优解是

$$(D, W) = (0, 6) \quad 且 \quad P = 3000$$

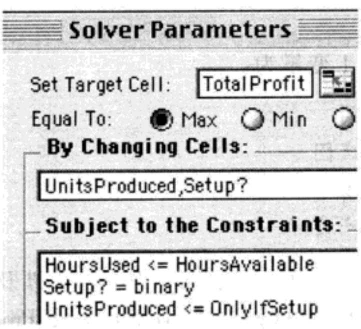
> 线性或整数规划模型要求所有的约束都必须满足，因此需要重新构建二选一类型的约束以符合这种形式。

线性规划和整数规划都不允许有二选一的约束条件，例如或者是 $D=0$，或者是 $W=0$。那么，如何将这一约束加以一定的转化以适应标准的形式，并能用原有的算法（包括 Excel Solver 的算法）求解呢？

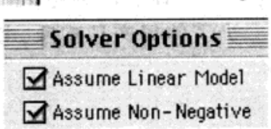
在 9.1 节的案例研究讲到过，如果 $D$、$W$ 均为 0-1 变量，只需要将这一约束表示为 $D+W \leqslant 1$ 就可以了。但是，这里 $D$，$W$ 表示的是产量，在 0、1 之外还有更多的取值，这种方法就不适用了。

这时，同样需要用到辅助 0-1 变量。

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Product-Mix with Setup Costs | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | | |
| 5 | | Setup Cost | $700 | $1,300 | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | Hours | | Hours | |
| 8 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available | |
| 9 | | Plant 1 | 1 | 0 | 0 | ≤ | 4 | |
| 10 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 | |
| 11 | | Plant 3 | 3 | 2 | 12 | ≤ | 18 | |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | | | Doors | Windows | | | | |
| 14 | | Units Prod'd | 0 | 6 | | | | |
| 15 | | | ≤ | ≤ | | | Production Profit | $3,000 |
| 16 | | Only If Setup | 0 | 99 | | | −Total Setup Cost | $1,300 |
| 17 | | Setup? | 0 | 1 | | | Total Profit | $1,700 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| HoursAvailable | G9:G11 |
| HoursUsed | E9:E11 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C9:D11 |
| OnlyIfSetup | C16:D16 |
| ProductionProfit | H15 |
| Setup? | C17:D17 |
| SetupCost | C5:D5 |
| TotalProfit | H17 |
| TotalSetupCost | H16 |
| UnitProfit | C4:D4 |
| UnitsProduced | C14:D14 |




| | E |
|---|---|
| 7 | Hours |
| 8 | Used |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9,UnitsProduced) |
| 10 | =SUMPRODUCT(C10:D10,UnitsProduced) |
| 11 | =SUMPRODUCT(C11:D11,UnitsProduced) |

| | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 16 | Only If Setup | =99*C17 | =99*D17 |

| | G | H |
|---|---|---|
| 15 | Production Profit | =SUMPRODUCT(UnitProfit,UnitsProduced) |
| 16 | −Total Setup Cost | =SUMPRODUCT(SetupCost,Setup?) |
| 17 | Total Profit | =ProductionProfit − TotalSetupCost |

图 9.8　在第一种变形下，伟恩德例子的电子表格模型，其中 Excel Solver 求得的最优解在可变单元格 C14:D14 与 C17:D17 中。

**用辅助 0－1 变量建模**

对于是否生产某一产品，只能有两种可能，生产或是不生产。因此，我们可以为每一种

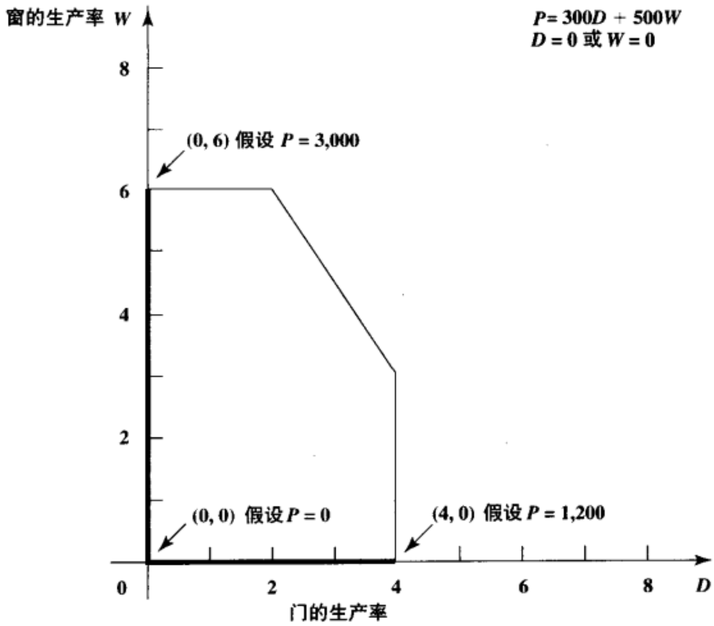



**图 9.9** 在第二种变形下的伟恩德例子，其中的黑线部分表示的是问题的可行域。

可能分配一个辅助 0 - 1 变量，具体的来说，令辅助 0 - 1 变量为：

$$y_1 = \begin{cases} 1, D > 0 & \text{生产门} \\ 0, D = 0 & \text{不生产门} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1, W > 0 & \text{生产窗} \\ 0, W = 0 & \text{不生产窗} \end{cases}$$

$y_1$ 与 $D$ 以及 $y_2$ 与 $W$ 之间的关系与第一种变型中的一样，因此，图 9.10 表明，涉及这些变量的约束条件，UnitsProduced（C13：D13）≤ OnlyIfProduce（C15：D15）以及 Produce?（C16：D16）= binary，也是完全一样的，能够用来保证关系成立。为了使得产品互斥，考虑到这两个 0 - 1 变量，我们为互斥方案现在添加通常类型的约束：

$$y_1 + y_2 \leqslant 1$$

在电子表格模型中的约束就表现为 TotalProduced（E16）≤ MaximumToProduce（G16），这样就使得要么 C16 = 0，要么 D16 = 0，或者两者均为 0。

这些就是要在原模型中加入的新的约束条件，因为这里不考虑第一个变动，所以 $D$ 和 $W$ 还是表示每周的产量（变形 2 的变化 1 在这里不再考虑），也就不需要限制在整数范围内，因此，图 9.10 的模型是一个混合 BIP 模型。

与第一种变形相比，$y_1$ 和 $y_2$ 的任何值并不会增加成本，在没有 $y_1$ 和 $y_2$ 的情况下，最初的目标函数还是有效的，如 TotalProfit（G12）目标单元格所输入的那样。

Excel Solver 将最优解显示在可变单元格中，最优解表明应该选择生产窗，在原有的约束条件下，窗应当在最大生产率（$W = 6$）下生产。

对于这样一个小型的问题，实际上可以从图 9.9 直接观察出问题的最优解来，而不需要引入辅助 0 - 1 变量求解。但是，在处理一些大型问题时，就必须运用辅助变量。例如，这两种互斥产品只不过是一系列产品组的一小部分，那么，就必须在大模型中加入 $y_1$ 和 $y_2$ 这两个辅助变量。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Wyndor Glass Co. with Mutually Exclusive Products | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | Hours | | Hours |
| 7 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 8 | | Plant 1 | 1 | 0 | 0 | ≤ | 4 |
| 9 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 |
| 10 | | Plant 3 | 3 | 2 | 12 | ≤ | 18 |
| 11 | | | | | | | |
| 12 | | | Doors | Windows | | | |
| 13 | | Units Produced | 0 | 6 | | | |
| 14 | | | ≤ | ≤ | Total | | Maximum |
| 15 | | Only If Produce | 0 | 99 | Produced | | to Produce |
| 16 | | Produce? | 0 | 1 | 1 | ≤ | 1 |
| 17 | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | Total Profit |
| 19 | | | | | | | $3,000 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalProfit

Equal To: ● Max ○ Min ○ Val

By Changing Cells:

UnitsProduced,Produce?

Subject to the Constraints:

HoursUsed <= HoursAvailable
Produce? = binary
TotalProduced <= MaximumToProduce
UnitsProduced <= OnlyIfProduce

| | E |
|---|---|
| 6 | Hours |
| 7 | Used |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:D8,UnitsProduced) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9,UnitsProduced) |
| 10 | =SUMPRODUCT(C10:D10,UnitsProduced) |

| | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 15 | Only If Produce | =99*C16 | =99*D16 |

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| | E |
|---|---|
| 14 | Total |
| 15 | Produced |
| 16 | =SUM(Produce?) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| HoursAvailable | G8:G10 |
| HoursUsed | E8:E10 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C8:D10 |
| MaximumToProduce | G16 |
| OnlyIfProduce | C15:D15 |
| Produce? | C16:D16 |
| TotalProduced | E16 |
| TotalProfit | G19 |
| UnitProfit | C4:D4 |
| UnitsProduced | C13:D13 |

| | G |
|---|---|
| 18 | Total Profit |
| 19 | =SUMPRODUCT(UnitProfit,UnitsProduced) |

图9.10　在第二种变形下，伟恩德例子的电子表格模型，其中 Excel Solver 求得的最优解在可变单元格 UnitsProduced(C13:D13)与 Produce?（C116:D16）中。

在下一节的例子中，你会看到同一种方法的运用，只不过下个例子中包含了三种新产品，最多可以选择两种来生产。

## 变形 3:加入二选一约束的伟恩德例子

现在假设仅对最初的伟恩德例子作如下的变动。

**变形 3**:公司最近建了一个与工厂 3 类似的新厂(工厂 4),因此,新厂也可以生产两种新产品,但是,为了管理上的原因,管理层决定只在一个厂内生产新产品,同时要选取能获得产品组合最大利润的那一工厂。

表 9.5 给出了该问题的相关数据,该表与原问题的表 2.1 类似,只不过在其中加入了工厂 4 的一些数据。尽管工厂 3 与工厂 4 可用于生产的时间是不一样的(因为所用设备不一样),但是,每一产品的生产成本是完全相同的。因此,不管选择哪个工厂,都不会影响表中最后一行的产品的单位利润。

**表 9.5 在第三种变形情况下的伟恩德问题的数据**

| 工厂 | 单位产品的生产时间(小时) | | 每周可获得的生产时间(小时) |
|---|---|---|---|
| | 门 | 窗 | |
| 1 | 1 | 0 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 12 |
| 3 | 3 | 2 | 18 |
| 4 | 2 | 4 | 28 |
| 单位利润(美元) | 300 | 500 | |

工厂 4 的数据表明,如果选择该厂来生产的话,在求解最优产品组合时,必须符合如下的约束条件,

$$2D+4W\leq 28$$

但是,如果选取工厂 3 的话,上述约束条件就不相关了,而必须符合下面的约束条件:

$$3D+2W\leq 18$$

换一个角度也就是可以用下面的相关约束表示:

$$\text{或者}\quad 3D+2W\leq 18$$
$$\text{或者}\quad 2D+4W\leq 28$$

到底选择哪个约束条件取决于是选工厂 3 还是工厂 4。而只有在考虑模型所有的约束条件之后,才能知道选哪个工厂能使利润最大化。

图 9.11 显示了两种选择的效果,如果选择工厂 3 来生产新产品的话(选择 $3D+2W\leq 18$ 而不是 $2D+4W\leq 28$),我们就可以得到图左边部分的线性规划问题,该问题与图 9.2 中最初的伟恩德问题是完全一样的,因此,最优解为

$$(D,W)=(2,6)\quad 且\ P=3600$$

但是,如果选择工厂 4 来生产新产品(选择 $2D+4W\leq 28$ 而不是 $3D+2W\leq 18$),可以得到图右边部分的线性规划问题,该问题的最优解为

$$(D,W)=(4,5)\quad 且\ P=3700$$

因为 $P=3700$ 大于 $P=3600$,每周最大的利润为 3700 美元,在选择工厂 4 来生产新产品时才能实现这一最大利润。

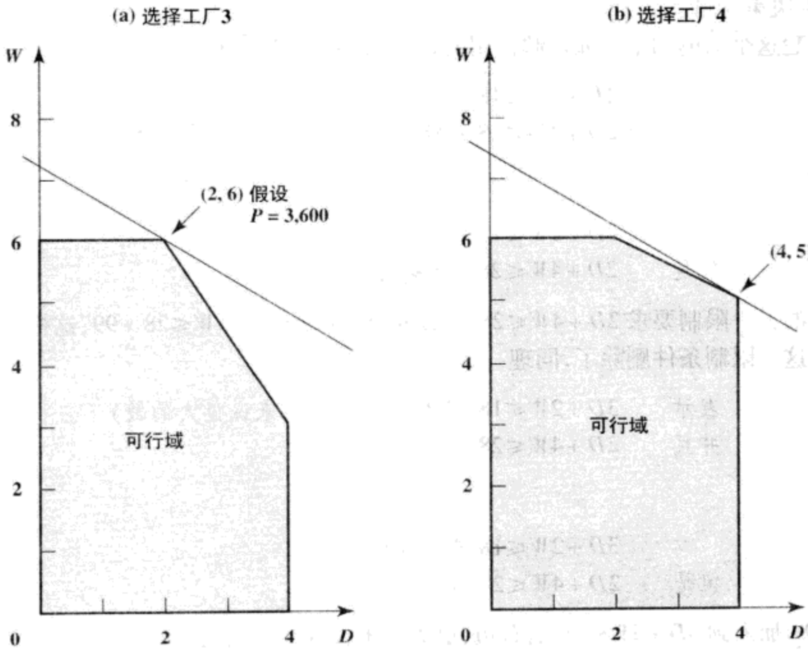



**图 9.11**　变形 3 的伟恩德例子的两个图形，表示该线性规划问题以及选择工厂 3(a) 和工厂 4(b) 能够取得的最优解。

尽管在上面的问题中，我们仅仅是通过比较两种情况下最优解的大小，来求解整个问题，而没有将二选一的约束直接包含在模型中。但是在处理一些具有多个二选一约束的大型问题时，如果运用这种方法就意味着要比较许多种可能的线性规划问题。因此，最好能有一种标准的算法，可以一步就求出问题的最优解。

不幸的是，变形 3 下的模型并不是线性规划模型，因为在线性规划和整数规划中均不能有二选一的约束条件。实际上这一模型不符合任何标准模型的格式。因此，在其现有的格式上是不可能运用标准算法一步解出问题的最优解的。

那么如何将这一问题标准化，才可以运用标准的算法一步求出最优解呢？同样，这时我们就必须考虑到用辅助 0－1 变量。

**用辅助 0－1 变量建模**

> 这个辅助 0－1 变量完全是为了满足混合 BIP 模型的要求而添加的。

问题只有两种可能性，或者 $3D+2W\leq 18$ 成立（选择工厂 3），或者 $2D+4W\leq 28$ 成立（选择工厂 4）。因此，我们可以引入一个辅助 0－1 变量对 $y$ 来定义确定两种选择的可能性。

$$y=\begin{cases}1, & 2D+4W\leq 28 \quad (\text{选择工厂 4})\\ 0, & 3D+2W\leq 18 \quad (\text{选择工厂 3})\end{cases}$$

为了强化这一定义，我们引入一个极大的数（我们又一次用 99 来表示），然后在模型中作如下的变动：

| 将原先的 | 替换成 |
|---|---|
| 或者　$3D+2W\leq 18$ | $3D+2W\leq 18+99y$ |
| 或者　$2D+4W\leq 28$ | $2D+4W\leq 28+99(1-y)$ |

其中 $y$ 为 0 - 1 决策变量。

为了弄清楚这个新的约束是如何起作用的,看一下 $y=0$ 的情况,

$y=0$ 表示 $3D+2W\leq 18$
并且 $2D+4W\leq 28+99$ (一个相对来说极大的数)

于是

$3D+2W\leq 18$ 成立
但是 $2D+4W\leq 28$ 不需要成立

因为模型的另一限制要求 $2D+4W\leq 28$,而现在 $y=0$ 时,$2D+4W\leq 28+99$,这样产生的效果就如同将这一限制条件删除了,同理

$y=1$ 表示 $3D+2W\leq 18+99$ (一个相对来说极大的数)
并且 $2D+4W\leq 28$

因此

$3D+2W\leq 18$ 不需要成立
但是 $2D+4W\leq 28$ 成立

同样,将 99 加入到 $3D+2W\leq 18$ 的右边,也等同于将这一限制条件删除了。

图 9. 12 显示了如何将这一方法应用到电子表格中。增加的可变单元格(E16)表示 $y$ 值。在单元格 G10 和 G11 中输入的等式,表示了在相应的 $y$ 值下,工厂 3 和工厂 4 经过修正的约束右式。加上在 Solver 对话框中的约束条件,就形成了一个混合 BIP 模型,可以用 Excel Solver 求解。

按下 Solver 求解按钮之后,Solver 几乎同时显示了 $y$ 值和 $D$,$W$ 值以及目标单元格(H14)中最大的利润值。因为最优解表明 $y=1$,所以应该选择工厂 4 来生产新产品,相应的 $D=4$,$W=5$,每周最大的利润为 3700 美元而不是选择工厂 3 所得的 3600 美元。

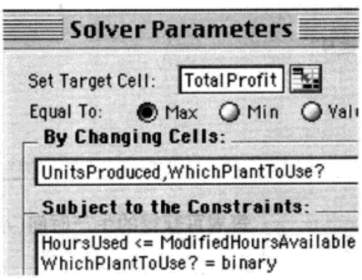
### 问题回顾

1. 0 - 1 决策变量和辅助 0 - 1 变量有何区别?
2. 为什么考虑了初次生产的准备成本之后,产品组合问题就不能用线性规划建模?
3. 在考虑某一特定设备安装的准备成本时,如何定义相应的辅助 0 - 1 变量?
4. 互斥产品的含义是什么?
5. 在考虑是否生产某一特定产品时,应如何定义相应的辅助 0 - 1 决策变量?
6. 在第三种变动情况下的伟恩德的例子中,是怎样产生二选一的约束条件的?
7. 当两个独立的约束合并组合为一个二选一约束时,如何为选择哪一个约束条件定义相应的辅助 0 - 1 变量?

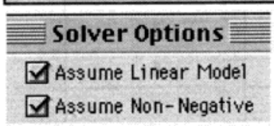
## 9.5 一些建模的例子

下面我们将会介绍一系列使用 0 - 1 变量的建模技术,包括前面几节中讨论过的一些例子。为了清楚起见,这些例子都是很小型的,在实际的应用中,这些模型可能是一个大型模型很小的一部分。

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Glass Co. Problem with Either–Or Constraints | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | | |
| 5 | | | | | | | Modified | |
| 6 | | | | | Hours | | Hours | Hours |
| 7 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available | Available |
| 8 | | Plant 1 | 1 | 0 | 4 | ≤ | 4 | 4 |
| 9 | | Plant 2 | 0 | 2 | 10 | ≤ | 12 | 12 |
| 10 | | Plant 3 | 3 | 2 | 22 | ≤ | 117 | 18 |
| 11 | | Plant 4 | 2 | 4 | 28 | ≤ | 28 | 28 |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | | | Doors | Windows | | | | |
| 14 | | Units Prod'd | 4 | 5 | | | Total Profit | $3,700 |
| 15 | | | | | | | | |
| 16 | | Which Plant to Use? (0=Plant 3, 1=Plant 4) | | | 1 | | | |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| HoursAvailable | H8:H11 |
| HoursUsed | E8:E11 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C8:D11 |
| ModifiedHoursAvailable | G8:G11 |
| TotalProfit | H14 |
| UnitProfit | C4:D4 |
| UnitsProduced | C14:D14 |
| WhichPlantToUse? | E16 |




| | E | F | G |
|---|---|---|---|
| 5 | | | Modified |
| 6 | Hours | | Hours |
| 7 | Used | | Available |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:D8,UnitsProduced) | ≤ | =H8 |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9,UnitsProduced) | ≤ | =H9 |
| 10 | =SUMPRODUCT(C10:D10,UnitsProduced) | ≤ | =H10+99*WhichPlantToUse? |
| 11 | =SUMPRODUCT(C11:D11,UnitsProduced) | ≤ | =H11+99*(1-WhichPlantToUse?) |

| | G | H |
|---|---|---|
| 14 | Total Profit | =SUMPRODUCT(UnitProfit,UnitsProduced) |

图 9.12　在第三种变形情况下的伟恩德问题的电子表格模型，其中的可变单元格 UnitsProduced（C14：D14）和 WhichPlantToUse（E16）显示了 Excel Solver 求得的最优解。

## 例 1：增加管理限制

固特产品公司的研发部最近开发出了三种新产品，但是，为了防止生产线的过度多元化，公司的管理层增加了如下的约束：

**约束 1**：在三种新产品中，最多只能选择两种进行生产。

这些产品都可以在两个工厂中生产，为了管理的方便，管理层加入第二个约束：

**约束 2**：两个工厂中必须选出一个专门生产新产品。

两个工厂中各种产品的单位生产成本是相同的，但是，由于生产设备的不同，每单位产品所需要的生产时间是不同的。表 9.6 给出了这方面的相关数据，包括生产出来的产品每周内估计可销售的数量。管理层制定的目标是通过选择产品、工厂以及确定各种产品的生产率，使得总利润最大化。

在很多方面，该问题都类似于 2.2 节所描述的伟恩德玻璃公司的产品组合问题。实际上，如果我们去掉两个约束条件，同时要求每一产品在两个工厂的生产时间都如表 9.6 所示（在这种情况下，两个工厂将根据产品的需要采用不同的生产方法），这一例子就与伟恩德玻璃公司的例子完全一样了。而且，以 $x_1$、$x_2$ 和 $x_3$ 分别表示三种产品的生产率，并将这些值反映在电子表格的可变单元格 UnitsProduced（C12:E12）中，就可以得出问题的电子表格模型如图 9.13 的 1～13 行和 15 行所示，如果不考虑 H 栏以及后面除了 TotalProfit（H21）的几行。MaximumSales（C15:E15）提供了三种产品生产率的上限，于是

$$x_1 \leqslant 7, \quad x_2 \leqslant 5, \quad x_3 \leqslant 9$$

是模型中所需的约束。

**表 9.6　例 1 的数据（固特产品公司）**

| 工　厂 | 单位产品的生产时间（小时） | | | 每周可获得的生产时间（小时） |
|---|---|---|---|---|
| | 产品 1 | 产品 2 | 产品 3 | |
| 1 | 3 | 4 | 2 | 30 |
| 2 | 4 | 6 | 2 | 40 |
| 单位利润 | 5 | 7 | 3 | （1000 美元） |
| 可销出的数量 | 7 | 5 | 9 | （每周数量） |

但是，在处理实际问题时，就不得不在模型中加入约束 1：

三个变量（$x_1, x_2, x_3$）最多只能有两个取值大于 0。

这一约束条件并不符合线性规划和整数规划，因此关键一步是要将该问题标准化，从而可以用标准化的算法求解该模型。如果决策变量为 0－1 变量，那么这一约束可以表示为 $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2$，但是，在连续决策变量时，必须引入更为复杂的辅助 0－1 决策变量。

约束 2 将原先的函数约束（$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 30$）和（$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leqslant 40$）合并为一个二选一的约束条件：

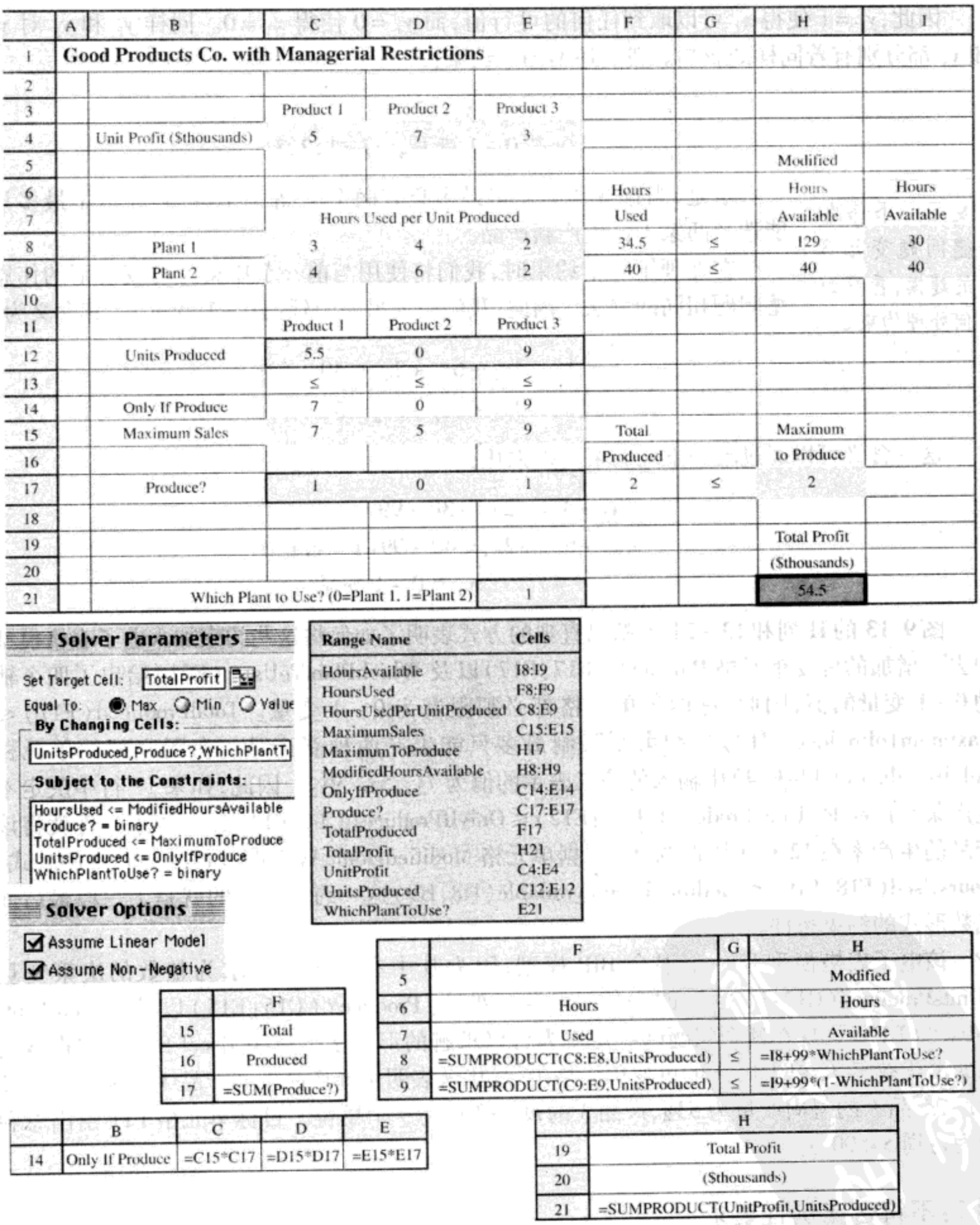
$$\text{或者} \quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 30 \text{ 必须成立}$$
$$\text{或者} \quad 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leqslant 40 \text{ 必须成立}$$

到底选择哪一个函数约束取决于选择哪一个工厂来生产新产品。在第三种变动情况下的伟恩德例子说明了如何运用辅助 0－1 变量，将这一类的二选一约束转化成线性规划或整数规划。

## 用辅助 0－1 变量建模

> 复习一下韦恩德问题变形 2 的建模，看看如何处理约束 1。

约束 1 与上一节变形 2 下的伟恩德例子类似，只不过是增加了产品和选项。对于变形 2 来说，只有两种产品，最多只能选择一种产品来生产。参见解决伟恩德问题的方法，在该例中，我们引入三个辅助 0－1 变量（$y_1, y_2, y_3$），其具体说明如下：



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Good Products Co. with Managerial Restrictions | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | | | | |
| 4 | | Unit Profit ($thousands) | 5 | 7 | 3 | | | | |
| 5 | | | | | | | | Modified | |
| 6 | | | | | | Hours | | Hours | Hours |
| 7 | | | Hours Used per Unit Produced | | | Used | | Available | Available |
| 8 | | Plant 1 | 3 | 4 | 2 | 34.5 | ≤ | 129 | 30 |
| 9 | | Plant 2 | 4 | 6 | 2 | 40 | ≤ | 40 | 40 |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | | | | |
| 12 | | Units Produced | 5.5 | 0 | 9 | | | | |
| 13 | | | ≤ | ≤ | ≤ | | | | |
| 14 | | Only If Produce | 7 | 0 | 9 | | | | |
| 15 | | Maximum Sales | 7 | 5 | 9 | Total | | Maximum | |
| 16 | | | | | | Produced | | to Produce | |
| 17 | | Produce? | 1 | 0 | 1 | 2 | ≤ | 2 | |
| 18 | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | Total Profit | |
| 20 | | | | | | | | ($thousands) | |
| 21 | | Which Plant to Use? (0=Plant 1, 1=Plant 2) | | | 1 | | | 54.5 | |



| Range Name | Cells |
|---|---|
| HoursAvailable | I8:I9 |
| HoursUsed | F8:F9 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C8:E9 |
| MaximumSales | C15:E15 |
| MaximumToProduce | H17 |
| ModifiedHoursAvailable | H8:H9 |
| OnlyIfProduce | C14:E14 |
| Produce? | C17:E17 |
| TotalProduced | F17 |
| TotalProfit | H21 |
| UnitProfit | C4:E4 |
| UnitsProduced | C12:E12 |
| WhichPlantToUse? | E21 |

| | F | G | H |
|---|---|---|---|
| 5 | | | Modified |
| 6 | Hours | | Hours |
| 7 | Used | | Available |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:E8,UnitsProduced) | ≤ | =I8+99*WhichPlantToUse? |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:E9,UnitsProduced) | ≤ | =I9+99*(1-WhichPlantToUse?) |

| | F |
|---|---|
| 15 | Total |
| 16 | Produced |
| 17 | =SUM(Produce?) |

| | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 14 | Only If Produce | =C15*C17 | =D15*D17 | =E15*E17 |

| | H |
|---|---|
| 19 | Total Profit |
| 20 | ($thousands) |
| 21 | =SUMPRODUCT(UnitProfit,UnitsProduced) |

**图 9.13**　固特产品公司混合 BIP 问题的电子表格模型，其中，可变单元格 UnitsProduced（C12:E12）以及 Produce?（C17:E17），WhichPlantToUse?（E21）给出了 Excel Solver 求得的问题的最优解。

$$y_j = \begin{cases} 1, & x_j > 0 \quad (\text{生产产品 } j) \\ 0, & x_j = 0 \quad (\text{不生产产品 } j) \end{cases}$$

其中$j=1,2,3$。为了强化在模型中的含义，我们用新的约束替代三种产品生产率的约束——$x_1 \leqslant 7, x_2 \leqslant 5, x_3 \leqslant 9$：

$$x_1 \leqslant 7y_1, \quad x_2 \leqslant 5y_2, \quad x_3 \leqslant 9y_3$$

因此，$y_1=1$使得$x_1$可以取到任何的可行值，而$y_1=0$使得$x_1=0$。同样$y_2$和$y_3$对$x_2$和$x_3$都分别有着同样的影响。我们还增加了约束：

$$y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 2$$
$$y_j \text{是 } 0-1 \text{ 变量}, \quad j=1,2,3$$

> 复习一下伟恩德问题变形3的建模，看看如何处理约束2。

于是，当这些约束使得最多只有两个$y_j$等于1时，它导致了最多只能选择两家工厂生产新产品。

在处理第二个约束时，我们将使用与前一节中第三种变动下的伟恩德问题相同的方法。因此，我们引入另一个辅助0－1变量$y_4$，其含义为，

$$y_4 = \begin{cases} 1, & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leqslant 40 \quad (\text{选择工厂 } 2) \\ 0, & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 30 \quad (\text{选择工厂 } 1) \end{cases}$$

这一含义可以通过增加下列约束得以强化：

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 30 + 99y_4$$
$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leqslant 40 + 99(1 - y_4)$$
$$y_4 \text{为 } 0-1 \text{ 变量}$$

图9.13的H列和13－21行都以直观的方式表明了如何将这些约束加入电子表格模型中去。增加的可变单元格 Produce?(C17:E17)以及 WhichPlantToUse?(E21)给出了四个辅助0－1变量的值，因此，这四个单元格都必须限制为0－1变量。TotalProduced(F17)≤MaximumToProduce(H17)的约束则限制最多只能生产两种新产品。在图底部的单元格 OnlyIfProduce(C14:E14)中输入的公式表示的值为$7y_1, 5y_2, 9y_3$。因此，如果17行中决定不生产某一产品时，UnitsProduced(C12:E12)≤OnlyIfProduce(C14:E14)这一约束条件就将该产品的生产率在12行中限制为0。根据单元格 ModifiedHoursAvailable(H9:H10)中的公式，HoursUsed(F18:F19)≤ModifiedHoursAvailable(H8:H9)这一约束表示的就是上一段最后面代数形式的约束条件。

该电子表格模型是一个混合 BIP 模型，因为其中有三个不要求为整数的决策变量[UnitsProduced(C12:E12)]，四个辅助0－1变量[Produce?(C15:E15)以及 WhichPlantToUse?(E17)]，现在这个问题已经建模为可以求解的形式了。运用 Excel Solver 求得该问题的最优解显示在图9.13的可变单元格中，最优解表明选择产品1和产品3，选择在工厂2生产，产品1的每周产量为5½，产品3的每周产量为9个单位。目标单元格 F11 给出总利润为每周54500美元。

## 例2：不符合比例性要求

超级苏滋公司(Supersuds Corporation)正在为其下一年的新产品制定营销计划，并准备在全国电视网上购买5个广告片，以促销三种产品。每个广告只针对一种产品，因此，这一

问题就是如何将 5 个广告分配给三种产品，每种产品最多可以有三个广告，最少可以不做广告。

表 9.7 表示的是在每种产品上分配 0，1，2，3 个广告，分别产生的影响。该影响是以应广告而增加的收入减去广告的设计费用以及购买广告数的费用来度量的。问题的目标是将 5 个广告数分配给三种产品，从而能获得最大的利润。

**表 9.7　例 2 的数据(超级苏滋公司问题)**

| | 利润(百万美元) | | |
|---|---|---|---|
| **电视广告片数** | **产品 1** | **产品 2** | **产品 3** |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | -1 |
| 2 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 4 |

该问题的规模很小，甚至可以用试错法求出最优解(最优解为分配给产品 1 两个广告，产品 2 不作广告，产品 3 三个广告)。但是，为了将问题阐述清楚，下面我们会用辅助 0 - 1 变量来求解该问题。如果说这个问题是一个涉及到为公司所有新产品的营销活动分配资源的更大的问题的一小部分的话，就必须用这种方法才能将该小问题加入到模型中去。

**用辅助 0 - 1 变量建模**

> 不将每增加一次电视广告带来的固定单位利润分摊到同种产品中，我们就无法使用 SUMPRODUCT 得到总利润，但是这并不符合整数规划的要求。

一般的建模需要

$x_1$ = 分配给产品 1 的广告数
$x_2$ = 分配给产品 2 的广告数
$x_3$ = 分配给产品 3 的广告数
$P$ = 总利润(以百万美元为单位)

每一整数决策变量($x_1, x_2, x_3$)对 $P$ 的单位贡献如表 9.7 的相应列所示。但是，每一列都表明可获得的利润与分配给该产品的广告数的数目是不成比例的。因此，我们无法以这些变量写出符合整数规划的目标函数来。我们最多只能写出下面代数形式的所有约束，而无法表达出其目标函数的不完全的整数规划模型(不是一个 0 - 1 整数规划模型)。

$$最大化 \quad P = ?$$

约束

$$x_1 \leqslant 3$$
$$x_2 \leqslant 3$$
$$x_3 \leqslant 3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5$$

其中

$$x_1 \leqslant 0 \quad x_2 \leqslant 0 \quad x_3 \leqslant 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{ 均为整数}$$

下面，我们引入 9 个辅助 0 - 1 变量，其相应的含义如下所示，

$$y_{11} = \begin{cases} 1, 如果\ x_1 = 1 \\ 0, 其他 \end{cases} \quad y_{12} = \begin{cases} 1, 如果\ x_2 = 2 \\ 0, 其他 \end{cases} \quad y_{13} = \begin{cases} 1, 如果\ x_1 = 3 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

$$y_{21}=\begin{cases}1, 如果\ x_2=1\\0, 其他\end{cases}\quad y_{22}=\begin{cases}1, 如果\ x_2=2\\0, 其他\end{cases}\quad y_{23}=\begin{cases}1, 如果\ x_2=3\\0, 其他\end{cases}$$

$$y_{31}=\begin{cases}1, 如果\ x_3=1\\0, 其他\end{cases}\quad y_{32}=\begin{cases}1, 如果\ x_3=2\\0, 其他\end{cases}\quad y_{33}=\begin{cases}1, 如果\ x_3=3\\0, 其他\end{cases}$$

例如,看一下 $y_{11}$,$y_{12}$和 $y_{13}$的定义,这些定义表明:

$$\begin{aligned}&如果\ x_1=0,\quad (y_{11},y_{12},y_{13})=(0,0,0)\\&如果\ x_1=1,\quad (y_{11},y_{12},y_{13})=(1,0,0)\\&如果\ x_1=2,\quad (y_{11},y_{12},y_{13})=(0,1,0)\\&如果\ x_1=3,\quad (y_{11},y_{12},y_{13})=(0,0,1)\end{aligned}$$

$x_1$ 只能在这四个数据中取值,因为,这四个值是互斥的,$y_1$,$y_2$ 和 $y_3$ 必须满足下面的约束条件:

$$\begin{aligned}&y_{11}+y_{12}+y_{13}\leqslant 1\\&y_{11},y_{12}和\ y_{13}均为\ 0-1\ 变量\end{aligned}$$

选择满足这些条件的 $y_{11}$、$y_{12}$和 $y_{13}$等同于选择满足以下条件的 $x_1$ 的值:

$$\begin{aligned}&x_1\leqslant 3\\&x_1\leqslant 0\\&x_1 为\ 0-1\ 变量\end{aligned}$$

同样,其他的辅助 0-1 变量必须满足下面的约束条件:

$$\begin{aligned}&y_{21}+y_{22}+y_{23}\leqslant 1\\&y_{31}+y_{32}+y_{33}\leqslant 1\\&y_{21},y_{22},y_{23},y_{31},y_{32},y_{33}均为\ 0-1\ 变量\end{aligned}$$

选择满足这些条件的变量值,等同于选择满足以下条件的 $x_2$,$x_3$ 的值:

$$\begin{aligned}&x_2\leqslant 3\\&x_3\leqslant 3\\&x_2\leqslant 0,x_3\leqslant 0\\&x_2,x_3\ 为\ 0-1\ 变量\end{aligned}$$

有了这些 0-1 变量,我们将可以使用 BIP 模型为这个问题建模。

因此,我们可以运用以上这些引入辅助 0-1 变量的约束条件,为超级苏滋公司的问题建模。我们还需要加入问题的最初的约束:

$$x_1+x_2+x_3=5$$

这里关键的是要注意辅助 0-1 变量的定义隐含着:

$$\begin{aligned}&x_1=y_{11}+2y_{12}+3y_{13}\\&x_2=y_{21}+2y_{22}+3y_{23}\\&x_3=y_{31}+2y_{32}+3y_{33}\end{aligned}$$

因此,最初的约束可以表示成为:

$$y_{11}+2y_{12}+3y_{13}+y_{21}+2y_{22}+3y_{23}+y_{31}+2y_{32}+3y_{33}=5$$

最后要说明的是,我们不厌其烦的引入这么多的辅助 0-1 变量,并解释相关含义的原因,是因为使用这些辅助变量可以建立一个符合规划的目标函数。以百万美元为单位,表

9.7 中的三个利润列分别为：

$$\text{产品 1 的利润} = y_{11} + 3y_{12} + 3y_{13}$$
$$\text{产品 2 的利润} = 2y_{22} + 3y_{23}$$
$$\text{产品 3 的利润} = -y_{31} + 2y_{32} + 4y_{33}$$

将这些利润加总，可得总利润为：

$$P = y_{11} + 3y_{12} + 3y_{13} + 2y_{22} + 3y_{23} - y_{31} + 2y_{32} + 4y_{33}$$

因此，超级苏滋公司完整的 BIP 模型的电子表格如图 9.14 所示，其中的可变单元格 Solution(D11:F13)显示的是各辅助 0－1 变量的值。按下 Solver 求解按钮，在可变单元格中显示出该模型的最优解为，

$y_{11}=0$　$y_{12}=1$　$y_{13}=0$　因此　$x_1=2$　分配 2 个电视广告给产品 1

$y_{21}=0$　$y_{22}=0$　$y_{23}=0$　因此　$x_2=0$　产品 2 不作广告

$y_{31}=0$　$y_{32}=0$　$y_{33}=0$　因此　$x_3=3$　分配 3 个电视广告给产品 3

根据目标单元格 L9，可获得的总利润为 $P=7$(700 万美元)。分配给相应产品的电视广告输入 NumberOfSpots(D18:F18)所示。

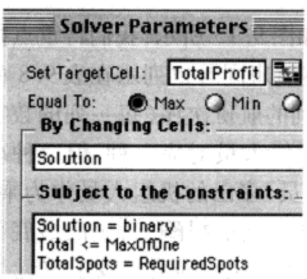
### 例 3：航班的人员排程问题

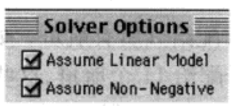
西南航空公司需要将其机组人员分配给其所有航班。如图 9.15 所示，我们将重点把以旧金山(SFO)为基地的三队机组人员分配给 11 个航班，这些航班同时也列示在表 9.8 的第 1 列中。另外的 12 列表示的是每一队机组人员可能被分配到的航班次序(每一列的数字表示航班的次序)。实际上，必须选择三种分配的次序，每队机组人员对应一种，但三种次序必须包括所有的航班(允许一个航班上有超过一队的机组人员，多出的机组人员作为乘客，但是工会合同规定公司必须为这些人付出的时间支付与工作相同的报酬)。表的最底部给出了将某一队机组人员分配到某一特定的航班次序，所需要支出的成本(以千美元为单位)。问题的目标是使所有的航班都分配到机组人员，并且三队机组人员的总成本最小。

**表 9.8　例 3 的数据(西南航空公司的案例)**

| 航　班 | 可行的航班次序 | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1. 旧金山—洛杉矶(SFO-LAX) | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | |
| 2. 旧金山—丹佛(SFO-DEN) | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | |
| 3. 旧金山—西雅图(SFO-SEA) | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 |
| 4. 洛杉矶—芝加哥(LAX-ORD) | | | | 2 | | | 2 | | 3 | 2 | | 3 |
| 5. 洛杉矶—旧金山(LAX-SFO) | 2 | | | | | 3 | | | | 5 | 5 | |
| 6. 芝加哥—丹佛(ORD-DEN) | | | | 3 | 3 | | | | 4 | | | |
| 7. 芝加哥—西雅图(ORD-SEA) | | | | | | | 3 | 3 | | 3 | 3 | 4 |
| 8. 丹佛—旧金山(DEN-SFO) | | 2 | | 4 | 4 | | | | 5 | | | |
| 9. 丹佛—芝加哥(DEN-ORD) | | | | | 2 | | 2 | | | 2 | | |
| 10. 西雅图—旧金山(SEA-SFO) | | | 2 | | | | 4 | 4 | | | | 5 |
| 11. 西雅图—洛杉矶(SEA-LAX) | | | | | | 2 | | | 2 | 4 | 4 | 2 |
| 成本，$ 1000s | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 5 | 7 | 8 | 9 | 9 | 8 | 9 |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Supersuds Corp. Marketing Plan** | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | **Profit** | | | | | | | |
| 4 | | **($millions)** | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | | | |
| 5 | | Number | 1 | 1 | 0 | -1 | | | |
| 6 | | of | 2 | 3 | 2 | 2 | | | |
| 7 | | Spots | 3 | 3 | 3 | 4 | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |
| 10 | | **Solution** | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | | | Total |
| 11 | | Number | 1 | 0 | 0 | 0 | | | Profit |
| 12 | | of | 2 | 1 | 0 | 0 | | | ($millions) |
| 13 | | Spots | 3 | 0 | 0 | 1 | | | 7 |
| 14 | | | Total | 1 | 0 | 1 | | | |
| 15 | | | | ≤ | ≤ | ≤ | | | |
| 16 | | Max Of One | | 1 | 1 | 1 | Total | | Required |
| 17 | | | | | | | Spots | | Spots |
| 18 | | Number of Spots | | 2 | 0 | 3 | 5 | = | 5 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| MaxOfOne | D16:F16 |
| NumberOfSpots | D18:F18 |
| Profit | D5:F7 |
| RequiredSpots | I18 |
| Solution | D11:F13 |
| Total | D14:F14 |
| TotalProfit | I13 |
| TotalSpots | G18 |

| | I |
|---|---|
| 10 | Total |
| 11 | Profit |
| 12 | ($millions) |
| 13 | =SUMPRODUCT(Profit,Solution) |

| | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|
| 14 | Total | =SUM(D11:D13) | =SUM(E11:E13) | =SUM(F11:F13) |

| | C | D | E |
|---|---|---|---|
| 18 | Number of Spots | =SUMPRODUCT(C11:C13,D11:D13) | =SUMPRODUCT(C11:C13,E11:E13) |

| | G |
|---|---|
| 16 | Total |
| 17 | Spots |
| 18 | =SUM(NumberOfSpots) |

图 9.14 超级苏滋公司问题的 BIP 电子表格模型，Excel Solver 求得最优解在 Solution（D11：F13）中给出，从而产生了 NumberOfSpots（D18：F18）。

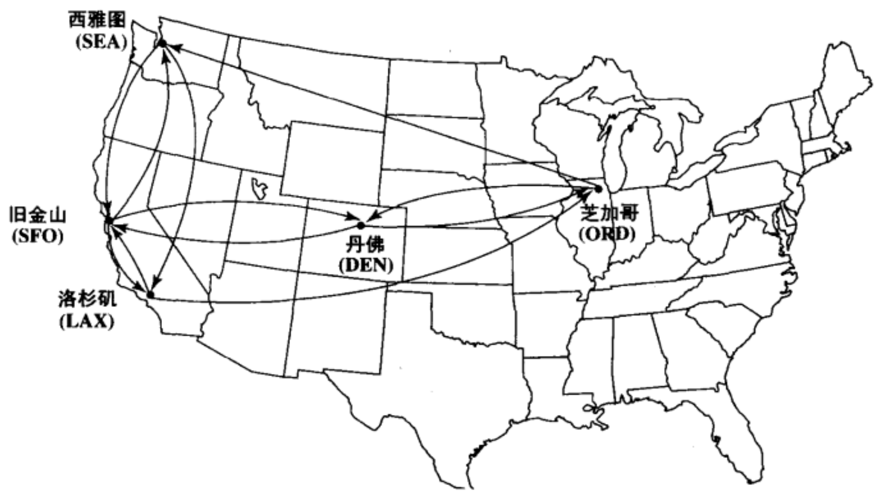



**图9.15** 箭头表示西南航空公司的11个航班，分配给以旧金山为基地的三队机组人员。

**用0-1变量建模**

由于有12个可行的航班次序，有相应的12个是非决策：

是否应该将$j$次序的航班分配给某一队特定的机组人员？($j=1,2,\cdots,12$)

因此，我们用12个0-1变量来分别表示这些决策：

$$x_j=\begin{cases}1, & \text{如果次序} j \text{指派给机组人员}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

每一个约束条件都保证分配机组人员到相应的一个航班，这可以说是这个建模问题最有趣的一步。例如，看一下表9.7中最后一个航班（西雅图—洛杉矶）。该航班包括5个序号(6,9,10,11,12)，因此必须选择其中的一个序号，结果就形成了如下的约束条件：

$$x_6+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}\geqslant 1$$

> 有这种约束形式的BIP模型称为分组覆盖问题。

根据同样的方法，建立另外10个航班的约束条件，图9.16显示的是该问题的一个完整的BIP电子表格模型。Flysequence(C22:N22)中是通过Excel Solver求得的最优解，以$x_j$为变量，最优解为：

$x_3=1$（将编号为3的航班次序分配给一组机组人员）
$x_4=1$（将编号为4的航班次序分配给一组机组人员）
$x_{11}=1$（将编号为11的航班次序分配给一组机组人员）

而其他所有的$x_j=0$，TotalCost(Q24)显示了总成本为18000美元（该问题的另一个最优解为$x_1=1,x_5=1,x_{12}=1$，而其他所有的$x_j=0$）。

正如9.2节末尾所讨论的那样，近年来，航空公司机组人员排程已成为BIP的一个重要应用。涉及上千个可能航班的问题可以通过应用上面介绍的相似的模型得到求解，只不过它涉及上千个0-1变量，而不是只有12个变量而已。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Southwestern Airways Crew Scheduling Problem** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | Flight Sequence | | | | | | | | | |
| 4 | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | | | |
| 5 | | Cost ($thousands) | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 5 | 7 | 8 | 9 | 9 | 8 | 9 | | | At |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | Least |
| 7 | | **Includes Segment?** | | | | | | | | | | | | | Total | | One |
| 8 | | SFO–LAX | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | ≥ | 1 |
| 9 | | SFO–DEN | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | ≥ | 1 |
| 10 | | SFO–SEA | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | ≥ | 1 |
| 11 | | LAX–ORD | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | ≥ | 1 |
| 12 | | LAX–SFO | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | ≥ | 1 |
| 13 | | ORD–DEN | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | ≥ | 1 |
| 14 | | ORD–SEA | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ≥ | 1 |
| 15 | | DEN–SFO | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | ≥ | 1 |
| 16 | | DEN–ORD | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | ≥ | 1 |
| 17 | | SEA–SFO | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | ≥ | 1 |
| 18 | | SEA–LAX | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ≥ | 1 |
| 19 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | | | Total | | Number |
| 21 | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Sequences | | of Crews |
| 22 | | Fly Sequence? | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | ≤ | 3 |
| 23 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | | | | | | | | Total Cost ($thousands) | | 18 |

| | A | B |
|---|---|---|
| 25 | **Flight Sequence Key** | |
| 26 | 1 | SFO-LAX |
| 27 | 2 | SFO-DEN-SFO |
| 28 | 3 | SFO-SEA-SFO |
| 29 | 4 | SFO-LAX-ORD-DEN-SFO |
| 30 | 5 | SFO-DEN-ORD-DEN-SFO |
| 31 | 6 | SFO-SEA-LAX-SFO |
| 32 | 7 | SFO-LAX-ORD-SEA-SFO |
| 33 | 8 | SFO-DEN-ORD-SEA-SFO |
| 34 | 9 | SFO-SEA-LAX-ORD-DEN-SFO |
| 35 | 10 | SFO-LAX-ORD-SEA-LAX-SFO |
| 36 | 11 | SFO-DEN-ORD-SEA-LAX-SFO |
| 37 | 12 | SFO-SEA-LAX-ORD-SEA-SFO |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalCost

Equal To: ○ Max ● Min ○

**By Changing Cells:**

FlySequence?

**Subject to the Constraints:**

FlySequence? = binary
Total >= AtLeastOne
TotalSequences <= NumberOfCrews

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| | O |
|---|---|
| 7 | Total |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:N8,FlySequence?) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:N9,FlySequence?) |
| 10 | =SUMPRODUCT(C10:N10,FlySequence?) |
| 11 | =SUMPRODUCT(C11:N11,FlySequence?) |
| 12 | =SUMPRODUCT(C12:N12,FlySequence?) |
| 13 | =SUMPRODUCT(C13:N13,FlySequence?) |
| 14 | =SUMPRODUCT(C14:N14,FlySequence?) |
| 15 | =SUMPRODUCT(C15:N15,FlySequence?) |
| 16 | =SUMPRODUCT(C16:N16,FlySequence?) |
| 17 | =SUMPRODUCT(C17:N17,FlySequence?) |
| 18 | =SUMPRODUCT(C18:N18,FlySequence?) |
| 19 | |
| 20 | Total |
| 21 | Sequences |
| 22 | =SUM(FlySequence?) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| AtLeastOne | Q8:Q18 |
| Cost | C5:N5 |
| FlySequence | C22:N22 |
| IncludesSegment? | C8:N18 |
| NumberOfCrews | Q22 |
| Total | O8:O18 |
| TotalCost | Q24 |
| TotalSequences | O22 |

| | P | Q |
|---|---|---|
| 24 | Total Cost ($thousands) | =SUMPRODUCT(Cost,FlySequence?) |

图9.16 西南航空公司人员排程问题BIP模型的电子表格形式，其中Flysequence(C22:N22)显示了由Excel Solver求解出的最优解，(A25:D37)列出了供选择的航班序号。

## 问题回顾

1. 例1中的约束1与上一节变形2下伟恩德问题的约束有何联系？
2. 例1中，引入辅助0-1变量后，这些变量的哪些约束限制了最多只能选两种新产品

来生产？

3. 使用整数变量定义例 2 的决策变量时，为什么写不出符合整数规划要求的目标函数？
4. 在例 2 中引入辅助 0 - 1 变量后，产生了哪几组互斥变量？
5. 在例 3 中，每一航班都有一个约束以保证分配到一组机组人员，写出这一约束的数学表达式，然后解释一下具体的含义。

## 9.6　本章小结

线性规划的可分性原则使得决策变量可以取满足功能和非负约束的任何值，包括分数。当这个假设由于部分或所有变量的取值需要限制为整数而被破坏时，就应该使用整数规划。Excel Solver 能够解决一定规模的整数规划问题。

管理者经常会遇到一些是非决策问题。该类问题仅有两种可能选择：对于其中的某一选项是拒绝还是接受。每个 0 - 1 整数规划（BIP）模型都可以同时考虑多个选项，一个 0 - 1 决策变量对应于一个选项，而混合的 BIP 模型还可以包含一些连续的决策变量。

许多公司因为运用 BIP 模型来规划问题，而节省了大量的开支，这些应用包括资金预算、厂址选择、设计生产和配送网络、安排运货、规划相互关联的活动、资产剥离以及在航空领域的多种用途。

在处理一些无法直接建立 BIP 模型的问题时，运用辅助 0 - 1 变量是很有用的，辅助变量可以将问题标准化，从而可以用标准的算法求解。辅助变量可用来处理很多问题，例如：(1)包含有安装设备准备成本的生产问题；(2)互斥的产品组合问题；(3)二选一的约束问题。

9.5 节为阐述如何运用 0 - 1 变量建模的技术举了一系列的例子。

## 专业术语

**辅助 0 - 1 变量**（Auxiliary binary variables）：将这一变量引入模型，不是用来表示一个是非决策，而是为了能够将原模型描述称为一个 0 - 1 整数规划问题。（9.4 节）

**0 - 1 决策变量**（Binary decision variables）：一个 0 - 1 决策变量表示一个是非决策，其中 1 值表示"是"，0 值表示"否"。（9.4 节）

**0 - 1 整数规划**（Binary integer programming）：0 - 1 整数规划问题的模型与线性规划问题的模型仅有的区别在于将线性规划模型中的非负限制改为要求决策变量为 0 - 1 整数变量。（9.1 节）

**0 - 1 变量**（Binary variables）：取值只能为 0 或 1 的变量。（9.1 节）

**BIP**：0 - 1 整数规划问题的缩写。（9.1 节）

**相依决策**（Contingent decision）：如果一个是非决策只能在另一是非决策为"是"的情况下才能为"是"，这一决策就是相依决策。（9.2 节）

**可分性假设**（Divisibility assumption）：线性规划的基本假设，使得决策变量可以取满足函数和非负约束的任何值，包括分数。（9.1 节）

**二选一约束**（Either-or constraints）：在一对约束条件中，只可能存在两个中的一个的约束条件。（9.4 节）

**一般整数规划**（General integer programming）：至少部分整数变量能够取到任何满足函数和非负约束的整数而不限于 0 和 1 的整数规划。（9.1 节）

**整数规划的图解法**（Graphical method for integer programming）：一种将问题在两维图上画出来，求解只有两个决策变量的整数规划的方法。（9.1 节）

**整数规划**（Integer programming）：线性规划的一种变形，在一些或全部决策变量上加上了必须取整数值的约束。包括一般整数规划和 0 - 1 整数规划。

(9.1 节)

**整数变量**(Integer variable):只允许取整数值的变量。(9.1 节)

**LP 放宽**(LP relaxation):通过去除整数规划问题中限制至少部分决策变量必须取整数值的约束而得到的线性规划问题。(9.1 节)

**混合 0－1 整数规划问题**(Mixed BIP problem):在一个 0－1 整数规划问题中,一部分的决策变量必须为 0－1 变量,而其他的决策变量没有特别的限制。(9.1 节)

**混合整数规划**(Mixed integer programming):只有部分变量要求取整数值的整数规划。(9.1 节)

**互斥的选项**(Mutually exclusive alternatives):在一组选项中,选择了其中的任何一个就排除了其他任何选项的可能性。(9.2 节)

**纯 0－1 整数规划问题**(Pure BIP problem):在 0－1 整数规划问题中所有的变量均为 0－1 整数变量。(9.1 节)

**是非决策**(Yes-or-no decision):这种决策只能选"是"(以 1 表示),或选"非"(以 0 表示)。(9.1 节)

## 本章管理科学课件的学习辅助

"Ch. 9—**整数规划**"Excel **文件**:

TBA 航空公司例子
加利福尼亚制造公司的案例研究
伟恩德公司例子的三种变形
固特产品公司例子
超级苏滋公司例子
西南航空公司例子

Excel **加载宏**:

Premium Solver for Education
Solver Table

CD-ROM **上本章的附件**:

关于如何求解 0－1 整数规划问题的一些看法

## 习　题

问题的左边加有 E* 的问题,必须用 Excel 建模求解(除非你的指导教师不允许你这么做),题号前打有 * 的表示该题的全部或部分答案在书后给出。

9.1. 文森特·卡多扎是一家机械制造厂的所有人和经理。这家工厂依据定制化的订单运作。这个星期三下午,他收到两个客户下达紧急订单的电话。一个是拖车挂钩公司要求定制重型牵引条。另一个微型汽车承运公司需要定制稳定杆。两个客户都希望周末前(两个工作日)能够尽可能多地获得产品。由于这两种产品都需要使用同样的两台机器,文森特需要在这个下午决定并通知客户两天后每一种产品他将提供多少。

每一个牵引条需要在机器 1 上加工 3.2 小时,在机器 2 上加工 2 小时。每一个稳定杆需要在机器 1 上加工 2.4 小时,在机器 2 上加工 3 小时。在接下来的两天中,机器 1 可以使用 16 小时,机器 2 可以使用 15 小时。每一个牵引条的利润是 130 美元,每一个稳定杆的利润是 150 美元。

文森特现在需要决定产品数量的组合,使得总利润最大。

a. 用代数形式建立这个问题的整数规划模型。

b. 使用整数规划的图解法求解这个模型。

E* c. 在电子表格上建模并求解。

9.2. Pawtucket 大学计划为其图书馆购买新的复印机。管理科学系的三个成员正在分析如何购买。他们正在考虑两种不同的型号:A 型,一种高速复印机;B 型,一种较为慢速但比较便宜的复印机。A 型每天可以处理 20000 页,花费 6000 美元。B 型每天处理 10000 页,花费 4000 美元。他们希望至少有六台复印机,使得他们能够遍布图书馆。他们还希望至少要有一台高速复印机。最后,这些复印机必须每天至少能够处理 75000 页。目标是确定这两种复印机的组合,使得它们能够以最低的成本满足所有这些要求。

E* a. 为该问题建立电子表格模型并求解。

b. 用代数形式建立相同的模型。

c. 使用整数规划的图解法求解这个模型。

9.3.* 考虑如下代数形式的整数规划模型：

$$\text{最大化}\quad \text{利润}=5x_1+x_2$$

约束条件

$$-x_1+2x_2\leqslant 4$$
$$x_1-x_2\leqslant 1$$
$$4x_1+x_2\leqslant 12$$

且

$$x_1\geqslant 0\quad x_2\geqslant 0$$
$$x_1,x_2\text{均为整数}$$

a. 使用整数规划的图解法求解这个模型。

b. 使用线性规划的图解法求解这个模型的 LP 放宽模型。将这个解取整到最接近的整数解，并检查解是否可行。然后通过以各种可能的方式取整 LP 放宽的解，枚举所有的取整解（也就是对每一个非整数解都向上和向下取整）。对于每一个取整解，检查其可行性，并且在可行的情况下计算利润。这些取整可行解是不是整数规划的最优解？

9.4. 据 9.3 的提示，求解下面代数形式的整数规划模型：

$$\text{最大化}\quad \text{利润}=220x_1+80x_2$$

约束条件

$$5x_1+2x_2\leqslant 16$$
$$2x_1-x_2\leqslant 4$$
$$-x_1+2x_2\leqslant 4$$

且

$$x_1\geqslant 0\quad x_2\geqslant 0$$
$$x_1,x_2\text{ 均为整数}$$

9.5.* 东北航空公司正在考虑购买新的远程、中程和短程喷气式客机。每架远程客机的采购价格是 6700 万美元，中程客机是 5000 万美元，短程客机是 3500 万美元。董事会授权此次采购的最大资金额度是 15 亿美元。无论购买哪种飞机，这些飞机的航程必须足够大，使得这些飞机能够得到最充分的利用。估计每架远程飞机的年净利润（扣除投资回收成本）是 420 万美元，中程飞机是 300 万美元，短程飞机是 230 万美元。

据估计公司有足够的接受过训练的飞行员装备 30 架新飞机。如果只购买短程飞机，维护设施能够处理 40 架新飞机。但是在使用维护设施方面，每一架中程客机相当于 1⅓架短程客机，每一架远程客机相当于 1⅔架短程客机。

这里给出的信息是通过对问题的先期分析得到的。接下来将会进行更加详细的分析。但是使用上述数据作为第一步的近似，管理层希望知道每种飞机各需要采购多少才能使得利润最大。

E* a. 建立这个问题的电子表格模型并求解。

b. 建立代数形式模型。

9.6. 重新考虑问题 6.8。该问题涉及到承包商苏珊·迈尔需要安排从两个沙土矿向三个建筑工地运送沙土。

苏珊现在需要雇用卡车（以及司机）完成运输工作。每一辆卡车只能从一个沙土矿向一个建筑工地运送沙土。除了问题 6.8 中的运输和开采成本外，现在又增加了雇用每一辆卡车需要支付的 50 美元固定费用。一辆卡车能够载重 5 吨，但是并不要求它满载。对于每一个沙土矿和建筑工地的组合来说，现在有两个决策需要制定：使用的卡车数量和运送的沙土数。

a. 为这个问题建立代数形式的混合整数规划模型。

E* b. 在电子表格上建立这个模型并求解。

9.7. 重新考虑 9.2 节中加利福尼亚制造公司的例子，圣迭哥市长与公司总裁阿蒙德·奥尔特加联系，希望能够在该城市建新厂，或者再建一个仓库。由于税收上的优惠，阿蒙德的员工估计在圣迭哥建厂可获得的净现值为 700 万美元，而投资的数额为 400 万美元。建仓库的净现值为 500 万美元，需要投资 300 万美元（只有在建厂的基础上才会考虑在该地建仓库）。阿蒙德要求史蒂夫·陈在原来的管理科学分析中加入这一选择，对问题进行修正，并重新求解。问题的目标仍然是在 1000 万美元投资资金总额的限制下，找出能获得最大净现值的投资组合。

a. 为该问题建立一个代数形式的 BIP 模型。

E* b. 将上面的模型用电子表格表示，并求解。

9.8. 选择9.2节中一个应用BIP的例子，阅读在Interfaces期刊中相应的文章，并写一份关于这个例子的两页的总结，需要说明该应用的好处。（描述这些应用的大多数文章可以从网上下载。网址为 www.mhhe.com/hillier2e/articals.）

9.9.* 一对年轻的夫妇，伊伍和史蒂夫想将家务在两个人之间分摊一下，希望能以最小的总时间完成所有的家务，这些家务包括购物、做饭、洗碗和洗衣服。两人做各种家务的效率是不同的，每一工作所需的时间如下表所示，

| | 每周所需时间（小时） | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 购物 | 做饭 | 洗碗 | 洗衣服 |
| 伊伍 | 4.5 | 7.8 | 3.6 | 2.9 |
| 史蒂夫 | 4.9 | 7.2 | 4.3 | 3.1 |

a. 为该问题建立一个代数形式的BIP模型。

E* b. 将上面的模型用电子表格表示，并求解。

9.10. 房地产开发商彼特森 & 约翰森公司（Peterson and Johnson）正在考虑五个投资项目，以百万美元为单位，下表的数据表明了各项目所需的投资资金以及估计的长期收益（净现值）。

该公司的业主戴维·彼特森和罗恩·约翰森为这些投资募集了2000万美元资金，他们希望能够在2000万美元的投资限额内，组合各种投资项目，以获得最大的长期收益。

| | 开发项目（百万美元） | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 估计利润 | 1 | 1.8 | 1.6 | 0.8 | 1.4 |
| 所需资金 | 6 | 12 | 10 | 4 | 8 |

a. 为该问题建立一个代数形式的BIP模型。

E* b. 将上面的模型用电子表格表示，并求解。

E* c. 通过使用Solver Table针对投资数量（百万美元）：16、18、20、22、24、26、28和30，对开发项目可供使用的资金数量进行敏感性分析。在Solver Table中将可变单元格和目标单元格都作为输出单元格。

E*9.11. 通用车轮公司（General Wheels Co.）的董事会正在考虑几个大型的投资项目，每个项目只能投资一次，且各项目所需的投资金额与能够产生的长期收益（净现值）是不同的，如下表所示，

| 投资机会 | 估计利润（百万美元） | 所需资金（百万美元） |
|---|---|---|
| 1 | 17 | 43 |
| 2 | 10 | 28 |
| 3 | 15 | 34 |
| 4 | 19 | 48 |
| 5 | 7 | 17 |
| 6 | 13 | 32 |
| 7 | 9 | 23 |

总的投资金额为1亿美元，其中投资机会1和机会2是互斥的，机会3与机会4也是互斥的。此外，如果不选择机会1或是机会2的话，就不能选机会3、4。机会5、6、7上没有附加约束。问题的目标是通过组合各种投资，使得估计的长期收益（净现值）最大。

a. 为该问题在电子表格上建立BIP模型。

E* b. 通过使用Solver Table针对投资数量（百万美元）：80、90、100、110、……、200，对投资机会可供使用的资金数量进行敏感性分析。在Solver Table中将可变单元格和目标单元格都作为输出单元格。

E*9.12. 重新考虑问题6.22，游泳队的教练要将游泳运动员分配到几个200米混合泳小组中去。为该问题在电子表格上建立BIP模型，判断该问题中的各组互斥方案。

E*9.13.* 进步公司（Progressive）的研发部最近开发出了四种产品，管理层现在必须决定生产哪些产品，以及各自的生产水平。为此，公司要求管理科学小组研究该问题，找到最优的产品组合。

每一产品的生产都有一笔为数不小的准备成本，如下表的第一行所示，管理层的目标是找出最优的产品组合，以获得最大的总利润（总收入减去准备成本）。

| | 产品 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 准备成本 | $50000 | $40000 | $70000 | $60000 |
| 边际收益 | 70 | 60 | 90 | 80 |

以连续决策变量 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 和 $x_4$ 表示产品 1、2、3、4 的总产量，管理层在这些变量上规定了如下的一些限制，

1. 最多只能选择两种产品。
2. 只有在选了产品 1 或 2 的基础上，才可以选择产品 3 或 4。
3. 或者 $5x_1+3x_2+6x_3+4x_4\leqslant 6000$
   或者 $4x_1+6x_2+3x_3+5x_4\leqslant 6000$

使用辅助 0－1 变量，为该问题建立混合的 BIP 电子表格模型。

E*9.14. Toys-R-4-U 公司为即将到来的圣诞节开发了两种新型玩具，可能会将这两种新玩具加入原有的生产线中去。为了生产新产品，公司需要安装生产设备，玩具 1 和玩具 2 的准备成本分别为 50000 美元和 80000 美元。在扣除了这一准备成本之后，玩具 1 和玩具 2 的单位利润分别为 10 美元和 15 美元。

公司有两个工厂可以生产这些新玩具，但是为了避免重复的准备成本，只准备在一个工厂生产，并且选择收益较大的那个工厂。为了方便管理，如果需要同时生产两种产品的话，两种产品将安排在一个工厂中生产。

玩具 1 在工厂 1 中每小时可生产 50 单位，在工厂 2 中，每小时 40 单位。玩具 2 在工厂 1 中每小时 40 单位，工厂 2 中每小时 25 单位。工厂 1 和工厂 2 可以用来生产新产品的生产时间分别为 500 小时和 700 小时。

因为圣诞节之后是否继续生产这些产品还不能断定，所以该问题是如何确定圣诞节前各种产品的产量，才能获得最大的利润。为该问题建立混合的 BIP 电子表格模型。

E*9.15. Fly-Right 飞机制造公司将小型的喷气式飞机出售给各大公司，供各公司的执行经理们使用。因此，公司的客户有时会要求按照他们的要求定制飞机，如果是这样的话，这些飞机的制造就需要为数不小的准备成本。

Fly-Right 公司最近接到了三个客户的紧急订单，但是，因为公司的生产设备所能提供的生产已经基本上用足了，所以，公司不能接受全部三个客户的订单，必须决策接受哪些客户的订单，各自的数量为多少。

相关的数据在下表中给出，第一行表示的是三个客户产品的生产准备成本。如果生产某一种产品，其边际净收益（购买价减去边际生产成本）如表的第二行所示。第三行表示的是生产某一产品占生产能力的百分比。最后一行是各客户需要的最大数量的产品（少于该数值也可以接受）。

| | 客户 1 | 客户 2 | 客户 3 |
|---|---|---|---|
| 准备成本（美元） | 300 万 | 200 万 | 0 |
| 边际净收益（美元） | 200 万 | 300 万 | 80 万 |
| 每架飞机的利用率 | 20% | 40% | 20% |
| 最多订购飞机数 | 3 | 2 | 5 |

Fly-Right 公司现在想要确定到底要为各客户生产多少数量的飞机，能获得最大的总收益（总收入减去准备成本）。为该问题建立一个同时包含整数决策变量和 0－1 决策变量的电子表格模型并求解。

E*9.16. 重新考虑 9.15 中 Fly-Right 公司的问题，通过对成本和收入的进一步的分析表明，生产飞机的潜在收益并不能简单地以准备成本和固定的单位边际收入来表示，而是如下表所示，

| 制造的飞机数 | 利润（百万美元） | | |
|---|---|---|---|
| | 客户 1 | 客户 2 | 客户 3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | －1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 5 | 3 |
| 3 | 4 | | 5 |
| 4 | | | 6 |
| 5 | | | 7 |

运用辅助 0－1 变量，为这一修正的问题建立 BIP 电子表格模型，并求解。

E*9.17. *重新考虑问题 4.5，Omega 制造公司的管理层正在考虑将剩余的生产能力用到一种或两种或三种产品中去（参见书后该问题线性规划模型的部分答案）。管理层决定最多只能在三种产品中选择两种来生产，运用辅助 0－1 变量，为这一修正的问题建立 BIP 电子表格模型，并求解。

9.18. 考虑具有如下代数形式的整数非线性规划问题。

最大化 利润 $=4x_1^{\ 2}-x_1^{\ 3}+10x_2^{\ 2}-x_2^{\ 4}$

约束条件

$$x_1+x_2\leqslant 3$$

且

$$x_1\geqslant 0 \quad x_2\geqslant 0$$

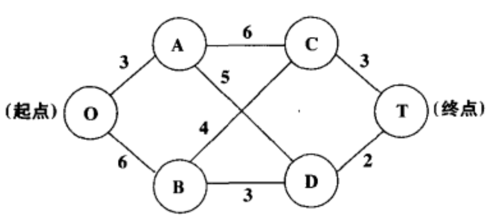
$$x_1,\ x_2\text{均为整数}$$

a. 使用6个0-1决策变量,将这一代数形式的模型转化成为纯BIP模型。

E* b. 为该问题在电子表格上建模并求解。

c. 重新解释在b中求得的最优解 $x_1, x_2$ 对于原问题的含义。

E*9.19. *考虑下面特殊形式的最短路径问题(在7.4节中有讨论),节点在各列中,而每条路径一次只能向前移动一列。连线上的数字表示的是距离(英里为单位),问题的目标是找到从原点到目的地的最短路径。




该问题也可以表示成为一个BIP模型,包含互斥选项和相依决策。在电子表格上建立BIP模型并求解,判别哪些是互斥选项,哪些是相依决策。

E*9.20. 速递公司(Speedy Delivery)提供美国境内大包裹的快递服务,所有的包裹两天内都能送到。包裹在晚上达到各收集中心,并于第二天早上装上送往该地区的几辆卡车。因为快递行业的竞争加剧,为了减少平均的送货时间,必须将各包裹根据目的地的地理位置加以分类,并分装到不同的卡车上。

一天早上,蓝谷(Blue Valley)收集中心的发货员香农·劳夫顿正在忙碌地工作着,她下面的三辆卡车将会在一小时内到达。总计有9个包裹需要送出,并且均须送往几英里以外的地方。与往常一样,香农将这些地点输入电脑,她使用的是公司的一种特制软件,称为Dispatcher的决策支持系统。该软件第一步就是根据输入的地点,找出各辆卡车可能的运输路线。这些路线如下表所示(其中各列的数字表示送货的先后次序),表中同时给出了各路线估计需要的运输时间。

| 运输 | 可行的路线 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 地 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| A | 1 | | | | 1 | | | | 1 | |
| B | | 2 | | 1 | | 2 | | | 2 | 2 |
| C | | | 3 | 3 | | | 3 | | 3 | |
| D | 2 | | | | | 1 | | 1 | | |
| E | | | 2 | 2 | | 3 | | | | |
| F | | 1 | | | 2 | | | | | |
| G | 3 | | | | | | 1 | 2 | | 3 |
| H | | | 1 | | 3 | | | | | 1 |
| I | | 3 | | 4 | | | 2 | | | |
| 时间(小时) | 6 | 4 | 7 | 5 | 4 | 6 | 5 | 3 | 7 | 6 |

Dispatcher是一种互动式的软件,会将各种路线显示给香农,要求她同意或修正(例如,计算机可能不知道最近的水灾使得一些路线不能通行)。在香农同意了各种可能的路线以及所需时间的估计值之后,Dispatcher会建立并求解BIP模型,为每辆卡车选出一条路线,以最短的总时间完成各地的送货工作,即每个地点都在并且只在一条路线上。

运用表中所给的数据,说明Dispatcher是如何在电子表格上建立并求解BIP模型的。

E*9.21. 越来越多的美国人退休后迁往较暖和的地方。为了利用这一趋势,Sunny Skies Unlimited公司准备从事一项大型的房地产开发项目。该项目是建造一个占地数平方英里的全新的退休社区,该社区名为Pilgrim Haven。需要决策的问题之一是如何布置两个消防站。为了便于规划,整个社区划分为5个区域,每个区域最多只能有一个消防站。每个消防站必须负责处理所处区域以及分配给该站的其他区域发生的火灾。这样,要作出的决策就包括:(1)消防站设在哪个区域;(2)将其他区域分配给某一消防站。问题的目标是发生火情之后平均的反应时间最短。

下表说明的是将消防站设在各区域

(行)的情况下,每个区域对火情反应的平均时间,表中最后一行给出的是各区域每天估计会发生火情的平均次数。

| 消防站所在区域 | 各区发生火情后的反应时间(分) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 5 | 12 | 30 | 20 | 15 |
| 2 | 20 | 4 | 15 | 10 | 25 |
| 3 | 15 | 20 | 6 | 15 | 12 |
| 4 | 25 | 15 | 25 | 4 | 10 |
| 5 | 10 | 25 | 15 | 12 | 5 |
| 每天平均发生火情次数 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |

为该问题在电子表格上建立 BIP 模型并求解,判别哪些约束对应于互斥选项或是相依决策。

9.22. 重新考虑问题 9.21, Sunny Skies Unlimited 公司的管理层现在认为应该基于成本来决定各个消防站所处的区域。在各区域建消防站的成本分别如下(单位:美元),区域 1 为 200000,区域 2 为 250000,区域 3 为 400000,区域 4 为 300000,区域 5 为 500000。管理层的目标为,确定消防站所在区域,要求总成本最小,并且保证每个区域发生火情后,消防站的反应时间不能超过 15 分钟(平均数)。

与前面一题相比,这里不再有消防站总数的限制,此外,如果对于某一个区域,有几个消防站的反应时间在 15 分钟之内,那就必需要将每个区域限制给一个消防站。

a. 为该问题建立代数形式的纯 BIP 模型,模型中包含 5 个 0 - 1 变量。

E* b. 将模型显示在电子表格上并求解。

# 案例 9.1　能力问题

班特里·哈米尔顿将《纽约时报》财经版放在了会议室的桌上,然后看着他的助手们从绵软的座椅中站起。

哈米尔顿先生想说一件事情。

他将《华尔街》放在《纽约时报》的上面,看着他的助手们睁大他们疲惫而沉重的眼睛。

哈米尔顿先生想说一件大事情。

然后他将《金融时报》放在一堆报纸上,看着他的助手们的汗珠从眉毛上流下来。

哈米尔顿先生希望他要说的能够深深烙印在助手们的脑海中,无法磨灭。

"我刚才给了你们三份最主要的财经报纸,上面写着今天的头条财经新闻",哈米尔顿先生以坚定而带有怒气的声音说着。"我亲爱的助手们,我们的公司正在走向地狱。要我给你们读读新闻吗?《纽约时报》上说,'CommuniCorp 的股票跌至 52 周的最低点'。《华尔街》上说,'CommuniCorp 在一年里丧失了寻呼机市场 25% 的份额'。哦,还有我的挚爱,《金融时报》,'CommuniCorp 无法沟通:CommuniCorp 股票由于内部沟通混乱而下跌'。我们的公司为何会陷入如此可怕的境地?"

哈米尔顿先生在投影仪上放了一张幻灯片,显示了一条微微上升的斜线。"这是我们过去 12 个月的生产力图。你们可以从图中看到,去年我们寻呼机生产的效率稳步上升。显然,生产力不是我们问题的根源。"

哈米尔顿先生在投影仪上放了第二张幻灯片,显示了一条急剧上升的斜线。"这是我们过去 12 个月里错过的或延迟实现的订单。"哈米尔顿先生听到了他的助手们发出的叹息声。"你们已经看到,我们错过的或延迟实现的订单在过去的 12 个月里稳定而急剧上升。我想这个趋势解释了我们为什么丧失了市场份额,导致我们的股票跌至 52 周以来的最低点。我们激怒并丧失了业务零售商,依靠及时投递满足消费者需求的我们的客户。"

"为什么在我们的生产力水平应该能够使得我们满足所有订单的情况下,仍然错过了我们的交付期?"哈米尔顿先生问,"我问了很多部门这个问题。"

"我们生产的寻呼机都见鬼了!"哈米尔顿以怀疑的语气说着。"营销与销售部门不与生产部门沟通,于是生产主管不知道生产什么寻呼机来满足订单。生产主管希望保持工厂生产,于是他们只管生产,不管寻呼机是否已经被订购。生产好的寻呼机放入仓库中,但是营销和销售主管不知道仓库中寻呼机的类型和数量。他们试图与仓库主管沟通,来确认寻呼机库存是否能够满足订单,但是他们很少能够得到他们的问题的回音。"

哈米尔顿先生停了停,直接看了看他的助手们。"女士们,先生们,看起来好像我们遇到了严重的内

部沟通问题。我希望立即解决这个问题。我想从安装全公司范围的电脑网络开始，保证所有的部门能够获得关键的文件，并且能够以电子邮件方式方便地相互沟通。由于这个企业内部网会带来现有通讯设施的重大改变，我认为系统中会有一些问题，同时也会遇到一些员工的阻力。因此我想要逐步推进企业内部网的安装。”

哈米尔顿先生将下面的这些时间表和要求递给他的助手们(IN 代表企业内部网)：

| 第 1 个月 | 第 2 个月 | 第 3 个月 | 第 4 个月 | 第 5 个月 |
|---|---|---|---|---|
| IN 培训 | 在销售部门安装 IN | 在生产部门安装 IN | 在仓库安装 IN | 在营销部门安装 IN |

| 部　　门 | 员工数 |
|---|---|
| 销售 | 60 |
| 生产 | 200 |
| 仓库 | 30 |
| 营销 | 75 |

哈米尔顿先生接下来解释了时间期限和要求图：“在第一个月，我不想在任何部门实施企业内部网。我只是想将关于此的信息传递给大家，并得到员工的支持。在第二个月，我想让销售部门使用企业内部网，因为销售部门接收了所有来自于客户的重要信息。在第三个月，制造部门也要进入企业内部网。第四个月，我想让在仓库安装企业内部网。在第五个月，也就是最后一个月，我想让营销部门进入企业内部网。在时间期限下面的需求表列出了每个部门要求使用企业内部网的员工人数。”

哈米尔顿先生转向埃米利·琼斯，公司信息管理部的领导：“我需要你帮助制定企业内部网安装计划。特别是公司需要采购企业内部网络的服务器。员工将与公司服务器连接，将信息下载到他们自己的电脑上。”

哈米尔顿先生递给埃米利下面的表格。这张表格显示了可供选用的服务器、可支持的用户数和每台服务器的成本。

| 服务器类型 | 服务器支持员工数 | 服务器成本 |
|---|---|---|
| 标准英特尔奔腾个人电脑 | 30 人 | $2500 |
| 加强型英特尔奔腾个人电脑 | 80 人 | 5000 |
| SGI 工作站 | 200 人 | 10000 |
| Sun 工作站 | 2000 人 | 25000 |

“埃米利，我需要你决定什么时候购买什么样的服务器的成本最小，并且能够保证公司的服务器有足够的能力满足企业内部网实施的时间进程，”哈米尔顿先生说，“例如，你可以决定在第一个月购买一个大型的服务器来支持所有的员工，或者购买若干个小的服务器支持所有的员工，或者每个月购买一个小型的服务器支持每一批新允许登录企业内部网的员工。”

“这里有一些因素会使你的决策复杂化，”哈米尔顿先生接着说，“两个服务器制造商愿意向 CommuniCorp 提供折扣。SGI 愿意给每一台购买的服务器以 10% 的折扣，但是只有在你购买服务器的第一个月或第二个月有效。Sun 愿意给你在前两个月购买的所有服务器以 25% 的折扣。同时你还受到第一个月可以使用的资金数量的限制。CommuniCorp 已经为下两个月安排了大部分的预算，因此在第一和第二个月，你只有 9500 美元可以购买服务器。最后，生产部门至少需要三种性能比较好的服务器中的一种。你能够在本周末把你的决策放在我的桌子上吗？”

a. 埃米利首先决定以每月采购的方式评估服务器的数量和类型。对于每一个月，建立一个整数规划模型，在给出上个月的结果的情况下，确定在那个月里埃米利应当购买何种服务器，才能使得那个月里的成本最小并且能够支持新的用户。她应当在每个月里购买何种类型、多少台服务器？这个计划的总费用是多少？
b. 埃米利意识到如果她在前几个月里购买一个较大的服务器来满足后几个月用户的需求，可能能够节省费用。因此她决定考虑整个计划期购买的服务器的类型和数量。建立一个整数规划模型来确定埃米利应该在每一个月里购买何种服务器，使得总成本最低，并且能够支持所有新用户。她应当在每个月里购买何种类型、多少台服务器？这个计划的总费用是多少？
c. 为什么第一种方法得到结果与第二种方法得到的不同？

d. 在埃米利的问题模型中是否还有其他埃米利没有考虑在内的成本？如果是这样，这些成本是什么？

e. CommuniCorp 各个部门接下来关于企业内部网可能会考虑一些什么问题？

## 案例9.2　分配艺术品

这一切对于旧金山的一个穷艺术家艾西·布里格斯来说真像是一场梦。在一个星期五的傍晚，他到附近的百货店买一些牛奶，并随手买了一张加利福尼亚彩票，结果几个星期之后，他成了百万富翁。

艾西并不想将这些钱大肆地挥霍在物质生活中，相反的，他想用这些钱来支持他的艺术追求。艾西很清楚在这个科技化的后现代社会里，艺术家是多么不容易得到人们的认同，因为很少有人是具有艺术欣赏能力的，并且对艺术的财力支持也是少之又少。因此，他决定用这笔钱来举办一次在旧金山博物馆的现代艺术展。

艾西向博物馆的负责人说明这一事情之后，他们都欣喜若狂，因为，艾西除了支持展览会之外还另外捐助了100万美元。博物馆的负责人之一克雷斯特·麦肯泽将与艾西一起策划这次展览会。展览会将在一年后举办，并会连续展出两个月。

艾西开始着手从各个现代艺术协会中筛选出可供展出的艺术品及其作者，之后，他将一张写明了各艺术家、作品以及作品价格的清单交给克雷斯特①。

艾西对这次展览会提出了一些要求。因为他相信现在大多数美国人都缺少关于艺术和艺术分类的最基本的知识，所以，他希望能够通过这一展览会使参观者受到教育和启发，并且能够意识到抽象艺术也是一种艺术的形式。但由于他个人并不完全赞同抽象的艺术风格，所以只在展览会上展出一件抽象派的作品。此外，艾西希望参观者能够比较一下用三维金属线做成的雕像与电脑生成的二维图片中的精细线条，因此，他要求如果有电脑图展出的话，必须至少同时展出一件金属线雕像。另外，艾西希望能够展出所有艺术风格的绘画作品，但是，为了使绘画与其他艺术品在数量上保持平衡，又不能展出太多的绘画。因此，他决定至少展出一幅写真画、一幅立体派绘画、一幅表现派绘画以及一幅油画。同时，绘画作品的总数不能超过其他作品的两倍。

艾西希望将自己的作品在展览会上展出，一方面因为他是这次展会的赞助者，另一方面他的画在当地还是很受欢迎的。

艾西对一些艺术家还有一些个人的偏好。最近，他与凯蒂·坦特正处于热恋当中，因此，凯蒂的两件作品都将展出。戴维·利曼和里克·罗尔斯是艾西的两个最好的朋友，他又不想在两人身上有任何的差别，因此，两人参展的作品数量相等，每人至少一件。尽管滋基(Ziggy)在艺术圈内很受欢迎，但是艾西认为他的作品是对艺术的一种嘲弄，因此他的作品最多只能展出一件。

克雷斯特也有她自己对展览会的要求。作为博物馆的负责人，她希望能够展出大量多样的作品，这样可以吸引大批的参观者，增加展览会的知名度。为了推动女性意识，她认为每展出两件男艺术家的作品，必须同时展出一件女艺术家的作品。为了宣传环保，她认为应该将"老年地球"(Aging Earth)和"浪费的资源"(Wasted Resources)两件作品中至少一件展出。为了宣扬美国人权，必须有一件比尔·凯通(Bear Canton)的作品。为了促进科学，在"混沌王国"(Chaos Reigns)、"谁在控制"(Who Has Control)和"先锋"(Pioneer)三件作品中至少选出一件。

克雷斯特知道博物馆的空间是有限的，只能最多容纳四件雕像，20幅绘画作品。

最后，克雷斯特认为如果"自恋"(Narcissism)展出的话，"沉思"(Reflection)也必须展出，因为"沉思"也反映了一种自恋的含义。

独立分析下面几个问题。

a. 艾西提供给这次展览会的总资金为400万美元，在已获得的作品以及艾西和克雷斯特提出的要求的基础上，建立并求解一个0-1整数规划模型，在资金预算内，使尽可能多的作品能够展出。最多可以展出多少作品，是哪些作品？

b. 为了展览能获得大众的关注，克雷斯特认为必须至少展出20件作品，在满足艾西和克雷斯特提出的要求，以及至少展出20件作品的基础上，建立0-1整数规划模型，使展览会的总成本最小。该展览会的总成本为多少？将会展出哪些作品？

c. 利塔·罗斯基(Rita Losky)作品的赞助人是博物馆的负责人之一，他得知艾西需要在展览会上至

① 展览的价格包括到展览馆展览而支付给画家的费用，运到旧金山的运输成本，展览布置费用，保险费用和运送回原地的运输成本。

少展出20件作品。于是，为了确保可以展出20件作品，他愿意支付超出原预算的零头，但是，要求展出利塔所有作品。这一赞助人需要支付多少金额？将会展出哪些作品？

| 艺术家 | 作　　品 | 作品描述 | 价格（美元） |
|---|---|---|---|
| Colin Zweibell | 完美 | 金属丝人体塑像 | 300000 |
| | 负担 | 金属丝骡塑像 | 250000 |
| | 伟大的平衡器 | 金属丝枪塑像 | 125000 |
| 利塔·罗斯基 | 混沌区域 | 一系列电脑制作的图画 | 400000 |
| | 谁在控制 | 含有电脑码线的电脑画 | 500000 |
| | 驯服 | 房子的钢笔画 | 400000 |
| | 清白 | 小孩的钢笔画 | 550000 |
| Norm Marson | 老年地球 | 大球上盖满垃圾的塑像 | 700000 |
| | 浪费的资源 | 各种包装材料的拼贴画 | 575000 |
| 凯蒂·坦特 | 宁静 | 蓝色水彩画 | 200000 |
| | 暴风雨前的平静 | 蓝底色黑心的水彩画 | 225000 |
| Robert Bayer | 空虚 | 黑色油画 | 150000 |
| | 太阳 | 黄色油画 | 150000 |
| 戴维·利曼 | 店头的窗户 | 珠宝店橱窗的写真画 | 850000 |
| | 哈里 | 哈里摩托车的写真画 | 750000 |
| Angie Oldman | 消费 | 杂志广告的拼贴画 | 400000 |
| | 沉思 | 镜子的塑像 | 175000 |
| | 特洛伊·维多利亚 | 避孕套的木雕 | 450000 |
| 里克·罗尔斯 | Rick | 自画写真 | 500000 |
| | Rick 2 | 自画立体像 | 500000 |
| | Rick 3 | 自画表现主义像 | 500000 |
| Bill Reynolds | 超越 | 火星殖民地的科幻油画 | 650000 |
| | 先锋 | 三名飞行员登上航天飞机的油画 | 650000 |
| 比尔·凯通 | 智慧 | 阿派区酋长的钢笔画 | 250000 |
| | 超级力量 | 美洲土人的求雨舞钢笔画 | 350000 |
| | 生存的土地 | 大峡谷的油画 | 450000 |
| Helen Row | 小提琴 | 小提琴的立体画 | 400000 |
| | 水果盆 | 一盆水果的立体画 | 400000 |
| Ziggy Lite | 同名人 | Ziggy漫画的拼贴 | 300000 |
| | 自恋 | 自画像的拼贴画 | 300000 |
| Ash Briggs | 所有发光的 | 金门桥的水彩画 | 50000① |
| | 岩石 | Alcatraz的水彩画 | 50000 |
| | 路 | 伦巴蒂街道的水彩画 | 50000 |
| | 梦想成真 | 旧金山现代艺术馆的水彩画 | 50000 |

## 案例9.3　存货布置

戴尼尔·霍尔布鲁克（Daniel Holbrook），是一家　家具城仓库的发货人。他一边叹着气，一边将货箱

① 艾西并不想要个人的报酬，并且将他的画从家里拿到旧金山的博物馆的费用是很小的。因此，艾西自己的作品展出的成本只包括陈列和保险费。

从货架上搬下来，因为货架上有他要找的货物。他趴在地上，查看货架最低层的货箱上的号码，结果并没有找到他要找的东西。他沿着货架一直往上，直到找到订单上要求的货物。运气太差了，要找的货物居然在货架的最顶层。戴尼尔跨过地上散乱着的货箱，走出仓库去找梯子。但是，当他最终爬上梯子要把货箱搬下来的时候，他怒火万丈，他所需的货物居然已经没有库存了，库存号码的位置上仅仅覆盖着一层积灰。

戴尼尔艰难的走出仓库，去打电话。他拨通了家具城厨房家具展一楼的电话，找到了售货员布雷达·斯姆斯(Brenda Sims)，通知她客户所要的灯具固定装置没有了，并询问她是否需要其他的厨房用具。布雷达说她要与客户联系之后，再打电话给他。

布雷达挂了电话，皱起了眉，她的客户戴维特森(Davidson)会很生气的。从地区库存收到发货至少需要两个星期。

布雷达回想了一下近一个月的业务，由于一些配件在当地仓库中没有存货，厨房用具80%以上的订单都无法完成。也正是因为库存的问题，家具城只在逐渐地失去顾客和业务。家具大商场一贯以服务慢、交货延误而名声不佳，顾客已开始转向一些可以直接交货的小型家具零售商。

布雷达决定调查一下当地仓库的具体情况。因为仓库就在家具城的附近，所以她直接走了过去。一踏进仓库的大门，她就倒抽了一口冷气。简直是一团乱，一些地方被货物挤得满满的，把过道都堵塞了，而另一些地方则什么都没有。她走到放着一大堆货物的地方，想看一下到底是些什么货。她简直就不能相信自己的眼睛，至少有30卷的绿色墙纸。她记得自从1973年以来，还从来没有一个顾客订购过这种颜色的墙纸。

布雷达走到戴尼尔跟前，要他解释一下。戴尼尔说，早在一年前，他刚来的时候，库存就是这么乱。并且他认为仓库这一问题是管理政策不当造成的，管理层要求展厅里所有的商品都必须在当地的库存中有相应的存货。库存每三个月补充一次，而且每种产品都会得到补充，不管仓库中的存货是否已经售出。戴尼尔曾经向管理层提起过这个问题，他说仓库中有大量过时的产品，而紧俏产品却没有，但是管理层并没有听他的话，毕竟他只不过是一个发货员。

布雷达现在知道家具城需要重新制定新的库存政策，因为不仅交货不及时而丧失顾客会失去公司的利润，浪费大量的仓库空间也会使公司失去效益。增加畅销的产品，对紧俏商品及时补充，这样不仅能保证顾客及时收到货物，还可以有效的利用仓库空间。

布雷达必须向管理层提出她的建议，根据广泛的销售经验，她认为最有效的销售策略是将这一新的库存政策运用到厨房家具部。她能确定85%的顾客订单将会订购厨房家具。在给定的仓库空间的基础上，她可以确定为了最大限度满足顾客需求，而必须库存的货物。这样，她就可以计算出因满足顾客需求而增加的收入，并以取得的切实的收益去说服管理层接纳这一新的库存政策。

布雷达分析了过去三年的记录，发现20种厨房家具组合货物可以满足85%的顾客订单，这20种家具组合款式各异，其中有些款的特点多达8个。布雷达列出了每个特点和款式。

这之后，布雷达做了一种表格，表中列出了20种家具组合，以及每一组合的特点。为了简化表格，她用下表括号中符号表示各种特点和款式。例如，家具组合1包括地砖T2，墙纸W2，灯具L4，厨具C2，工作台O2，洗碗机D2，水槽S2，煤气灶R2。注意，组合14－20都没有包含洗碗机。

| 地　砖 | 墙　纸 | 灯　具 | 厨　具 |
|---|---|---|---|
| (T1)白色花纹砖 | (W1)普通象牙色纸 | (L1)一大矩形磨砂 | (C1)浅色木质 |
| (T2)象牙色花纹砖 | (W2)象牙色黑纹 | (L2)三小矩形磨砂 | (C2)黑色木质 |
| (T3)白色蓝边砖 | (W3)大理石纹蓝纸 | (L3)一大椭圆磨砂 | (C3)浅色木质玻璃门 |
| (T4)白色黄边砖 | (W4)大理石纹黄纸 | (L4)三小椭圆磨砂 | (C4)黑色木质玻璃门 |

| 工作台 | 洗碗机 | 水　槽 | 煤气灶 |
|---|---|---|---|
| (O1)普通浅色木质 | (D1)白色节能型 | (S1)独立冷热水龙头 | (R1)白色电灶 |
| (O2)彩色木质 | (D2)象牙色节能型 | (S2)独立冷热水排口 | (R2)象牙色电灶 |
| (O3)白色上漆 | | (S3)冷热水龙头并用 | (R3)白色煤气灶 |
| (O4)象牙色上漆 | | (S4)冷热水并用 | (R4)象牙色煤气灶 |

布雷达知道分配给厨房家具部的库存空间是很有限的,仓库的货柜里可以存放50平方英尺的地砖和12卷墙纸。而仓库的货架上可以放置两个灯具,两个厨具,三个工作台,两个水槽。洗碗机与煤气灶的大小相近,可以放在一起,仓库的地上可以放置四个洗碗机或煤气灶。

每一家具组合通常都包括20平方英尺的地砖,5卷墙纸。因此,必须在仓库中保存20平方英尺的某一款式的地砖,和5卷某一款式的墙纸。

a. 为了能够在家具城的仓库中存入最多数量的各种款式的家具,建立0-1整数规划模型并求解。假设当一个顾客订购了一套家具组合之后,该组合的所有配件都能够立即得到补充。

b. 家具城的库存中应该储存多少数量的各种特点与款式的家具?库存中有多少种不同的家具组合?

c. 家具城决定停止销售托儿所用具,因此,将原先分配给这一产品的库存空间在剩下的所有商品将分摊,厨房家具部分到的额外空间可以存储两种款式的洗衣机和四种款式的煤气灶中的三种。在加入这一额外存储空间之后,该厨房部的最优库存政策将会发生怎样的变化?

d. 布雷达说服了管理层以厨房部作为这一新的库存政策的实验点,为了给这一试验提供足够的库存空间,管理层决定将因撤销托儿所用具而空出的库存空间全部分配给厨房部。这些增加的库存空间不仅可以存放c中的洗碗机和煤气灶,还可以存放所有款式的水槽,工作台,四种灯具中的三种,四种厨具中的三种。这些额外的库存空间会带来怎样的影响?

e. 如果组合家具中的配件不能及时的得到补充,会产生怎样的影响?在怎样的条件下,及时补充存货的假设才会成立?

## 案例9.4　将学生分配到各个学校(续)

重新考虑案例3.3,斯普林菲尔德(Springfield)学校的董事会现在决定不能将同一个居住区的学生分配到不同的学校,这样,6个居住区中的每一个都必须分配到同一个学校中去。

a. 如果学校为离校距离超过1英里的所有学生提供公交服务,建立该问题的BIP模型。

b. 参见案例3.3中的a部分所建立的线性规划模型,说明为什么这里的BIP模型会与前面的线性规划模型有那么大的区别。

c. 求解a中的BIP模型。

d. 参见案例3.3的c部分,计算出由于董事会不允许将同一个居住区的学生分配到不同学校,而增加的公交支出。

e. f. g. h. 在本题新政策的限制下,重新分析案例3.3中的e. f. g. h. 各部分。

| | T1 | T2 | T3 | T4 | W1 | W2 | W3 | W4 | L1 | L2 | L3 | L4 | C1 | C2 | C3 | C4 | O1 | O2 | O3 | O4 | D1 | D2 | S1 | S2 | S3 | S4 | R1 | R2 | R3 | R4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Set 1 | | × | | | | × | | | | | | × | | × | | | | | | × | | × | | × | | | | × | | |
| Set 2 | | × | | | × | | | | × | | | | | | | × | | | | × | | × | | | | × | | × | | |
| Set 3 | × | | | | | | × | | | × | | | × | | | | × | | | | × | | | | × | | | | × | |
| Set 4 | | | × | | | | × | | | | × | | | | × | | | | × | | × | | × | | | | × | | | |
| Set 5 | | | | × | | | | × | × | | | | × | | | | | × | | | × | | | × | | | × | | | |
| Set 6 | | × | | | | × | | | | × | | | | | | × | | | | × | | × | | | × | | | | | × |
| Set 7 | × | | | | | | × | | | | | × | | | × | | | × | | | × | | × | | | | × | | | |
| Set 8 | | × | | | × | | | | | | × | | × | | | | × | | | | | × | | | × | | | | | × |
| Set 9 | | × | | | × | | | | | × | | | | | × | | | × | | | | × | | × | | | | × | | |
| Set 10 | × | | | | × | | | | × | | | | × | | | | | | × | | × | | | | | × | | | × | |
| Set 11 | | | × | | × | | | | | | × | | | | × | | × | | | | × | | × | | | | | | × | |
| Set 12 | | × | | | | × | | | × | | | | | × | | | | × | | | | × | | | | × | | × | | |
| Set 13 | | | | × | | | | × | | | × | | | | × | | × | | | | × | | | × | | | | | × | |
| Set 14 | | | | × | | | | × | | | | × | × | | | | | | × | | | | × | | | | × | | | |
| Set 15 | | | × | | | | × | | × | | | | × | | | | × | | | | | | | | × | | | | × | |
| Set 16 | | | × | | | | × | | | | | × | × | | | | | | × | | | | | × | | | × | | | |
| Set 17 | × | | | | | | | × | | × | | | | | × | | | | × | | | | | | | × | | | × | |
| Set 18 | | × | | | | | × | | | | × | | | × | | | | | | × | | | × | | | | | × | | |
| Set 19 | | × | | | | | | × | | | | × | | | | × | | | | × | | | | × | | | | | | × |
| Set 20 | | × | | | | | × | | × | | | | × | | | | | × | | | | | | | × | | | | | × |

CHAPTER

# 10 非线性规划

## 学习目标

完成本章学习后,你应该掌握:

1. 描述非线性规划模型和线性规划模型的区别。
2. 明确何时需要使用非线性规划模型来说明问题。
3. 根据描述的问题建立一个非线性规划模型。
4. 为非线性规划模型建立非线性公式。
5. 识别容易求解的非线性规划模型和难以求解(但是又是可以求解的)的非线性规划模型。
6. 利用 Excel Solver 解决简单型的非线性规划问题。
7. 结合使用 Excel Solver 和 Solver 表来尝试解决一些较复杂的非线性规划问题。
8. 使用 Evolutionary Solver 来尝试解决一些复杂的非线性规划问题。
9. 明确何时可以运用可分离规划技术对非线性目标函数进行线性规划。
10. 在合适的情况下应用可分离规划技术。

前面几章已经介绍了许多种管理科学的模型,包括各种线性规划和整数规划。但是,所有这些线性规划和整数规划模型都有一个共同的特征,它们全部是线性模型,也就是说,模型中所有的相关函数(数学关系)都是线性的。

在电子表格中建立一个线性模型,意味着输出单元格公式所使用的 Excel 函数仅仅包含了加总[如,C1 + C2 或 SUM(C1:C2)或 C1 - C2],或一个数值(数据单元格)和可变单元格的乘积(如,2 * C4 或数据单元格和可变单元格的 SUMPRODUCT)。如果输出单元格包含了可变单元格的乘法或除法(如,C4 * C5 或 C3 /C6 或 C4^2),又或者使用了除 SUM 和 SUMPRODUCT 之外的其他任何 Excel 函数(如 ROUND、ABS、IF、MAX、MIN、SQRT 等等),那么如此产生的模型就不是线性的。

> 如果一个可变单元格被另一个可变单元格相乘或相除，或者进行指数计算（指数为 1 除外），那么公式就会自然成为非线性的。

表 10.1 假设数据单元格在 D 列，可变单元格在 C 列，然后给出了输入输出单元格的不同公式的例子。位于表左侧的所有公式都是线性的，而右侧都是非线性的。两侧的前四个例子都是非常简单的。你能发现为什么左侧的公式都是线性的而右侧的不是？两者之间差别的关键在于线性公式允许数据单元格进行任何计算，但是每个可变单元格只允许进行最基本的算法运算：加法、减法以及与常数的乘法和除法。

**表 10.1　线性公式和非线性公式的例子，假设电子表格的 D 列都是数据单元格，C 列都是可变单元格**

| 线性公式 | 非线性公式 |
|---|---|
| SUMPRODUCT(D4:D6,C4:C6) | SUMPRODUCT(C4:C6,C1:C3) |
| [(D1+D2)/D3]*C4 | [(C1+C2)/C3]*D4 |
| IF(D2>=2,2*C3,3*C4) | IF(C2>=2,2*C3,3*C4) |
| SUMIF(D1:D6,4,C1:C6) | SUMIF(C1:C6,4,D1:D6) |
| SUM(D4:D6) | ROUND(C1) |
| 2*C1+3*C4+C6 | MAX(C1,0) |
| C1+C2+C3 | MIN(C1,C2) |
| | ABS(C1) |
| | SQRT(C1) |
| | C1*C2 |
| | C1/C2 |
| | C1^2 |

虽然线性模型具有多功能性，但是经理们有时会碰到一些问题，而线性模型并不适用这些问题，因为输入输出单元格的公式中至少有一个是非线性的。通常，非线性模型出现在当目标单元格的公式需要是非线性的时候，而本章的内容也将集中在这种情况上。如果模型除了至少有一个输出单元格（例如目标单元格）公式是非线性的之外其余都是线性规划模型，那么就称之为非线性规划模型。

建立和求解非线性规划模型通常比建立和求解线性规划更具有挑战性。但是，这些挑战是可以克服的，有时通过相对简单的方法就能克服。本章将会集中于相对简单的非线性规划上，这些规划只需要进行常规的电子表格建模和应用 Excel Solver（在某些情况下）或 Premium Solver（在其他情况下）。这就是一位经理（或未来经理）所要了解的有关非线性规划的全部内容。而一位管理科学专家则要求去解决更加复杂的非线性规划。

> 对于分析管理问题来说，非线性规划比线性规划的精确性更高。

由于线性规划和非线性规划的关系非常密切，因此有时不清楚应当采用何种技术来分析一个管理问题。特别是当目标单元格的正确公式为非线性的，但又非常接近线性时，问题就会出现。在这种情况下，一种方法是对公式采用线性近似法，使得可以使用线性规划。这种方法的优点是建模和求解比较容易。但由于此时的模型只是真实问题的理想化表现，因此这种方法适用于线性近似是合理的情况下。而另一方面，使用非线性规划的最大好处在于其精确性，针对实际问题找出最好的解决方案。如果合适的非线性规划模型的建模和求解不是过于复杂，那么使用该模型是非常有意义的。如果需要，线性规划模型也可以用来进行最初的快速的分析，包括 what-if 分析，但需要利用非线性规划的精确性对问题做最后的分析。

10.1 节将讨论使用非线性规划所面临的挑战。幸运的是，频繁出现的非线性规划问题

大多是一些比较简单的类型。10.2 节和 10.3 节分别介绍了其中的两种类型。10.4 节介绍了如何通过对不同的初始解使用 Excel Solver(或 Premium Solver)来解决一些复杂的非线性规划问题。但是,也有其他一些非线性规划问题是 Excel Solver 所不能解决的。因此,Premium Solver 提供了一个附加的程序,称之为 Evolutionary Solver,来解决类似的问题。10.5 节将介绍 Evolutionary Solver。

## 10.1 非线性规划的挑战

除了至少在一个输出单元格内有一个非线性公式(通常在目标单元格中)之外,非线性规划模型在形式上与线性规划模型相似。

非线性规划模型和线性规划模型几乎在所有方面都是难以区分的。在两种模型中,需要制定关于若干活动水平的决策,这些活动水平可以是任何满足若干约束条件的数值(包括分数)。关于活动水平的决策将以一个总绩效测度为基础。在电子表格中建模的时候,可变单元格显示活动水平,输出单元格用于代表约束条件,而目标单元格则显示总绩效测度。

区分非线性规划模型和线性规划模型的惟一方法是检查输入输出单元格的公式。如果这些公式中有一个或更多是非线性的,那么这是一个非线性规划模型。通常,这样的模型只有一个非线性公式,就是输入目标单元格的公式。

这两种模型除了在形式上有上述的小差别之外,在应用上有三个方面的不同。

- 非线性规划用于模拟活动水平和总绩效测度之间的非比例关系,而线性规划呈现的是比例关系。
- 为一个非线性规划模型创立非线性公式比在线性规划中建立线性公式更复杂。
- 非线性规划模型的求解(如果可以求解的话)比线性规划模型更加复杂。

正如以上这些比较所指出的,使用非线性规划比线性规划具有更大的挑战。让我们更仔细地来分析这些挑战。

### 非比例关系的挑战

当在电子表格中建立一个线性规划模型或非线性规划模型时,目标单元格需要显示由可变单元格所示的活动水平所导致的总绩效测度。然而,非线性规划中活动水平和总绩效测度之间的关系比起在线性规划中更为复杂。

在线性规划的情况下,这种关系相当简单。举例来说,考虑 2.2 节中介绍过的并且在 2.3 节中进行建模的伟恩德玻璃公司的问题。这个问题的活动是特殊新型门和窗的生产,这些活动水平是:

$D$ = 每周生产的门的数量

$W$ = 每周生产的窗的数量

总绩效测度是每周这些门和窗的生产销售所产生的总利润。每扇门的单位利润估计为 300 美元,而窗的单位利润为 500 美元。图 10.1 的图形显示了每个活动水平($D$ 和 $W$)与这些活动对总绩效测度的贡献之间的关系。每个图形中的直线表明了一种比例关系,因为每个产品每周的利润与该产品的生产率是成比例关系。这些直线也同时说明目标函数是线性的。

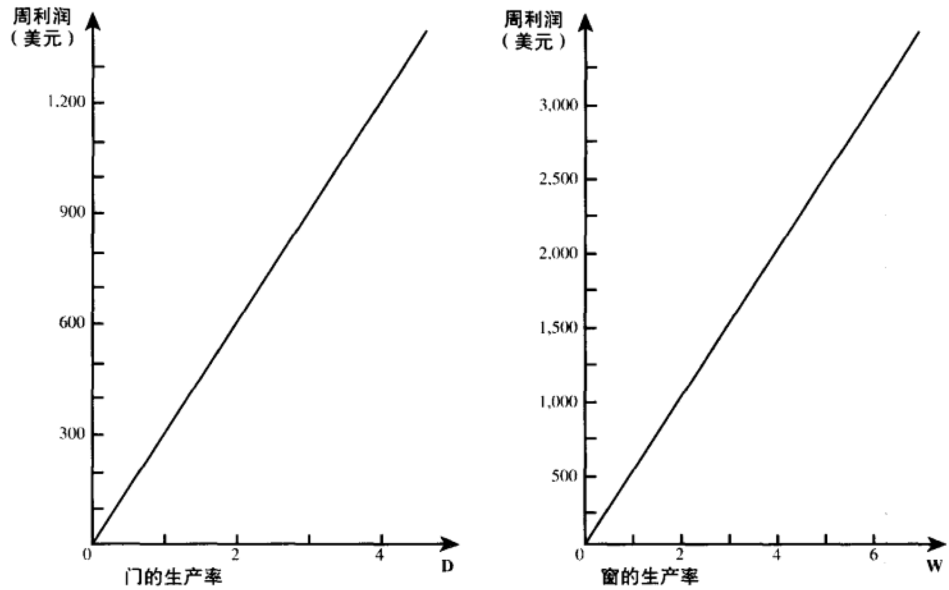



**图 10.1**　伟恩德玻璃制品公司的利润图，显示了每个产品每周的利润与该产品生产率的关系曲线。

$$利润 = 300D\ 美元 + 500W\ 美元$$

被输入目标单元格的公式是线性的，这个事实将帮助整个模型成为一个线性规划模型。

正如伟恩德玻璃公司问题说明的，每一个线性规划问题假设在每个活动和总绩效测度之间存在比例关系。这个关键的假设可以概括如下。

**线性规划的比例性假设**(Proportionality Assumption of Linear Programming)：各种活动对目标函数值的贡献与活动水平成比例[①]。换句话说，也就是目标函数中包含该活动的一项是系数与决策变量的乘积，其中系数是每单位活动的贡献而决策变量是各活动的水平(例如，对伟恩德玻璃公司问题中的每个产品而言，系数是产品的单位利润而决策变量是产品的生产率)。

> 当线性规划的比例性假设被违背时，非线性规划问题就产生了。

当违反了比例性假设时，非线性规划问题就产生了。只要任何活动与总绩效测度之间存在非比例关系，就会产生非线性规划问题，因为活动对绩效测度的贡献与活动水平之间的关系是不成比例的。

图 10.2 显示了非比例关系的四个不同例子(这些图形假设总绩效测度是利润，但是也可以使用其他任何最大化的绩效测度)。

图 10.2(a)所示的第一个例子，展示了边际收益递减的利润曲线。

对于任何活动，作出活动水平和其利润的关系曲线。假设该曲线的斜率从来不增加，反而当活动水平增加时有所下降。这就是边际收益递减的活动。

同样的，在一些问题中，其目标是将活动总成本最小化，如果成本曲线的斜率从来不变小反而随着活动水平增加而变大，那么这个活动被认为是边际收益递减[②]。

---

① 对于每一活动对相应的约束函数左式的贡献也作出同样的假设，但在这一章中我们将重点讲解如何处理目标函数不服从比例性假设的问题。

② 按照数学术语，边际收益递减的利润曲线称之为凹函数，而边际收益递减的成本曲线称之为凸函数。我们更建议使用经济术语，用边际收益递减来概括两种情况(包括多决策变量的函数)。

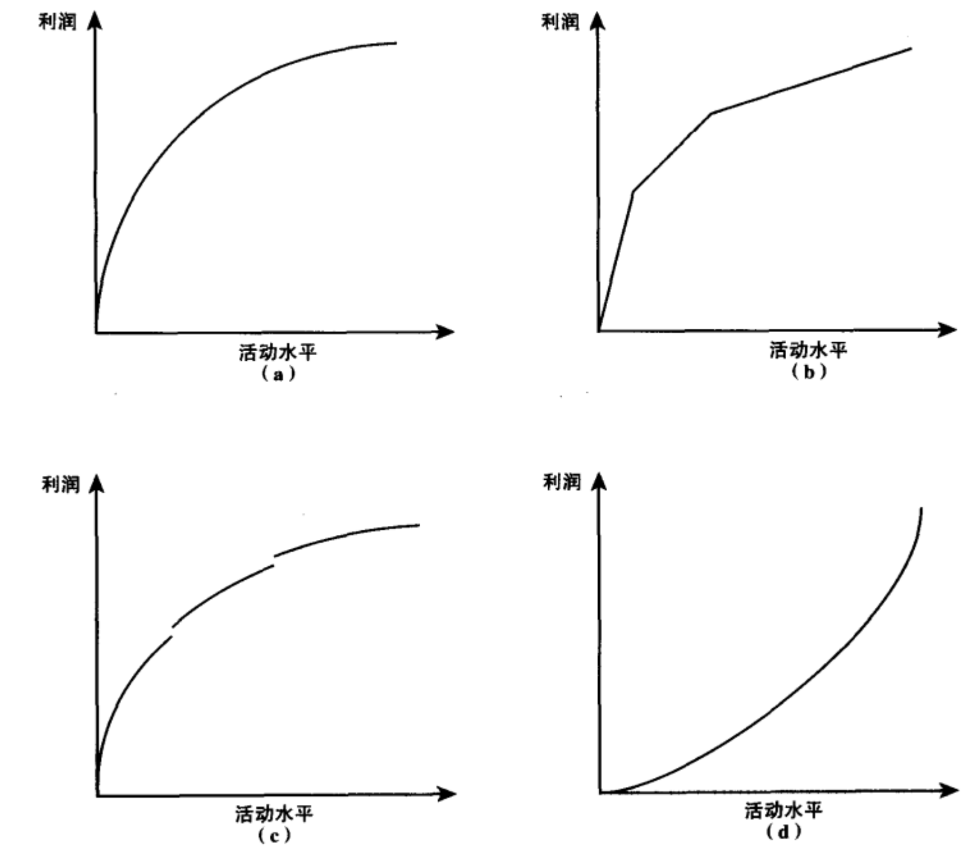



**图 10.2** 非比例关系利润曲线的例子：(a)边际收益递减；(b)边际收益递减的分段直线；(c)边际收益递减，除不连续点之外；(d)边际收益递增。

有许多活动的边际收益递减。

通常，当一种活动水平变得越来越高时，要保持利润按照原来的增长率继续增加是很困难的，因此边际收益递减的活动是非常正常的。例如，有时为了扩大销售而有必要降低产品的销售价格。或者，保持价格不变，但需要提高营销成本，而营销成本增加的幅度高于销售水平的增加（下一节开始的例子中营销成本的提高就是这种情况）。另外，当没有足够的设备和人员被用于提高活动水平时，边际收益递减的情况也同样会出现。

图 10.2(b)展示了分段的利润曲线，它由一系列连接的线段组成。在每个线段上，当活动水平增加时，利润曲线的斜率保持不变；但是到了另一个线段开始处的折点时，斜率就变小了。这条曲线在活动水平增加时，斜率始终没有变大，而且在折点之后斜率变小，因此也符合边际收益递减的定义。这种类型的曲线有可能会发生，例如，在第一个折点之后，使用了加班来提高活动水平；接着在第二个折点之后，使用了更贵的周末加班来提高活动水平。

图 10.2(c)展示了一个并不是完全边际收益递减的非比例关系的例子。说该曲线不是完全边际收益递减，是因为这条利润曲线上存在一些点，称之为不连续点；在这些点处利润曲线是不连贯的，突然上升或下降。这些不连续点可能会出现，例如，当产品的生产水平超过某个上限时，可以获得购买产品部件的数量折扣，此时利润曲线就会产生不连续点。

当活动水平增加时效率同时提高，该活动收益边际递增。

活动的边际收益递减并不是违背线性规划的比例性假设的惟一情况。例如，如图 10.2(d)所示的边际收益递增的活动也违背了比例性假设。在这种情况下，利润曲线的斜率从来没有变小，反而随着活动水平增加而变大（类似地，当成本曲线的斜率从来不变大反而随着活动水平增加而变小，那么该成本曲线边际收益递增）。当活动水平提高以后，活动的效率也提高，就会出现边际收益递增的情况。

当总目标是将所有活动的总利润最大化时，可以使用利润曲线。而另一方面，当总目标是将所有活动的总成本最小化时，则需要使用成本曲线。当某种活动的成本曲线如图 10.3 的所示曲线中的任何一种，那么该活动就像图 10.2 所示的各种情况一样违反了比例性假设。对图 10.3 中的每一种情况，注意该成本曲线是如何对应于图 10.2 的利润曲线进行反向弯曲的。因此，在成本曲线中的斜率递增反映的是边际收益递减，而斜率递减反映的是边际收益递增（除了总成本最小化的情况，同样的结论还适用于目标是将总绩效测度最小化的曲线）。

图 10.2 和图 10.3 只是列出了一些可能存在的非比例关系的例子。例如还存在一种活动，既不是边际收益递减也不是边际收益递增，它的曲线斜率随着活动水平的增加有时变小有时变大。

此外，有时活动之间的交互作用也导致目标函数是非线性的。以伟恩德玻璃公司的问题为例。当每个产品是单独生产，则分别需要一个大型的广告活动来推销一种新产品；但是如果两个产品同时生产，则同一个活动可以同时有效地促进两种新产品的销售。由于第二个产品节约了大部分成本，因此两个产品的总利润要超过两个产品分别单独生产相加所得的利润。具体而言，正确的目标函数应当是：

$$利润 = 300D\ 美元 + 500W\ 美元 + 100DW\ 美元$$

即使比例性假设得到满足，活动之间的交互作用仍会产生一个非线性规划模型。

$DW$ 代表产品 $D$ 和 $W$。由于存在交叉乘积 $100DW$ 美元，即使当 $D$ 或 $W$ 其中一个确定为某个值，另一个产品可以保持比例性假设时，这个目标函数仍是非线性的。

当活动之间存在交互作用时，所有活动的总利润有时仍会是边际收益递减（一般技术术语是目标函数是凹的）。边际收益递减的直观表示（从不向上弯，有时向下弯的利润曲线）也可以应用于此。这样我们就不会被这种情况中复杂的技术定义而困扰。

## 建立非线性公式的挑战

对一个线性规划模型来说，利用 SUMPRODUCT 函数建立输入目标单元格的公式是一件相对容易的事。例如，当目标单元格是所有活动的总利润时（如同伟恩德玻璃公司的问题），被加总的乘积就是每个活动的单位利润（在数据单元格中给出）和活动水平（在可变单元格中给出）的乘积。

然而对一个非线性规划问题就需要做更多的工作。即使不存在活动之间的交互作用，也有必要为每个活动建立一个非线性公式，表示该活动对要输入目标单元格的目标函数的贡献。例如，当目标是将总利润最大化时，每个活动的非线性公式应当与该活动的利润曲线相对应。

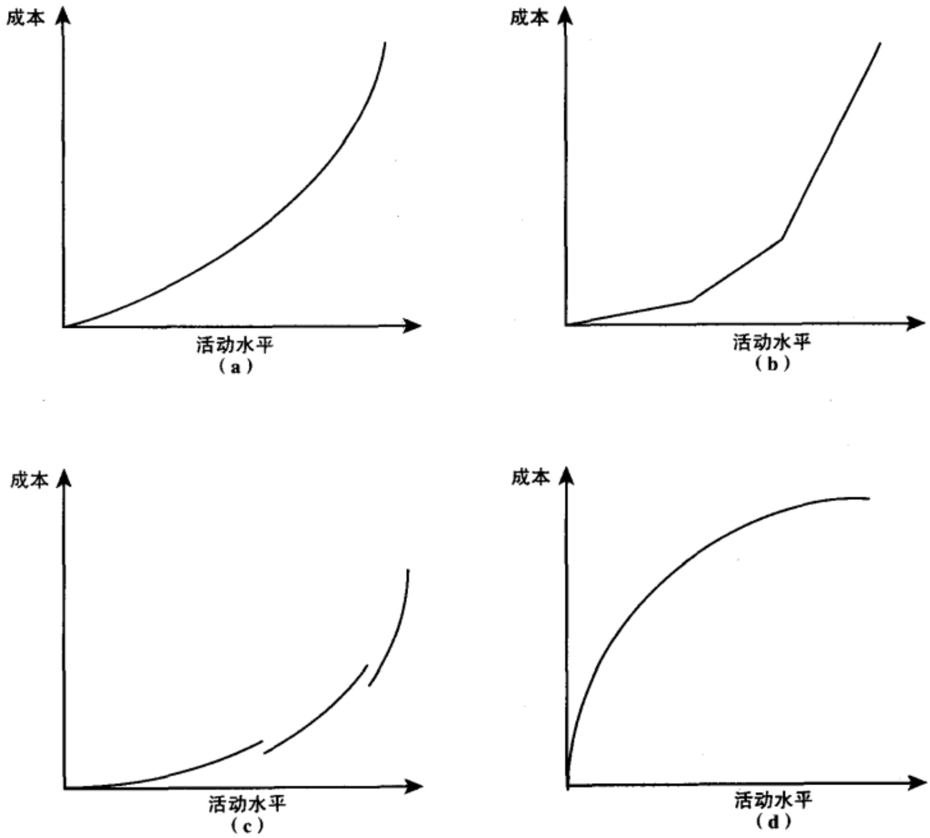



图 10.3 非比例关系成本曲线的例子:(a)边际收益递减;(b)边际收益递减的分段直线;(c)边际收益递减,除不连续点之外;(d)边际收益递增。每个成本曲线对应图 10.2 中的利润曲线进行反向弯曲。

> 利润曲线(或成本曲线)的二次形式使用很广泛。

使非线性公式与曲线相对应的一个有用的方法是假设一个公式的普遍模式。对边际收益递减的利润曲线而言,通常是假设一个二次形式,例如:

$$\text{活动的利润} = ax^2 + bx + c$$

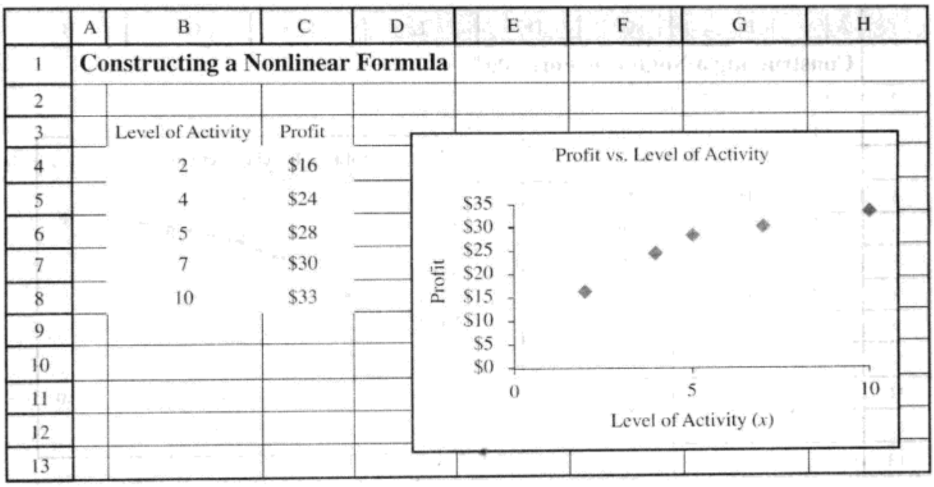
其中 $x$ 代表活动水平,$a$ 是一个负的常数。另一种可能是假设一个对数形式,如:

$$\text{活动的利润} = a\ln(x) + b$$

其中 $\ln(x)$ 叫做 $x$ 的自然对数。

无论是假设哪种形式,接下来的步骤是找出合理的参数值(如 $a$、$b$、$c$)。Excel 有嵌入式的曲线拟合方法来寻找最符合数据的参数值。例如,如图 10.4 的电子表格所示,可以获得在几个活动水平上利润的先验数据(至少是预计的)。

运用 Excel 曲线拟合方法的第一个步骤是利用 X－Y 散点图来描出利润数据图(利润和活动水平的关系曲线)。接着,通过点击选中图形,然后从"图表"菜单中选择"添加趋势线"。此时会出现如图 10.5 左边所示的对话框。使用这个对话框选择你所希望 Excel 对数据进行拟合的等式形式。例如,对数据拟合一个二次等式,就选择多项式的次数为 2。



| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Constructing a Nonlinear Formula | | |
| 2 | | | |
| 3 | | Level of Activity | Profit |
| 4 | | 2 | $16 |
| 5 | | 4 | $24 |
| 6 | | 5 | $28 |
| 7 | | 7 | $30 |
| 8 | | 10 | $33 |



**图 10.4**　活动的一个例子，可以获得对应于活动水平的利润的先验数据，并由此可以运用 Excel 的曲线拟合方法。

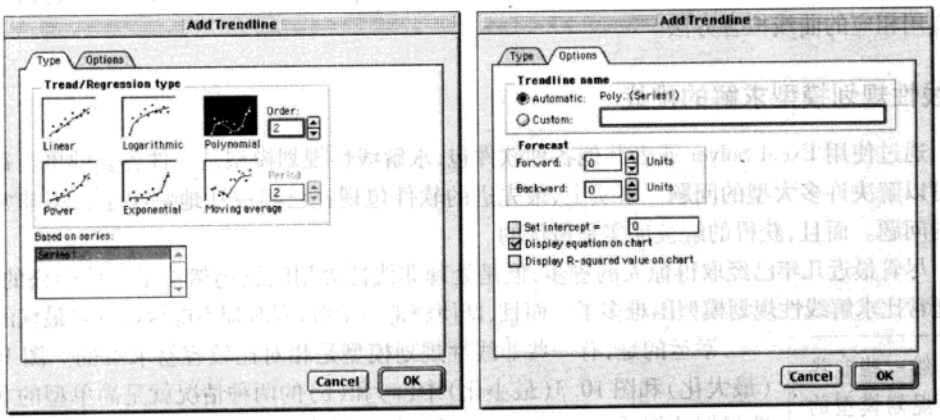



**图 10.5**　用以执行 Excel 曲线拟合方法的"添加趋势线"对话框。"类型"用于输入等式的形式。"选项"键包含了在图表上显示等式的选项。

接着，点击"选项"。此时出现如图 10.5 右边所示对话框。选中"在图表上显示公式"的复选框，然后点击"OK"。Excel 就会选出与描绘的数据拟合得最好的选定形式的等式的参数。例如，最符合图 10.4 中数据的二次等式是：

$$利润 = -0.3002x^2 + 5.661x + 6.1477$$

如图 10.6 所示，这个等式直接在利润和活动水平的关系曲线图上显示出来，并且用曲线将图上的点连接起来。

二次方程式为许多利润曲线提供了合理的近似，因此经常被使用。但是，从谨慎角度考虑，应当检查近似是否对任何特定活动都确实合理。除了在曲线拟合方法中使用过的数据之外，对其他一些不同的活动水平的利润进行评估，检查这些活动水平的利润是否与公式给出的解合理地近似。如果答案是否定的，一种方法是可以选出更多的数据，再次运用曲线拟

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Constructing a Nonlinear Formula** | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | Level of Activity | Profit | | | | | |
| 4 | | 2 | $16 | | | | | |
| 5 | | 4 | $24 | | | | | |
| 6 | | 5 | $28 | | | | | |
| 7 | | 7 | $30 | | | | | |
| 8 | | 10 | $33 | | | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | |

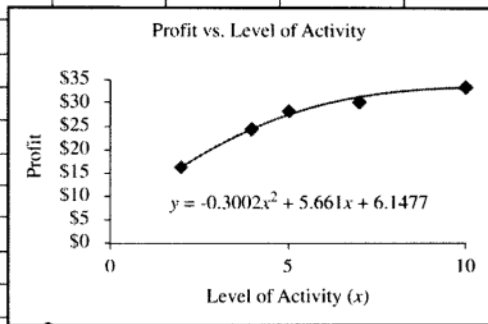



图 10.6 Excel 找到的二次方程式，该方程式最符合图 10.4 介绍的例子中的利润和活动水平关系曲线。

合方法来找到更好的整体拟合。另一种方法是采用不同形式的公式(例如对数形式)，然后再应用相应的曲线拟合方法。

## 非线性规划模型求解的挑战

通过使用 Excel Solver 或者其他各种软件包，求解线性规划模型是一件容易的事。每天都可以解决许多大型的问题。事实上，最先进的软件包现在已经成功地解决了许多非常大型的问题。而且，获得的解被证实是最优的。

尽管最近几年已经取得惊人的进步，但是处理非线性规划问题仍然不是一件轻松的事。这通常比求解线性规划模型困难多了。而且，即使获得一个解，有时却不能保证其是最优的。

> 虽然一些非线性规划模型的求解非常困难，但是那些边际收益递减的模型就相对容易的多。

幸运的是，有一些非线性规划模型是相对比较容易求解的。图 10.2(最大化)和图 10.3(最小化)中(a)和(b)的两种情况就是简单型的非线性规划的例子，也就是，属于活动的边际收益递减的类型。只要所有的活动符合其中任何一种情况(除了那些还满足比例性假设的活动)，那么在电子表格中建立模型也并非很难，而且只要模型不是非同一般的大，Excel Solver 就能够求解模型。下一节将集中讨论情况(a)，10.3 节将讨论情况(b)。

然而不幸的是，其他类型的非线性规划求解就非常困难。例如，图 10.2 和图 10.3 中的情况(c)，虽然除了曲线中的不连续点之外其他部分都符合边际收益递减，但是正是由于这些活动的不连续点的存在，就不能确保 Excel Solver 能够成功地求解模型。像情况(d)中，活动的边际收益递增也会产生很多的复杂性。

除了图 10.2 和图 10.3 中列出的那些模型之外，还有更加复杂的非线性规划模型。例如，考虑以下所示代数形式的模型：

$$\text{最大化} \quad \text{利润} = 0.5x^5 - 6x^4 + 24.5x^3 - 39x^2 + 20x$$

约束条件

$$x \leqslant 5$$

$$x \geqslant 0$$

在这个例子中，只有惟一的一个活动，其中 $x$ 代表了活动水平。而且，除了非负这个约束之外只有一个函数约束($x \leq 5$)。然而，从图 10.7 中可以看出 Excel Solver 对这个问题进行求解是如何麻烦。在电子表格中建立这个模型是非常简单明了的，$x$(C5)作为可变单元格，利润(C8)作为目标单元格(注意，在 Solver 选项中没有选中“假设为线性模型”，因为这不是一个线性规划模型)。当 $x=0$ 作为初始值输入可变单元格时，图 10.7 左边的电子表格显示 Solver 指出 $x=0.371$ 时是最优解，利润 = 3.19 美元。然而，当 $x=3$ 作为初始值时，如图 10.7 中间的电子表格所示，Solver 得出 $x=3.126$ 时是最优解，利润 = 6.13 美元。在右边的电子表格中尝试输入 $x=4.7$ 为初始值，此时 Solver 显示最优解是 $x=5$ 时，利润为 0 美元。为什么会出现这种情况？

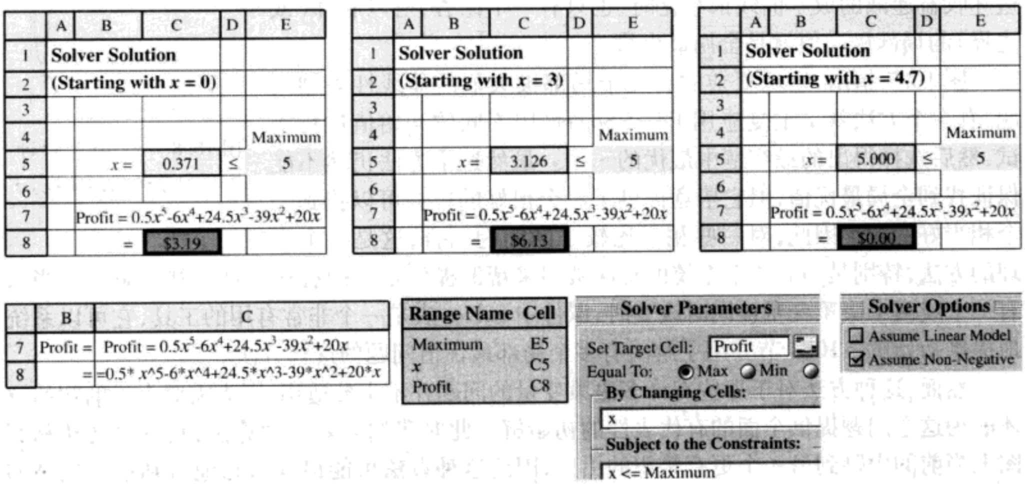



**图 10.7**　一个复杂的非线性规划模型的例子，在这个模型中，当输入三个不同的初始值时，Excel Solver 给出了三个不同的最终解。

画出这么复杂的目标函数的利润曲线是一件困难的工作，但是如 10.8 所示的作出该利润曲线有助于解释 Solver 出现的问题。从 $x=0$ 开始，利润曲线确实在 $x=0.371$ 处到达顶点，就如同图 10.7 左边电子表格所指出的一样。然而从 $x=3$ 开始，利润曲线在 $x=3.126$ 处又到达一个顶点，这也是中间那个电子表格得出的解。当使用右边电子表格的初始值 $x=4.7$时，利润曲线在到达约束条件 $x \leq 5$ 规定的边界之前一直在向上，因此在这段曲线中 $x=5$时是顶点。这三个顶点被称作局部极大值(或局部最优值)，因为每一个顶点在该点的领域内是曲线的最大值。但是，只有这些局部极大值中最大的一个可以作为全局最大值，也就是整个曲线上最高的一点。因此，图 10.7 中间的电子表格成功地找到了最优解，$x=3.126$，利润 = 6.13 美元。

> 当要求最大化时，标准的 Excel Solver 只能到达局部极大值，然后停止。这个局部极大值有可能是全局最大值，也可能不是。

Excel Solver 用于求解非线性规划问题的算法可以看作是一个爬山的过程。它从输入可变单元格的初始值出发，开始爬山直到到达顶点(或者由于到达了约束条件规定的边界而停止进一步爬山)。整个过程在到达顶点(或边界)时终止，并且报告结果。它没有办法测试在利润曲线的其他部分是否还有更高的山。

当目标单元格被要求是最小化而不是最大化时，这个算法就转变方向，往下爬，直到到达谷底(或者被边界所阻止)。同样的，

它没有办法检测在成本曲线的其他部分是否还有更低的谷底。

边际收益递减的非线性规划才能确保 Excel Solver 软件得出的解是最优的。

之所以所有的边际收益递减活动(除任何满足比例性关系的活动)被称为简单型的非线性规划问题,是因为其利润曲线(要求最大化时)只有一个山坡。因此,山坡(或边界)顶点的局部极大值也是全局最大值,于是 Excel Solver 得到的解必然是最优的。例如,图 10.6 中二次方程式的利润曲线是边际收益递减的,因此它只有惟一的一个山,而它的顶点(正好在 $x=9.43$ 处)是全局最大值。同样的,边际收益递减的成本曲线最小化时,也只有一个凹谷,所以底部(或边界)的局部极小值就是全局最小值。

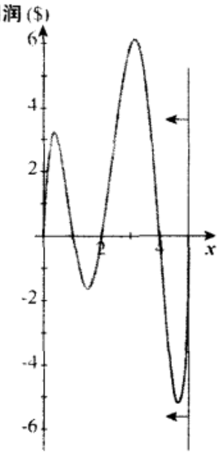



图 10.8 图 10.7 中讨论的例子的利润曲线。

图 10.7 指出,处理复杂的有几个局部极大值的非线性规划问题,有一个方法就是重复应用 Excel Solver,用不同的初始值进行测试,然后选择得出的最终解中最优的一个。虽然这个方法仍然不能保证找到全局最优值,但它毕竟提供了一个很好的机会可以找到一个相当好的解。因此,对一些相对比较小的问题而言,这是一个合理的方法,特别是当有一个系统的程序被用来帮助提供全面的有代表性的初始解时。当只有一个或两个决策变量被同时改变时,课件中 Solver 表是一个非常有用的工具,它可以系统地提供初始解。10.4 节介绍了解决有多个局部最优值问题的这种方法。

然而,这种方法对于那些有许多决策变量的问题并不十分适用,因为需要大量的初始解才能为这个问题提供全面的有代表性的初始解。此时我们需要一种算法,它有时会从利润图上当前的山跳到另一个更有希望的山上,因此这种算法可能最终自动地就到达了最高的山,而不管什么样的初始解被输入可变单元格。Premium Solver(从本书课件中可以获得)提供了这样一种算法,称之为 Evolutionary Solver。虽然 Evolutionary Solver 也有其局限性,但它为 Excel Solver 提供一个非常好的补充,可以尝试解决许多非线性规划问题。10.5 中将介绍 Evolutionary Solver 及其使用。

## 问题回顾

1. 非线性规划模型和线性规划模型的共同特征是什么?
2. 非线性规划模型和线性规划模型在形式上有什么不同?
3. 非线性规划模型和线性规划模型的应用在哪三个主要方面存在不同?
4. 非线性规划问题所违背的线性规划的比例性假设是什么?
5. 当活动的边际收益递减时,它的利润曲线的斜率是怎么样的?
6. 什么情况可以导致活动的利润曲线变成分段的边际收益递减?
7. 当运用曲线拟合方法时,有关活动利润的公式形式有哪些普遍的假设?
8. 相对容易求解的非线性规划模型种类有哪些?
9. 当给出初始解之后,Excel Solver 是如何进一步解决有几个局部极大值的最大化问题?
10. 对于有几个局部极大值的最大化问题,如何做可以使得 Excel Solver 有机会获得一个最优解(或者至少是一个相当好的解)?

## 10.2　边际收益递减的非线性规划

在本节中，我们将集中讨论有以下特征的非线性规划问题。

1. 与线性规划模型的约束条件相同
2. 目标函数为非线性函数
3. 违背线性规划比例性假设的每一活动表现为边际收益递减［就如同上一节中所定义的，图 10.2(a)和图 10.3(a)说明的一样］。

> 使用 Excel Solver 就可以解决这类问题，因为它获得的解能保证是该类问题的最优解。

这是非线性规划问题中比较简单的类型。只要这些问题不是非常的大，Excel Solver 就能解决。

在此种类型的某些问题中，目标函数将包括含有两个或多个决策变量的交叉乘积。在这种情况下，当除了一个决策变量没有被固定外而其他全被固定成某个值时，随着该决策变量的增加，目标函数的值无论何时都必须满足比例性假设或者边际收益递减，以保持第三点特征（数学上对第三点特征的精确描述是，要求最大化的目标函数应当是凹的，而要求最小化的目标函数应当是凸的）。

正如上一节所讨论的，随着活动水平的增加活动的收益越来越少，这是很正常的，这就是活动的边际收益递减。因此，边际收益递减的非线性规划问题出现得很频繁。我们将仔细讨论两个例子来说明边际收益递减是怎么发生的，然后讨论如何建立公式和求解。

在某些情况下，非线性的目标函数与线性的非常相似，于是线性规划模型被用来作为一个近似来进行初步的分析，之后再使用更精确的非线性规划模型来做一些细致的分析。以下进一步展开的伟恩德玻璃公司案例研究正属于这种情况。

### 伟恩德玻璃公司案例研究的续篇

如 2.2 节中所描述的，伟恩德玻璃公司生产高质量的玻璃制品，其生产的不同配件在三个工厂加工。现在，公司打算生产两种新产品，一种特殊类型的门和一种特殊类型的窗，两种新产品估计单位利润分别为 300 美元和 500 美元。2.3 节讨论了如何根据预期的单位利润和有关约束条件信息建立线性规划模型，该模型的最大化目标函数是，利润 = $300D + 500W$，其中 $D$ 是每周生产门的数量，$W$ 是每周生产窗的数量。

为了唤起你的记忆，图 10.9 显示在 2.3 节中就这个问题建立的电子表格模型。点击“求解”按钮，可变单元格“生产的单位数”（C12:D12）给出了最优解$(D, W) = (2, 6)$，目标单元格“总利润”（G12）显示根据模型每个星期产生的利润为 3600 美元。

这个模型假设每个新产品的利润与该产品的生产率成比例。然而，这个假设是值得怀疑的。因此，在最终决定生产率之前，伟恩德公司的管理层希望做一个更加精确的分析，以下描述的是两个管理层成员之间的对话。

**约翰·希尔（伟恩德公司总裁）**：安，随着两个新产品的推出，你的营销计划进行得怎么样？

**安·莱斯特（伟恩德公司营销副总裁）**：相当好。我现在知道自己需要做些什么。

**约翰**：计划的成本会很高吗？

**安**：这要看我们的销售量。我们的市场调研显示，如果不打广告，我们只能销售少量

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Unit Profit | $300 | $500 | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 2 | ≤ | 4 |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 12 | ≤ | 12 |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | Total Profit |
| 12 | | Units Produced | 2 | 6 | | | $3,600 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: Total Profit

Equal To: Max Min

**By Changing Cells:**

UnitsProduced

**Subject to the Constraints:**

HoursUsed <= HoursAvailable

| | E |
|---|---|
| 5 | Hours |
| 6 | Used |
| 7 | =SUMPRODUCT(C7:D7,UnitsProduced) |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:D8,UnitsProduced) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9,UnitsProduced) |

| | G |
|---|---|
| 11 | Total Profit |
| 12 | =SUMPRODUCT(UnitProfit,UnitsProduced) |

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cells |
|---|---|
| HoursAvailable | G7:G9 |
| HoursUsed | E7:E9 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C7:D9 |
| TotalProfit | G12 |
| UnitProfit | C4:D4 |
| UnitsProduced | C12:D12 |

**图 10.9　在 2.3 节中建立的电子表格模型，有关 2.2 节介绍的最初的伟恩德公司问题。**

的新门窗。同时，它也告诉我们，如果我们按工厂生产能力进行生产，那么需要进行大量的广告活动。如果我们每种产品的生产达到产能的最大值，看来需要把价格降低一点来保证销售。对生产率，有最终决定了吗？

**约翰：**还没有。根据管理科学小组的报告，我们肯定要同时推出两个产品，我们正在考虑使生产率适当接近报告中所建议的数字。但是，既然我们的计划已经更进一步了，我们的成本情况更清楚了，所以我们希望在做出最后决定之前管理科学小组能调整分析。事实上，这也是我让你来见我的原因。我们希望得到你的帮助。

**安：**　我可以做些什么？

**约翰：**基本上，我们需要你更新输入信息，也就是当生产率被设置在某几个值时，每周售完这些产品分别所需要的营销成本是多少。

**安：**　好的。以前管理科学小组开始分析时，也要求我估计每扇门和窗的营销成本。我告诉他们每扇门 75 美元，每扇窗 200 美元。那时候这些估计都是挺合理的。

**约翰**：是的。当管理科学小组对每扇门和窗的利润估计分别是 300 美元和 500 美元时，那些成本估计被考虑在内。你现在的成本估计还一样吗?

**安**：　不，不大一样。我认为以每扇门或每扇窗作为基础来说明营销成本不再有意义。正如我之前所说的，在生产率较低的情况下我们的成本将很少，但是在生产率较高的时候将需要大量的营销成本。因此，每扇门 75 美元每扇窗 200 美元的成本在低生产率时显得太高了，在中等的生产率时差不多，而在高生产率时就显得太低了。

**约翰**：是的，这正是我所猜想的。这也是为什么现在我们希望你不要以每扇门或每扇窗为基础来估计的原因。你需要估计当生产率被设置在某几个值时每种产品的周营销成本分别是多少。这将帮助管理科学小组对生产率进行更精确的分析。

**安**：　有道理。我马上给出新的营销成本估计。

在收到了这些估计之后，管理科学小组画出了每个产品的周营销成本和产品生产率之间的曲线。每条曲线显示，当生产率增加时，营销成本以生产率的平方增长。因此，对每个曲线假设了一个二次形式来应用 Excel 的曲线拟合过程。

这个曲线拟合过程估计，不管 $D$ 的值是整数还是分数，只要在生产约束的范围内，用以维持 $D$ 扇门的生产率的周营销成本大概是：

$$\text{门的营销成本} = 25D^2 \text{ 美元}$$

不考虑营销成本，每扇门的毛利润为 375 美元。因此，每周净利润大概是

$$\text{门的净利润} = 375D \text{ 美元} - 25D^2 \text{ 美元}$$

每周生产与销售的窗的相应数值如下所示：

$$\text{窗的营销成本} = 66\tfrac{2}{3}W^2 \text{ 美元}$$

$$\text{窗的毛利润} = 700W \text{ 美元}$$

$$\text{窗的净利润} = 700W \text{ 美元} - 66\tfrac{2}{3}W^2 \text{ 美元}$$

图 10.10 显示了两种产品的利润曲线，两者都具有递减的边际利润，而其中窗的边际利润减少量在 $W$ 值很大时更为显著。

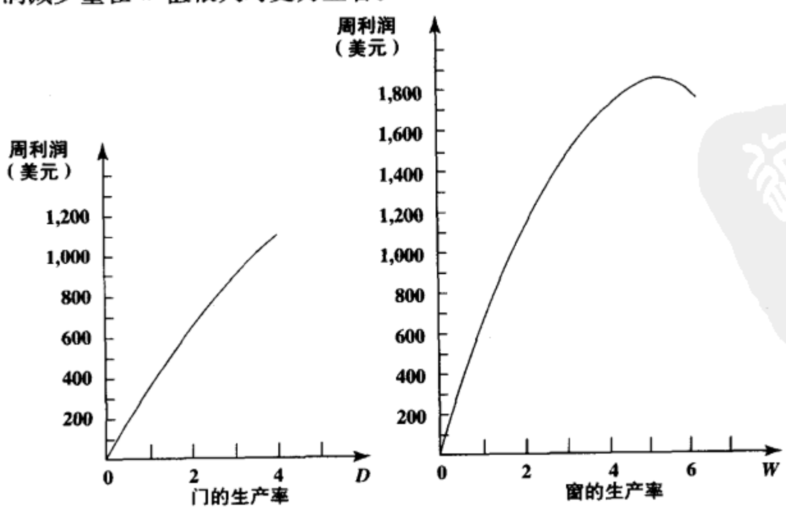



**图 10.10**　图中的曲线表示的是伟恩德门、窗的利润曲线，该问题考虑了非线性增加的营销成本。

将门、窗的净利润结合起来，就可以得到新的最大化目标函数，

$$利润 = 375D\text{ 美元} - 25D^2\text{ 美元} + 700W\text{ 美元} - 66\tfrac{2}{3}W^2\text{ 美元}$$

> 二次规划问题具有线性的约束条件，和一个二次的边际收益递减的目标函数。

该目标函数的约束与前面一样。由于目标函数中包含 $D^2$ 和 $W^2$ 这样的指数项，不同于指数为 1 的决策变量，所以该目标函数是非线性函数，该问题是非线性规划问题。而且，因为这个目标函数是一个二次方程式（并且该问题具有本节开始时提出的非线性规划问题的所有三个特征），因此整个问题是一个特殊类型的非线性规划问题，称之为二次规划问题。这是非线性规划问题的常见类型，也是一类比较容易建立公式和求解的问题。特殊的运算法则已经开发出来，专门用于有效地求解二次规划问题，所以商业的管理科学软件包通常都包括这样一个运算法则，以求解这种类型的大型问题（然而，Excel Solver 仅使用一般运算法则来求解所有边际收益递减的非线性规划问题）。

## 电子表格建模

图 10.11 显示了这个问题的电子表格模型描述。将该模型与图 10.9 中原始的伟恩德玻璃公司问题模型相比较，你会发现这是一件有趣的事。第一眼，你会觉得这两个模型几乎是完全一样的，然而，仔细地观察一下，就会发现两者之间有四个显著的差别。

第一个差别，图 10.9 中第四行的“单位利润”被不包含营销成本的“单位毛利润”所取代。

第二个差别，为了在计算目标单元格“总利润”（H16）时将营销成本考虑在内，图 10.11 的电子表格增加了几个输出单元格：销售毛利润（H12）、营销成本（C14：D14）和总营销成本（H14）。

> **Excel 窍门：**
> 当在可变单元格中的公式需要指数时，只要把符号^设置在可变单元格和指数之间。

第三个更基本的差别存在于输入目标单元格的等式中。在图 10.9 中，总利润（G12）的公式使用了 SUMPRODUCT 函数，该函数是线性规划的主要特征，每个乘积项是数据单元格和可变单元格的乘积。而图 10.11 中，因为部分目标函数是非线性的，所以需要使用别的方法来计算总利润中的营销成本。例如，考虑目标函数中包含 $D^2$ 的指数项。因为 $D$ 的值出现在单元格“门的产量”（C12）中，所以 Excel 用“门的产量”^2表示 $D^2$，其中^表示跟在该符号后面的数值(2)是“门的产量”的指数。这种方法也用在 $W^2$ 的表示上。因此，总营销成本的公式为：

总营销成本 = SUM（营销成本）
= 25 *（“门的产量”^2）+ 66.667 *（“窗的产量”^2）

而目标单元格的公式为：

总利润（H16）=“销售毛利润”（H12）－“总营销成本”（H14）

第四个差别出现在图 10.9 和图 10.11 底部的 Solver 选项中。与图 10.9 不同，在图 10.11 中没有选择“假设线性模型”的选项，因为该模型不是一个线性规划模型。

在求解任何的非线性规划问题之前，点击“选项”按钮时，千万要确保没有选择“假设线性规划”的选项。对于这一模型，按下 Solver“求解”按钮后，就可以在“生产的单位数”显示出最优解，即：

$D = 3.214$（每周平均生产 3.214 单位门）

$$W = 4.179\text{（每周平均生产 4.179 单位窗）}$$

其中“总利润”（H16）显示出由此产生的每周总利润为 2708 美元。*D* 和 *W* 怪异的数值

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Wyndor Problem with Nonlinear Marketing Costs** | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | Doors | Windows | | | | |
| 4 | | Unit Profit (Gross) | $375 | $700 | | | | |
| 5 | | | | | Hours | | Hours | |
| 6 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available | |
| 7 | | Plant 1 | 1 | 0 | 3.214 | ≤ | 4 | |
| 8 | | Plant 2 | 0 | 2 | 8.357 | ≤ | 12 | |
| 9 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | | Doors | Windows | | | | |
| 12 | | Units Produced | 3.214 | 4.179 | | | Gross Profit from Sales | $4,130 |
| 13 | | | | | | | | |
| 14 | | Marketing Cost | $258 | $1,164 | | | Total Marketing Cost | $1,422 |
| 15 | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | Total Profit | $2,708 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: Total Profit

Equal To: ◉ Max ○ Min ○

**By Changing Cells:**

UnitsProduced

**Subject to the Constraints:**

HoursUsed <= HoursAvailable

| | E |
|---|---|
| 5 | Hours |
| 6 | Used |
| 7 | =SUMPRODUCT(C7:D7,UnitsProduced) |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:D8,UnitsProduced) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9,UnitsProduced) |

| | G | H |
|---|---|---|
| 12 | Gross Profit from Sales | =SUMPRODUCT(UnitProfit,UnitsProduced) |
| 13 | | |
| 14 | Total Marketing Cost | =SUM(MarketingCost) |
| 15 | | |
| 16 | Total Profit | =GrossProfitFromSales TotalMarketingCost |

| | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 14 | Marketing Cost | =25*(DoorsProduced^2) | =66.667*(WindowsProduced^2) |

**Solver Options**

☐ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cells |
|---|---|
| DoorsProduced | C12 |
| GrossProfitFromSales | H12 |
| HoursAvailable | G7:G9 |
| HoursUsed | E7:E9 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C7:D9 |
| MarketingCost | C14:D14 |
| TotalMarketingCost | H14 |
| TotalProfit | H16 |
| UnitProfit | C4:D4 |
| UnitsProduced | C12:D12 |
| WindowsProduced | D12 |

**图 10.11　具有非线性营销成本的伟恩德非线性规划问题的电子表格模型，其中的可变单元格“生产的单位数”（C12:D12）显示了最优的生产量，而目标单元格总利润（H16）给出了相应的每周总利润。**

解是很不直观的，因此图 10.12 给出了一些直观的图形，帮助理解为什么会得出这样的解。该图中的可行域与第二章中原始的伟恩德例子完全相同，但是，与前面通过目标函数直线寻找最优解不同，这里我们将具有相同的非线性目标函数值的点连成线，作出目标函数曲线。利用目标函数对各种($D,W$)可行解和不可行解计算得出利润。图中四条曲线中每条曲线都显示了某个固定利润值时的所有($D,W$)值(画出这些点并连接成曲线是一个相当烦琐的过程，这里就不再详细介绍)。从图中可以看出，随着利润值的增大，目标函数曲线不断右移。在目标函数曲线经过可行域的所有点中，最大利润值等于 2708 美元。因此，被利润为 2708 的曲线所切的可行解是最优解，用分数形式表示为：

$$(D,W)=(3\tfrac{3}{14},4\tfrac{5}{28})$$

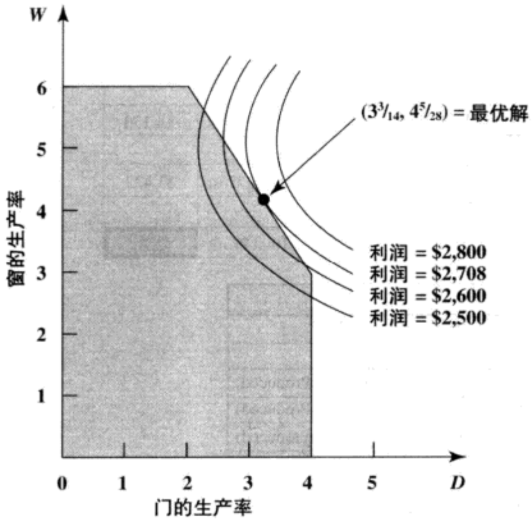



图 10.12 具有非线性营销成本的伟恩德问题非线性规划模型的图示。所示曲线为相应于不同利润值的目标函数曲线，其中(利润 = 2708 美元)有一条是切于最优解的，即 $(D,W)=(3\tfrac{3}{14},4\tfrac{5}{28})$。

因为使用这些分数来制定生产计划很不方便，所以必须先做出些调整。图 10.12 中利润为 2708 美元的曲线显示，可行域边界直线上与最优解相近的点所提供的利润都非常接近 2708 美元，例如，

$$(D,W)=(3\tfrac{1}{3},4)$$

其每周创造的总利润为 2706 美元，因此管理层更倾向于使用这个更加简单的生产计划。

相反，考虑图 10.9 中线性规划的解，$(D,W)=(2,6)$，它并没有考虑营销成本的非线性特性。如果使用考虑营销成本的非线性特性的当前目标函数，$(D,W)=(2,6)$ 得出的周利润仅有 2450 美元。这说明用更精确的非线性规划模型取代近似的线性规划模型可以获得目标值的改善。

## 运用非线性规划进行有价证券投资组合

管理大量证券投资组合的职业经理，现在都习惯于用部分基于非线性规划的计算机模型来指导他们的工作。因为投资者不仅关心预期回报，还关注着投资带来的相应风险，所以非线性规划被经常用来确定投资的组合，该投资组合在一定的假设下可以获得收益和风险之间的最优平衡。这种方法主要来自于哈里·马克维茨(Harry Markowitz)和威廉·夏普(William Sharpe)开创性的研究，他们因为该项研究而获得了 1990 年的诺贝尔经济学奖。

这种方法的一种描述方式，是将 4.3 节介绍的成本收益平衡问题非线性化。在这种情况下，成本就是与投资有关的风险，收益是投资组合的预期回报。因此，该模型的一般表达形式为，

这个模型关注投资组合的风险和预期收益之间的平衡。

最小化　风险

约束条件

预期回报≥最低可接受水平

风险在这里是以概率论中定义的回报的方差来衡量的，利用概率论中的标准公式，目标函数就可以表示为一个决策变量的非线性函数（决策变量是指各种股票占总投资的比例数量），其边际收益是递减的。在非负约束和各个股票投资占总投资比例相加为 1 的约束的基础上，再加上对预期回报的约束，这样我们就得到了一个最优化投资组合的简单的非线性规划模型。

为了说明这一方法，下面将介绍一个简单的数量化例子，其中所考虑的投资组合中仅包括三种证券，相应的决策变量为：

$S_1$ = 股票 1 占总投资的比例

$S_2$ = 股票 2 占总投资的比例

$S_3$ = 股票 3 占总投资的比例

这个模型的一个约束条件为，这些比例相加必须等于 1：

$$S_1 + S_2 + S_3 = 1$$

表 10.2 给出了三种股票所需要的数据。其中第二栏给出了每种股票的预期收益，因此整个投资组合的预期收益为：

$$\text{预期收益} = (21S_1 + 30S_2 + 8S_3)\%$$

投资者当前选择的最低可接受水平为：

$$\text{最低可接受预期收益} = 18\%$$

因为股票 1 和股票 2 的预期收益都超过 18%，所以只要这两个股票在投资组合中占据足够大的比例，就能达到最低可接受水平。

但是，股票 1 和股票 2 的风险要远远高于股票 3。而且，表 10.2 中所显示的预期收益并不是肯定能够获得，而且股票 1 和股票 2 的不确定性要比股票 3 高很多。每种股票都有一个潜在的有关收益的概率分布。分布的标准差（即，方差的平方根）帮助衡量分布是如何展开的，收益在预期收益的一个标准差之内的概率大概有 2/3。表 10.2 的第三栏给出了每种股票的风险。

**表 10.2　投资组合例子中股票的相关数据**

| 股　票 | 预期回报 | 风险（标准差） | 投资组合 | 每个股票交叉风险（协方差） |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 21% | 25% | 1 与 2 | 0.040 |
| 2 | 30 | 45 | 1 与 3 | -0.005 |
| 3 | 8 | 5 | 2 与 3 | -0.010 |

但是，由于第三栏只给出了孤立考虑每个股票时的单独风险，所以不能从该栏获得投资组合的风险。各种股票是同向变动，同时上升或下降（增加风险）；还是反向变动（减少风险），也将影响投资组合的风险。在表 10.2 中最右边的一栏中，股票 1 和股票 2 的交叉风险为正，说明这两种股票是同向变动的。而另两组股票的交叉风险为负，说明当股票 1、股票 2 下降时，股票 3 上升；反之亦然（在概率论的术语中，两种股票中每一个的交叉风险是它们收益的协方差，如表 10.2 中最右边一栏中给出的，所以两种股票的总交叉风险是这个协方差的两倍）。

表 10.2 中的数据主要是从前些年的股票收益中取了几个样本，接着计算了这些样本的平均值、标准差和协方差。当股票的前景与前几年的不一致时，至少要对一个股票预期收益的相应估计做出调整。运用概率论公式根据个别方差和协方差计算各种活动的总方差，整个投资组合的风险为：

$$\text{风险} = (0.25S_1)^2 + (0.45S_2)^2 + (0.05S_3)^2 + 2(0.04)S_1S_2 + 2(-0.005)S_1S_3 + 2(-0.01)S_2S_3$$

因此，该例子的非线性规划模型的代数形式为：

$$\text{最小化}\quad \text{风险} = (0.25S_1)^2 + (0.45S_2)^2 + (0.05S_3)^2 + 2(0.04)S_1S_2 + 2(-0.005)S_1S_3 + 2(-0.01)S_2S_3$$

约束条件

$$21S_1 + 30S_2 + 8S_3 \geqslant 18$$
$$S_1 + S_2 + S_3 = 1$$

且

$$S_1 \geqslant 0 \qquad S_2 \geqslant 0 \qquad S_3 \geqslant 0$$

很幸运，这个模型的目标函数是边际收益递减的（该目标函数边际收益递减并不是显而易见的，但是整个投资组合收益的方差所计算的风险对任何投资组合都是边际收益递减，因此证明了目标函数是边际收益递减）。而且，由于该目标函数是二次的，所以这是一个二次规划问题（二次函数允许包含由系数乘以两个变量乘积组成的项）。并且模型具有本节开始处列出的所有三个特征，因此需要求解的是一个比较简单型的非线性规划模型。

图 10.13 显示了用 Solver 求解之后的相应的电子表格模型。为了便于说明，可变单元格“投资组合”（C14:E14）以百分比的形式给出了 $S_1$、$S_2$、$S_3$ 的值，而不是用分数。这些单元格指出了问题的最优解为，

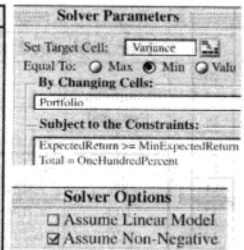
$S_1 = 40.2\%$　　投资组合的 40.2% 分配给股票 1
$S_2 = 21.7\%$　　投资组合的 21.7% 分配给股票 2
$S_3 = 38.1\%$　　投资组合的 38.1% 分配给股票 3

> 投资组合的收益偏离预期收益的程度不大可能超出收益的标准差。

尽管股票 3 的回报较低，但是可抵消股票 1 和股票 2 的高风险，因而在投资组合中包含大量股票 3 是值得的。“预期收益”（C19）指出这个投资组合仍然可以获得 18% 的预期收益，与最低可接受水平相同。目标单元格“方差”（C21）给出了投资组合的风险，即整个投资组合收益的方差，为 0.0238。为了有助于说明这个数值，“标准差”（C23）计算了投资组合收益的相应标准差，等于 $\sqrt{0.0238} = 0.154 = 15.4\%$。标准差小于预期的

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Portfolio Selection Problem (Nonlinear Programming) | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | Stock 1 | Stock 2 | Stock 3 | | | |
| 4 | | Expected Return | 21% | 30% | 8% | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | Risk (Stand. Dev.) | 25% | 45% | 5% | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | Joint Risk (Covar.) | Stock 1 | Stock 2 | Stock 3 | | | |
| 9 | | Stock 1 | | 0.040 | -0.005 | | | |
| 10 | | Stock 2 | | | -0.010 | | | |
| 11 | | Stock 3 | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | | | Stock 1 | Stock 2 | Stock 3 | Total | | |
| 14 | | Portfolio | 40.2% | 21.7% | 38.1% | 100% | = | 100% |
| 15 | | | | | | | | |
| 16 | | | | | Minimum | | | |
| 17 | | | | | Expected | | | |
| 18 | | | Portfolio | | Return | | | |
| 19 | | Expected Return | 18% | ≥ | 18% | | | |
| 20 | | | | | | | | |
| 21 | | Risk (Variance) | 0.0238 | | | | | |
| 22 | | | | | | | | |
| 23 | | Risk (Stand. Dev.) | 15.4% | | | | | |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Covar12 | D9 |
| Covar13 | E9 |
| Covar23 | E10 |
| Covariance | C9:E11 |
| ExpectedReturn | C19 |
| MinExpectedReturn | E19 |
| OneHundredPercent | H14 |
| Portfolio | C14:E14 |
| SD1 | C6 |
| SD2 | D6 |
| SD3 | E6 |
| StandDev | C23 |
| Stock1 | C14 |
| Stock2 | D14 |
| Stock3 | E14 |
| StockExpectedReturn | C4:E4 |
| StockStandDev | C6:E6 |
| Total | F14 |
| Variance | C21 |




| | F |
|---|---|
| 13 | Total |
| 14 | =SUM(Portfolio) |

| | B | C |
|---|---|---|
| 19 | Expected Return | =SUMPRODUCT(StockExpectedReturn,Portfolio) |
| 20 | | |
| 21 | Risk (Variance) | =((SD1*Stock1)^2)+((SD2*Stock2)^2)+((SD3*Stock3)^2)+2*Covar12*Stock1*Stock2+2*Covar13*Stock1*Stock3+2*Covar23*Stock2*Stock3 |
| 22 | | |
| 23 | Risk (Stand. Dev.) | =SQRT(Variance) |

**图 10.13**　非线性规划投资组合的电子表格模型,其中可变单元格"投资组合"(C14:E14)给出了最优解,而目标单元格"方差"(C21)显示了相应的风险。

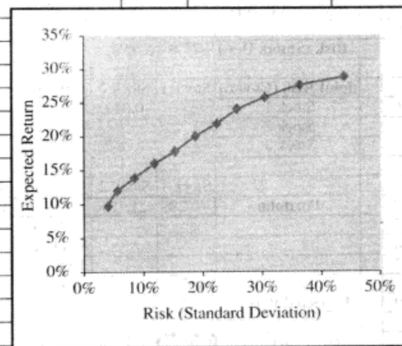
收益,这个结果是令人高兴的,因为这说明投资组合最终获得的实际收益不大可能为负。尽管"股票标准差"(C6:E6)给出的股票 1 和股票 2 的收益的标准差比较大,由于股票 3 的标准差很小,而且股票 1、3 协方差(E9)和股票 2、3 协方差(E10)为负值,所以投资组合的标准差能够这么小。

这个问题涉及寻找成本(风险)和收益(预期收益)之间的最佳平衡,所以是成本收益平衡问题的一个例子。除了目标函数的公式之外,它与 4.3 节中的成本收益平衡问题相类似。正如第五章中所进一步讨论的,对这种问题的分析很少会在为最初版本模型找到一个最优解后就结束了。模型中规定的有关收益的最低可接受水平是一个测试性的政策决策。在获得相应的成本之后,需要进行进一步的分析来找到成本和收益之间的最佳平衡。这个分析包括改变收益的最低可接受水平,然后观察对成本的影响。如果增加相对较少的成本就能获得更多的收益,那么就可以增加最低可接受水平。另一方面,如果减少一点收益就能节约很多成本,那么就可能需要降低最低可接受水平。

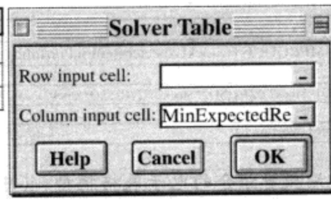
对当前的例子运用上述方法可以使用第 5 章描述的 Solver 表(包含在管理科学课件中)生成一个表格,表格中给出了当预期收益最低可接受水平在某一段范围时分别获得模型最优解时的预期收益和风险。图 10.14 列出了这样一个表格。按照金融界的说法,F 列和 G 列的两组数值被称为效率界限上的点。事实上,图 10.14 右边显示了效率界限的曲线。经过测试足够多的这些点,投资者就可以做出个人的决策,哪一种组合在预期收益和风险之间提供了最佳平衡。

投资者需要图 10.14 中所示的表格和曲线来决定哪一个投资组合在预期收益和风险之间提供了最佳平衡。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | | **Solver Table for Portfolio Selection Problem** | | | | | |
| 26 | | | | | | | |
| 27 | | Minimum | | | | | |
| 28 | | Expected | | | | Risk | Expected |
| 29 | | Return | Stock 1 | Stock 2 | Stock 3 | (St. Dev.) | Return |
| 30 | | | 40.20% | 21.70% | 38.10% | 15.40% | 18.00% |
| 31 | | 8% | 7.10% | 3.70% | 89.10% | 3.90% | 9.70% |
| 32 | | 10% | 8.10% | 4.30% | 87.60% | 3.90% | 10.00% |
| 33 | | 12% | 16.20% | 8.60% | 75.20% | 5.60% | 12.00% |
| 34 | | 14% | 24.20% | 13.00% | 62.80% | 8.60% | 14.00% |
| 35 | | 16% | 32.20% | 17.30% | 50.50% | 12.00% | 16.00% |
| 36 | | 18% | 40.20% | 21.70% | 38.10% | 15.40% | 18.00% |
| 37 | | 20% | 48.20% | 26.10% | 25.70% | 18.90% | 20.00% |
| 38 | | 22% | 56.20% | 30.40% | 13.40% | 22.50% | 22.00% |
| 39 | | 24% | 64.20% | 34.80% | 1.00% | 26.10% | 24.00% |
| 40 | | 26% | 44.40% | 55.60% | 0.00% | 30.80% | 26.00% |
| 41 | | 28% | 22.20% | 77.80% | 0.00% | 37.30% | 28.00% |
| 42 | | 30% | 0.00% | 100.00% | 0.00% | 45.00% | 30.00% |




| | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|
| 28 | | | | Risk | Expected |
| 29 | Stock 1 | Stock 2 | Stock 3 | (St. Dev.) | Return |
| 30 | =Stock1 | =Stock2 | =Stock3 | =StandDev | =ExpectedReturn |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| ExpectedReturn | C19 |
| MinExpectedReturn | E19 |
| StandDev | C23 |
| Stock1 | C14 |
| Stock2 | D14 |
| Stock3 | E14 |

**图 10.14** Solver 表的应用，显示了当改变图 10.13 模型中预期收益的最低可接受水平时，预期收益与风险之间的平衡。

## 问题回顾

1. 能够用 Excel Solver 求解的简单非线性规划问题的三个显著特征是什么？
2. 对于简单的非线性规划问题，其包含两个决策变量的图形显示与线性规划的相应图形显示有何区别？
3. 简单非线性规划问题要属于二次规划问题还需要有其他什么特征？
4. 应用非线性规划处理投资组合问题时，要获得的是哪两个因素之间的最佳平衡？

# 10.3 可分离规划

> 对利润或成本曲线是分段直线并且边际收益递减的非线性规划问题，可分离规划技术将问题转换成相应的线性规划问题。

10.1 节描述了问题的活动和总绩效测度之间存在的几种非比例关系类型。一种是边际收益递减，10.2 节集中讨论了所有活动是边际收益递减的非线性规划问题。现在，我们将注意力转到相关类型的非比例关系，所有活动仍然是边际收益递减，区别在于现在每个活动的利润或成本曲线是分段直线，因为它是由一系列连接的直线段组成。10.1 节中图 10.2(b) 列出了这样一个利润曲线（或者任何其他绩效测度最大化的曲线），图 10.3(c) 列出了成本曲线（或者其他有关的最小化曲线）。

有一种特殊的技术称之为“可分离规划”，是专门设计来处理这种类型的非线性规划问题。因此，总利润（或总成本）仅是从单个活动的分段直线利润（或成本）曲线上直接获得的利润（或成本）相加得到的总和（不允许有交叉乘积项，并且每条曲线必须边际收益递减）。由于每条利润或成本曲线都存在直线段，所以这个技术将模型描述转换为线性规划模型。这有助于非常有效地求解模型，并且可以对线性规划运用 what-if 分析的强大工具。

下文中伟恩德玻璃公司的问题说明了这种技术。

## 需要加班时伟恩德玻璃公司问题

公司现在将根据第二、第五章和 10.2 节所描述的计划开始生产特殊类型的新门和新窗。由于存在非线性营销成本，在 10.2 节中曾讨论过，当前计划的生产率是：

$$(D, W) = \left(3\frac{1}{3}, 4\right)$$

其中 $D$ 和 $W$ 分别是每周生产的门和窗的数量。

然而有一个新的变化，有可能会改变最初四个月的生产计划。

具体地说，公司接到了一项特别的订单，要求在接下来的四个月内在工厂 1 和工厂 2 生产手工艺品。为了完成这一订单就必须从原产品的生产中调出一部分的工人，因此，为了能够最大限度利用每个工厂的机器和设备的生产能力，剩下的工人就必须加班工作。

> 不需要考虑非线性营销成本的估计之后，应如何修改伟恩德模型以包含加班问题。

由于这个新的变动，公司管理层已经要求管理科学小组尽快更新模型，并检查当前的生产计划在最初四个月是否仍然是最有利的。为了能迅速了解问题，管理科学小组决定暂时忽略营销成本的非线性特性，而只是修改图 10.9 所示的原始的电子表格模型，并将加班考虑在内。

这样，模型原来的约束条件，“使用小时数”（E7:E9）≤可用小时数（G7:G9），还是有效的，加班时间可以用来弥补单元格 G7 和 G8 所给出的工厂 1 和工厂 2 的部分可使用生产时间。但是，因为这样生产时加班的额外成本会降低单位产品利润，所以目标函数不再有效。

表 10.3 给出了工厂 1 和工厂 2 每周在正常工作时间和加班工作时间生产门、窗的最大数量。工厂 3 不需要加班，约束条件也不用改变，因此在表格底部的括号内给出了原来的约束条件。第四栏是第二栏和第三栏的数据之和，表示工厂 1 和工厂 2 最初的约束（$D \leqslant 4$ 和 $2W \leqslant 12$，所以 $W \leqslant 6$）。最后两栏表示的是基于原始营销成本估计（不是 10.2 中经过调整的营销成本），正常时间和加班时间生产产品的估计单位利润（在工厂 1 和工厂 2）。

**表 10.3　需要加班的伟恩德问题的数据**

| 产　品 | 每周最大产量 | | | 产品的单位利润（美元） | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 正常工作时间 | 加班时间 | 总　计 | 正常工作时间 | 加班时间 |
| 门 | 3 | 1 | 4 | 300 | 200 |
| 窗 | 3 | 3 | 6 | 500 | 100 |
| | $(3D + 2W \leqslant 18)$ | | | | |

图 10.15 画出了每种产品每周利润与生产率的关系曲线。从中可以看出，随着生产率的增加，在增加到需要加班时，利润曲线的斜率（陡度）减少，这是因为在表 10.3 所示的加班时间产品的单位利润比正常时间要少。因此，这两种产品的边际收益递减。

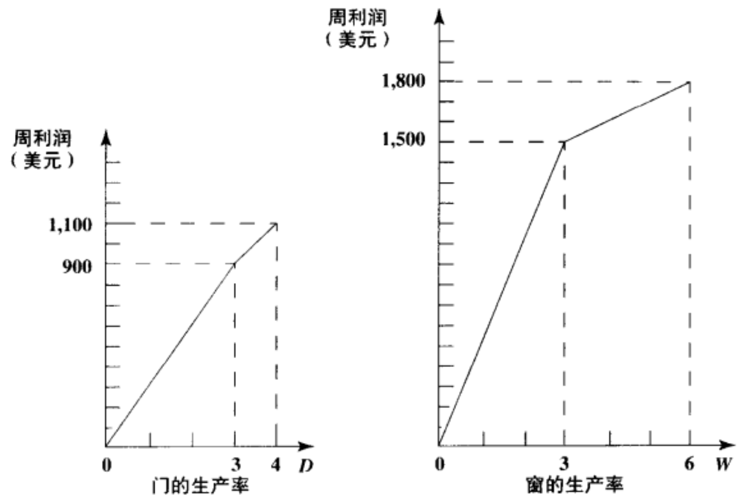



**图 10.15** 伟恩德玻璃公司的利润曲线，表示当每周生产率超过 3 个单位而需要加班的情况下，每种产品利润与每周产量间的关系。在这里，这些利润曲线是根据原始的营销成本估计做出的，而不是 10.2 节中经过调整的非线性营销成本。

管理层曾经考虑过使用临时工来避免加班造成的额外费用，但是，由于工人缺乏经验，会降低生产效率，同时会产生培训费用。而且由于这只是短期情况，四个月之后工厂就可以恢复正常的生产，所以管理层最后还是决定采取加班的措施。

但是，管理层坚持只有当每种产品的工作人员在正常工作时间完全用足时，才可以加班。而且，他们认为，只要能够增加总利润，可以暂时调整目前新产品的生产计划。

## 对这一问题应用可分离规划

由于图 10.15 中每条利润曲线都不是直线，所以每种产品的利润与生产率不成比例。因此违背了线性规划的比例性假设（在 10.1 节中讨论过）。然而每条利润曲线是由两条在斜率改变处连接起来的直线线段组成的，因此，对于每一直线线段上的利润曲线仍然符合比例性假设。这就体现了下面的关键思路。

> 关键是为利润曲线（成本曲线）的每个线段给出一个分离的决策变量。

**可分离规划技术**（The Separable Programming Technique）：对于违背比例性假设的任一活动，将其利润线划分成多段，使得每一段为直线线段；为活动利润曲线上的每一直线线段引入新的可分决策变量，以代替原来用单一决策变量代表的活动水平。因为每一直线线段的新决策变量仍然遵循比例性假设，因此可以为这些变量建立线性规划模型。

对于伟恩德问题，这些新的决策变量为：

$D_R$ = 正常工作每周生产的门的数量

$D_O$ = 加班工作每周生产的门的数量

$W_R$ = 正常工作每周生产的窗的数量

$W_O$ = 加班工作每周生产的窗的数量

与这些变量相对应的单位利润如表 10.3 的最后两栏所示，这些数据是目标函数的系数。第二栏和第三栏表示的是这些变量的最大值，因此在模型中引入相应的约束。原始伟恩德问题模型的三个函数约束还是有效的，只需要将 $D$ 以 $(D_R + D_O)$ 代替，而 $W$ 以 $(W_R + W_O)$ 代替。

由此生成的电子表格模型如图 10.16 所示。可变单元格“生产的单位数”（C14:D15）包含了四个决策变量的各自的单元格。新的约束条件，“生产的单位数”（C14:D15）≤“最

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor Problem with Overtime (Separable Programming) | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | Unit Profit | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Regular | $300 | $500 | | | |
| 5 | | Overtime | $200 | $100 | | | |
| 6 | | | | | Hours | | Hours |
| 7 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 8 | | Plant 1 | 1 | 0 | 4 | ≤ | 4 |
| 9 | | Plant 2 | 0 | 2 | 6 | ≤ | 12 |
| 10 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 11 | | | | | | | |
| 12 | | | Units Produced | | | Maximum | |
| 13 | | | Doors | Windows | | Doors | Windows |
| 14 | | Regular | 3 | 3 | ≤ | 3 | 3 |
| 15 | | Overtime | 1 | 0 | ≤ | 1 | 3 |
| 16 | | Total Produced | 4 | 3 | | | |
| 17 | | | | | | | |
| 18 | | | Total Profit | $2,600 | | | |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: Total Profit

Equal To: ◉ Max ○ Min ○

By Changing Cells:

UnitsProduced

Subject to the Constraints:

HoursUsed <= HoursAvailable

UnitsProduced <= Maximum

| | E |
|---|---|
| 6 | Hours |
| 7 | Used |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:D8,TotalProduced) |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9,TotalProduced) |
| 10 | =SUMPRODUCT(C10:D10,TotalProduced) |

| | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 16 | Total Produced | =SUM(C14:C15) | =SUM(D14:D15) |

| | C | D |
|---|---|---|
| 18 | Total Profit | =SUMPRODUCT(UnitProfit,UnitsProduced) |

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cells |
|---|---|
| HoursAvailable | G8:G10 |
| HoursUsed | E8:E10 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C8:D10 |
| Maximum | F14:G15 |
| TotalProduced | C16:D16 |
| TotalProfit | D18 |
| UnitProfit | C4:D5 |
| UnitsProduced | C14:D15 |

**图 10.16**　在需要加班的情况下，伟恩德可分离规划问题的电子表格模型，其中可变单元格“生产的单位数”(C14:D15)给出了 Solver 产生的最优解，而目标单元格“总利润”(D18)显示了相应的每周总利润。这个模型是根据图 10.15 的利润曲线建立的，并没有包含 10.2 节调整的非线性营销成本。

大值”(F14:G15)，符合表 10.3 第二栏和第三栏指出的这些决策变量的上限。新的输出单元格“生产的总数”(C16:D16)是每种产品在正常工作时间和加班时间生产的产品数量总和。于是可以通过等式来计算使用的小时数，“使用的小时数”(E8:E10) = SUMPRODUCT

(每单位使用小时数,生产的总数)。其他方面,该模型都基本上与图 10.9 中的原始线性规划模型相一致。注意在求解过程中了选择了“线性模型假设”这一选项,因为该方法建立的新模型是线性规划模型。新的决策变量符合了线性规划的比例性假设,因此,该模型可以很快求解出。可分离规划具有将原始模型重新建模以适合线性规划的能力,从而使得可分离规划成为一种很有价值的技术。

但是,在这个模型建模中还有很重要的一点没有明确考虑到。回顾前面管理层的原则,在正常时间生产没有完全利用之前,不能进行加班。而该模型中没有体现这一限制的约束条件。因此,在模型中当 $D_R<3$ 时,$D_O>0$,以及当 $W_R<3$ 时,$W_O>0$,都是可行的。

值得庆幸的是,这样的解在模型中虽然是可行的,但绝不会是最优的。因为每产品的加班单位利润小于正常的单位利润,所以活动(生产两种产品)的边际收益递减。因此,为了使总利润最大化,最优解肯定会先自动地用完正常的工作时间,才开始采取加班的措施。

使用可分离规划技术时需要满足边际收益递减这一条件。

问题的关键是活动的边际收益递减。如果缺少这一条件,这种方法的线性规划模型是无法求得合理的最优解的。这就是为什么可分离规划仅适用于活动边际收益递减的情况(不包括满足比例性假设的那些活动)。

图 10.16 的可变单元格“生产的单位数”(C14:D15)显示,在用 Excel Solver 求解之后,得到的最优解为:

$D_R=3, D_O=1$:每周生产 4 扇门

$W_R=3, W_O=0$:每周生产 3 扇窗

目标单元格“总利润”(D18)给出了每周的总利润,为 2600 美元。而在之前的生产计划中(每周生产 31/3 扇门,4 扇窗),即还没有使用加班时间的情况下,每周的总利润为 2567 美元。

## 对光滑利润曲线应用可分离规划

在可分离规划的一些应用中,利润线是一条曲线而非一系列的直线段。在这种情况下,活动的边际收益不是在特定的几个点减少,而是连续减少的。

例如,图 10.17 中的实线显示了这样的一条利润曲线,为了能够应用可分离规划,这条曲线可近似为一系列的直线段,如图中虚线段所示。为每一直线段引入一个新变量(并对其他具有该类利润曲线的活动重复这一操作),原先运用到伟恩德例子的方法也就可以同样将这个问题转换成为线性规划问题。

这并不是解决如图 10.17 所示该类利润曲线问题的惟一方法。10.2 节讨论的问题就是属于这种类型。Excel Solver 利用建立了利润曲线公式的非线性规划模型可以解决类似的问题。这种方法的好处是不需要使用近似曲线,而可分离规划需要使用如图 10.17 中的近似。

图 10.17 中的近似曲线只需要估计三个点上的利润,而不用为整个利润曲线估计一个公式。

然而,可分离规划也有其特定的优势。首先,可分离规划将问题转换为线性规划问题,可以加快求解速度,这对大型问题来说是很有帮助的。其次,线性规划描述可以使用 Solver 的敏感性报告,这是对 what-if 分析的补充,敏感性信息指出了何时使用非线性规划模型是几乎没用的。第三个重要的优势是,可分离规划只需要估计每个活动在某些点上的利润,就像图 10.17 上的几个点一样。因此,它无需使用曲线拟合方法估计利润曲线的公式,这种估计会在过程中引入近似。

以下伟恩德故事的最后一部分将介绍对这两种方法的应用。

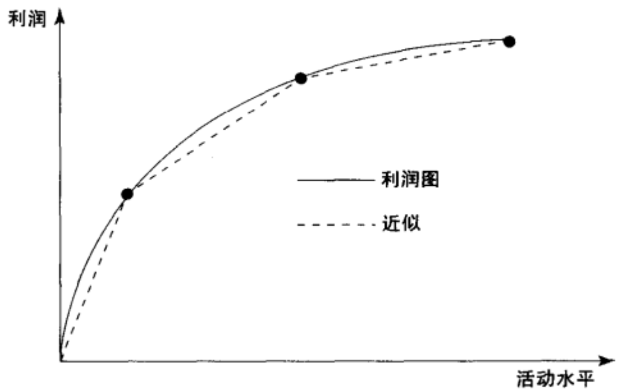



图 10.17　实线表示的是某一边际收益连续减少的活动的利润曲线，所示的虚线段表示使用可分离规划的近似。

## 存在加班成本和非线性营销成本的伟恩德问题

图 10.16 的电子表格模型迅速给出了接下来四个月新产品生产率的近似估计。对于计划目的而言，这个结果是有效的；但是这个模型只是一个粗略的模型，因为它并没有考虑 10.2 节中发生的非线性营销成本的新估计。因此，伟恩德公司管理科学小组接下来的步骤就是结合加班成本和非线性营销成本这两个新的估计，进一步完善模型。

回想一下，伟恩德公司营销副总裁安 · 莱斯特估计分别需要 $25D^2$ 美元和 $66\frac{2}{3}W^2$ 美元的营销成本来维持每周对 $D$ 扇门和 $W$ 扇窗的销售。这些成本需要从每种产品的毛利润（没有包含营销成本的利润）中减去以获得该产品的利润。在此前的表 10.3 中，估计单位利润时采用的营销成本是每扇门 75 美元、每扇窗 200 美元；现在管理科学小组需要使用表 10.4 中所示的数据。

表 10.4　存在加班成本和非线性营销成本的伟恩德问题的数据

| 产　品 | 每周最大产量 | | | 单位毛利润（美元） | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 正常工作时间 | 加班时间 | 总计 | 正常工作时间 | 加班时间 | 营销成本 |
| 门 | 3 | 1 | 4 | 375 | 275 | $25D^2$ |
| 窗 | 3 | 3 | 6 | 700 | 300 | $66\frac{2}{3}W^2$ |

根据表 10.4 的数据，表 10.5 的第四栏列出了当每周生产 $D$ 扇门时，为 $D$ 分别赋予不同的值可以获得的周利润。将第二栏的毛利润减去第三栏的营销成本就可以得出第四栏的利润。最右边一栏给出了当 $D$ 的值每增加 1 时增加的利润值。因此，将当前行的利润减去上一行的利润就可以计算得出增加的利润。注意，当 $D=4$ 时，增加的利润下降得最大，因为在 $D$ 超过 3 时必须要使用加班时间。

表 10.5　每周生产 $D$ 扇门时，伟恩德公司周利润的计算（美元）

| $D$ | 毛利润（美元） | 营销成本（美元） | 利润（美元） | 增加的利润（美元） |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | — |
| 1 | 375 | 25 | 350 | 350 |
| 2 | 750 | 100 | 650 | 300 |
| 3 | 1125 | 225 | 900 | 250 |
| 4 | 1400 | 400 | 1000 | 100 |

表 10.6 给出相应的对窗的计算。当 $W=4$，$W=5$，$W=6$ 时，由于 $W$ 超过 3 时需要支付

大量额外的加班成本,所以增加的利润是负的。

**表 10.6 每周生产 W 扇窗时,伟恩德公司周利润的计算(美元)**

| D | 毛利润(美元) | 营销成本(美元) | 利润(美元) | 增加的利润(美元) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | — |
| 1 | 700 | 66⅔ | 633⅓ | 633⅓ |
| 2 | 1400 | 266⅔ | 1133⅓ | 500 |
| 3 | 2100 | 600 | 1500 | 366⅔ |
| 4 | 2400 | 1066⅔ | 1333⅓ | -166⅔ |
| 5 | 2700 | 1666⅔ | 1033⅓ | -300 |
| 6 | 3000 | 2400 | 600 | -433⅓ |

图 10.18 中的实线分别显示门和窗的利润曲线。随着产量的增加,每条曲线的斜率都是下降的,因此两个活动的边际收益递减。当产量很小时,几乎看不出斜率是下降的;当产量很大时,斜率下降比较明显。在 $D=3$ 和 $W=3$ 时两条曲线上分别有一个折点,因为此时进一步增加产量需要利用加班时间。

> 当分段直线与实际利润曲线非常近似时,使用可分离规划是相当好的。

现在,管理科学小组将使用可分离规划来决定采用什么样的生产率使总利润最大化。为了这个目的,小组使用了图 10.18 中虚线线段来获得与实际利润曲线非常近似的分段直线线段。窗的利润曲线中,从 $W=3$ 利润为 1500 美元到 $W=6$ 利润为 600 美元这一段,近似值与实际值并不十分接近(每单位窗平均下降 300 美元)。由于当 $W$ 大于 3 时,利润开始下降,所以不需要将 $W$ 提高到这么大。因此,对这段利润曲线不需要进行非常接近的近似,在 $W=3$ 和 $W=6$ 之间只用了惟一的一条线段来近似。

> 可分离规划通过使用利润曲线的近似分段直线的斜率来计算利润曲线不同部分的单位利润。

图 10.19 显示了基于图 10.18 中分段直线的利润曲线做出的可分离规划的电子表格模型。这个模型与图 10.16 中没有考虑非线性营销成本新估计的可分离规划电子表格模型十分相似。后者是基于图 10.15 中分段直线的利润曲线做出的,图 10.15 的两条利润曲线都是由两条直线线段构成。因此,两组单元格,“单位利润”(C4:D5)和“生产的单位数”(C14:D15)都只有两行。由于图 10.18 中的每条分段利润直线都有四个线段,所以相应的图 10.19 中的两组单元格,“单位利润”(C4:D7)和“生产的单位数”(C17:D20)都有四行。“单位利润”(C4:D7)中的数值就是图 10.18 中相应直线线段的斜率。这些斜率可以直接从表 10.5 和表 10.6 给出的增加的利润中获得,除了单元格 D7 之外。D7 这个单元格的数值是根据图 10.18 中 $W=3$ 和 $W=6$ 之间的线段来确定的,由于随着 $W$ 每增加一个单位利润下降 300 美元,所以该线段斜率为 -300。这个 -300 的斜率其实是表 10.6 最后三个增加的利润的平均值。图 10.18 中所有其他线段只涵盖一个单位的 $D$ 或 $W$,因此这些线段的斜率等于表 10.5 或表 10.6 中相应的增加的利润。

图 10.19 中的可变单元格“生产的单位数”(C17:D20)通过 Solver 给出了最优解。“生产的总数”(C21:D21) = SUM(生产的单位数),得出了相应的总生产量,即

$D=4$,每周生产 4 扇门,其中加班生产 1 扇门

$W=3$,每周生产 3 扇窗

目标单元格“总利润”(D23)指出相应的周利润为 2501 美元(Solver 此处实际上出现了

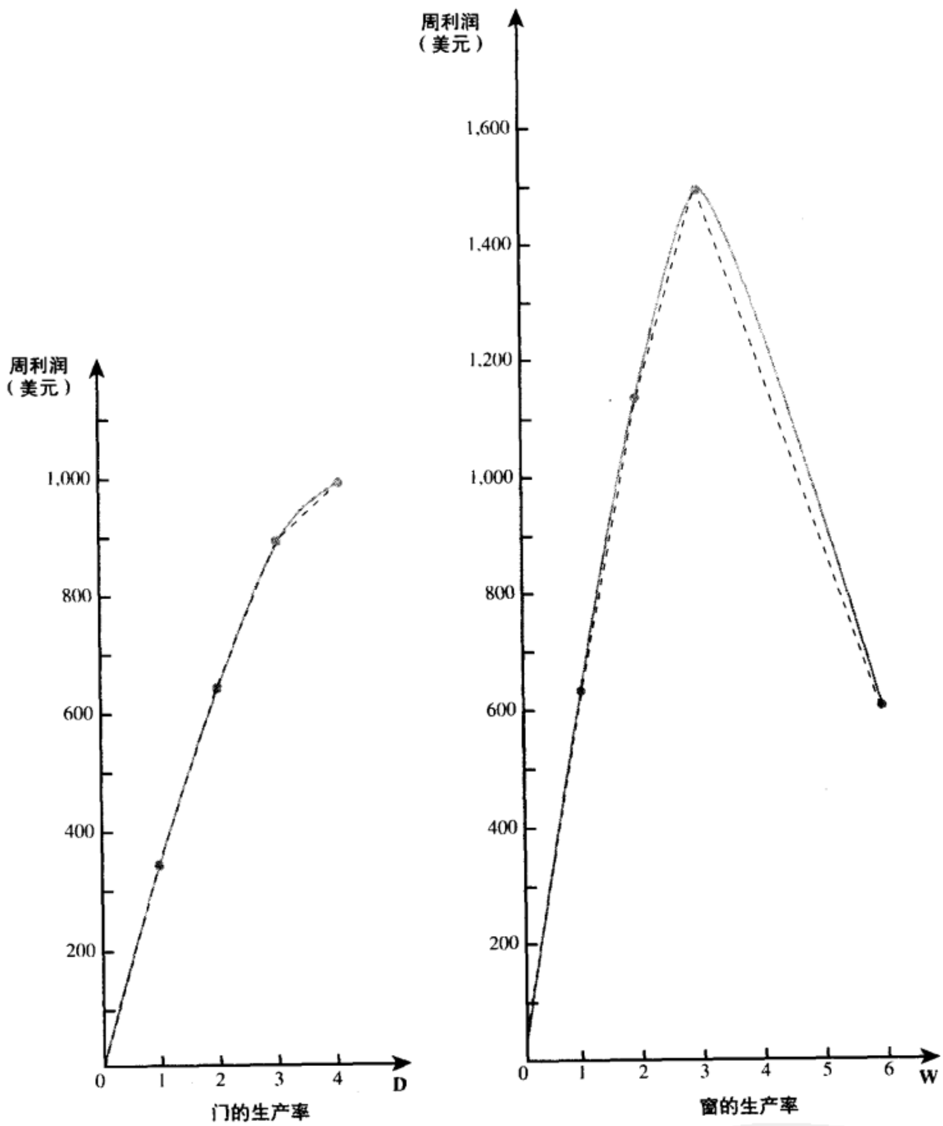



**图 10.18**　实线表示的是同时考虑加班成本和非线性营销成本时伟恩德公司门和窗的利润曲线。虚线线段显示的是近似曲线，在图 10.19 的可分离规划模型中将会使用到。

四舍五入的问题，因为正确的周利润为 2500 美元)。

> 图 10.19 和图 10.20 在可分离规划模型和 10.2 节中讨论的非线性规划模型之间提供了比较。

为了检验这些结果，管理科学小组也为图 10.18 中的光滑曲线创立了公式，并建立和运行了相应的非线性规划模型。图 10.20 显示了该电子表格模型。这个模型几乎与图 10.11 中不包含加班成本的电子表格模型一样。一个区别是，图 10.11 中"单位利润"(C4:D4)和"生产的单位数"(C12:D12)都只有一行，而现在为了区分正常工作时间和加班时间已经分成了两行，分别是(C4:D5)和

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Wyndor with Overtime and Marketing Costs (Separable)** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | **Unit Profit** | Doors | Windows | | | |
| 4 | | Regular (0–1) | $350.00 | $633.33 | | | |
| 5 | | Regular (1–2) | $300.00 | $500.00 | | | |
| 6 | | Regular (2–3) | $250.00 | $367.67 | | | |
| 7 | | Overtime | $100.00 | -$300.00 | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | | | | | Hours | | Hours |
| 10 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available |
| 11 | | Plant 1 | 1 | 0 | 4 | ≤ | 4 |
| 12 | | Plant 2 | 0 | 2 | 6 | ≤ | 12 |
| 13 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 |
| 14 | | | | | | | |
| 15 | | | **Units Produced** | | | **Maximum** | |
| 16 | | | Doors | Windows | | Doors | Windows |
| 17 | | Regular (0–1) | 1 | 1 | ≤ | 1 | 1 |
| 18 | | Regular (1–2) | 1 | 1 | ≤ | 1 | 1 |
| 19 | | Regular (2–3) | 1 | 1 | ≤ | 1 | 1 |
| 20 | | Overtime | 1 | 0 | ≤ | 1 | 3 |
| 21 | | Total Produced | 4 | 3 | | | |
| 22 | | | | | | | |
| 23 | | | Total Profit | $2,501 | | | |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: Total Profit

Equal To: ◉ Max ○ Min ○

By Changing Cells:

UnitsProduced

Subject to the Constraints:

HoursUsed <= HoursAvailable

UnitsProduced <= Maximum

| | E |
|---|---|
| 9 | Hours |
| 10 | Used |
| 11 | =SUMPRODUCT(C11:D11,TotalProduced) |
| 12 | =SUMPRODUCT(C12:D12,TotalProduced) |
| 13 | =SUMPRODUCT(C13:D13,TotalProduced) |

| | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 21 | Total Produced | =SUM(C17:C20) | =SUM(D17:D20) |

| | C | D |
|---|---|---|
| 23 | Total Profit | =SUMPRODUCT(UnitProfit,UnitsProduced) |

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cells |
|---|---|
| HoursAvailable | G11:G13 |
| HoursUsed | E11:E13 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C11:D13 |
| Maximum | F17:G20 |
| TotalProduced | C21:D21 |
| TotalProfit | D23 |
| UnitProfit | C4:D7 |
| UnitsProduced | C17:D20 |

**图 10. 19** 当需要加班和考虑非线性营销成本时，伟恩德可分离规划问题的电子表格模型。通过将可变单元格“生产的单位数”(C17:D20)的各列加总，“生产的总数”(C21:D21)给出了求解之后的最优解。由于四舍五入的错误，目标单元格“总利润”(D23)显示相应的周利润为 2501 美元而不是正确答案 2500 美元。

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Wyndor With Overtime and Marketing Costs (Nonlinear Programming) | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | Unit Profit (Gross) | Doors | Windows | | | | |
| 4 | | Regular | $375 | $700 | | | | |
| 5 | | Overtime | $275 | $300 | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | Hours | | Hours | |
| 8 | | | Hours Used per Unit Produced | | Used | | Available | |
| 9 | | Plant 1 | 1 | 0 | 4 | ≤ | 4 | |
| 10 | | Plant 2 | 0 | 2 | 6 | ≤ | 12 | |
| 11 | | Plant 3 | 3 | 2 | 18 | ≤ | 18 | |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | Maximum | | |
| 14 | | Units Produced | Doors | Windows | | Doors | Windows | |
| 15 | | Regular | 3 | 3 | ≤ | 3 | 3 | |
| 16 | | Overtime | 1 | 0 | ≤ | 1 | 3 | |
| 17 | | Total Produced | 4 | 3 | | | | |
| 18 | | | | | | Gross Profit from Sales | | $3,500 |
| 19 | | Marketing Cost | $400 | $600 | | Total Marketing Cost | | $1,000 |
| 20 | | | | | | | Total Profit | $2,500 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: Total Profit

Equal To: ● Max ○ Min

By Changing Cells:

UnitsProduced

Subject to the Constraints:

HoursUsed <= HoursAvailable

UnitsProduced <= Maximum

**Solver Options**

☐ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cells |
|---|---|
| DoorsProduced | C17 |
| GrossProfitFromSales | H18 |
| HoursAvailable | G9:G11 |
| HoursUsed | E9:E11 |
| HoursUsedPerUnitProduced | C9:D11 |
| MarketingCost | C19:D19 |
| Maximum | F15:G16 |
| TotalMarketingCost | H19 |
| TotalProduced | C17:D17 |
| TotalProfit | H20 |
| UnitProfit | C4:D5 |
| UnitsProduced | C15:D16 |
| WindowsProduced | D17 |

| | E |
|---|---|
| 7 | Hours |
| 8 | Used |
| 9 | =SUMPRODUCT(C9:D9,TotalProduced) |
| 10 | =SUMPRODUCT(C10:D10,TotalProduced) |
| 11 | =SUMPRODUCT(C11:D11,TotalProduced) |

| | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 17 | Total Produced | =SUM(C15:C16) | =SUM(D15:D16) |
| 18 | | | |
| 19 | Marketing Cost | =25*(DoorsProduced^2) | =66.667*(WindowsProduced^2) |

| | G | H |
|---|---|---|
| 18 | Gross Profit from Sales | =SUMPRODUCT(UnitProfit,UnitsProduced) |
| 19 | Total Marketing Cost | =SUM(MarketingCost) |
| 20 | Total Profit | =GrossProfitFromSales–TotalMarketingCost |

**图 10.20**　当需要加班和考虑非线性营销成本时，伟恩德非线性规划问题的电子表格模型。“生产的总数”(C17:D17)给出了求解之后的最优产量，目标单元格“总利润”(H20)显示相应的周利润。注意这个非线性规划描述给出了与图 10.19 中可分离规划描述的相同的结论(排除四舍五入错误之后)。

(C15:D16)。由于利润曲线在 $D=3$ 和 $W=3$ 时存在折点,所以这两行需要为利润曲线折点两边的部分分别创立公式。"生产的总数"(C17:D17)给出了与图 10.19 可分离规划模型相同的最优解,$(D,W)=(4,3)$,总利润为 2500 美元。

根据这些结论,伟恩德管理层对接下来需要加班的 4 个月采取了$(D,W)=(4,3)$的生产率。4 个月之后,生产计划变为$(D,W)=(3\frac{1}{3},4)$,如 10.2 节中得到的结果。

伟恩德案例研究到此就结束了。一个关键的经验就是管理科学的研究有时为了说明一个问题,可能需要建立一个以上的模型。随着研究的继续以及附加的相关考虑的出现,原先的模型通过一系列的调整增加逐渐变为一个相当复杂的模型,一个最初是线性规划的模型最后可能成为一个非线性规划模型。

### 问题回顾

1. 对于违背比例性假设的活动,为了应用可分离规划,其利润曲线必须是怎样的形状(或者必须对利润曲线作怎样的近似)?
2. 在运用可分离规划时,最终建立的是哪一类型数学模型?
3. 对于活动的利润曲线形状类似图 10.17 所示曲线的问题,利用图中所示的近似来应用可分离规划有什么好处?
4. 对于活动的利润曲线形状类似图 10.17 所示曲线的问题,利用含有利润曲线公式的非线性规划有什么好处?

## 10.4 复杂非线性规划问题

在 10.2 节中我们可以看到,即使是含有非线性目标函数的模型,只要其具有某些特征(如,线性约束条件,边际收益递减的目标函数最大化),Solver 就可以很容易地找到最优解。而且,在 10.3 节中我们发现,在一些情况下,可分离规划可以用来模拟(或近似)一个非线性问题,以此来利用线性规划迅速找到最优解。

> 如果约束条件是非线性的,或者任何活动的利润曲线不是光滑的或是边际收益递增的,标准的 Solver 通常很难求解非线性规划模型。

然而,非线性规划问题有许多种外观和形式。例如,对于目标是将总利润最大化的问题,其中一些问题的某些活动有可能是边际收益递增的。有些问题的约束条件是非线性函数。有些的利润曲线可能是几段不连接的曲线。这些其他类型的非线性规划问题如果不是不能求解的话,通常就是非常难以求解。原因就是存在许多不是全局最优值的局部最优解。在图 10.7 和图 10.8 中我们可以看到,Solver 是如何被困于众多的局部最优解中,而找不到全局最优解。

> 如果存在多个局部最优解,从不同的初始点开始多次运行 Solver 找到全局最优解。

求解含有多个局部最优解的问题的一种方法是多次运行 Solver,每次将不同的初始解输入电子表格中的可变单元格。每次运行,Solver 都会从给出的初始解(初始点)开始搜索,朝着提高目标函数的方向前进,直到找到一个局部最优值。通过尝试许多初始点,最终找到大部分或所有的局部最优解。接着我们

可以选择从所有的测试中找到的最好的解。最起码，这样我们最终找到的解比直接选择 Solver 找到的第一个局部最优值要好。如果幸运的话，其中一个初始点会产生全局最优解。

例如，考虑图 10.7 中的模型，相应的利润曲线如图 10.8 所示。只要 $x$ 是从任何一个小于 1.5 的初始点开始，目标函数都是不断增加，朝着 $x=0.371$ 时的局部最优值移动（利润 = 3.19 美元）。从而，对于任何小于 1.5 的初始点（包括了图 10.7 电子表格最左边尝试的 $x=0$ 的初始点），Solver 的搜索都会朝着局部极大值移动并最终集中到这一点。同样地，对于任何位于 1.5 和 4.6 之间的 $x$ 的初始点（如图 10.7 电子表格中间所尝试的 $x=3$ 的初始点），Solver 会集中到 $x=3.126$ 处的局部（全局）极大值（利润 = 6.13 美元）。最后，对于任何大于 4.6 的 $x$ 的初始点（如图 10.7 电子表格最右边尝试的 $x=4.7$ 的初始点），Solver 会集中到 $x=5$ 处的局部极大值（利润 = 0 美元）。通过尝试不同的初始点，找到了三个不同的局部最优值。这些局部最优值中最大的一个是当 $x=3.126$ 时，相应的利润为 6.13 美元。

> 通过许多不同的初始点，Solver 表可以用来对小型的非线性规划模型进行系统的再求解。

在可变单元格只有一个或两个的情况下，通过使用管理科学课件提供的 Solver 表插件就能系统地使用上述这种方法。为了说明问题，我们将继续使用图 10.7 所示的电子表格模型。图 10.21 显示了如何通过以下步骤对模型使用 Solver 表来尝试不同的六个初始点（0，1，2，3，4，5）。在表格的第一行输入与可变单元格 $x$（C5）、目标单元格“利润”（C8）相关的公式。在表格的第一列（G8:G13）输入不同的初始点。接着，选中整个表格（G7:I13），从工具菜单中选择“Solver 表”。Solver 表对话框的“列输入单元格”中是可变单元格 $x$（C5），因为这里是我们希望将表格第一列中不同的初始点输入的地方（由于只有一列用来表示初始单元格，所以对话框中的行输入单元格不需

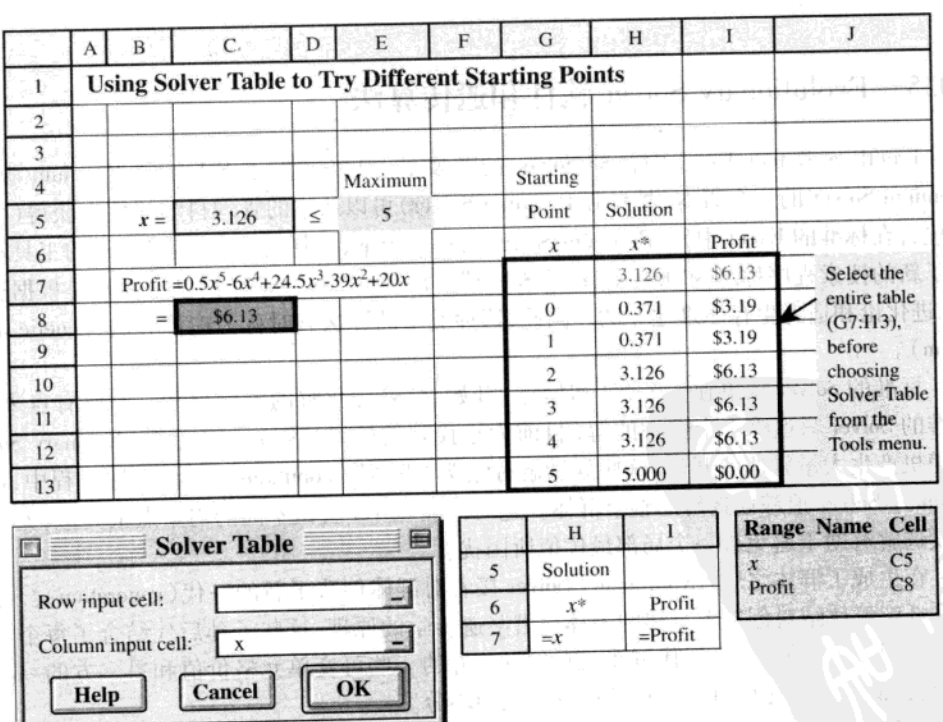



图 10.21 对图 10.7 和图 10.8 中的例子应用 Solver 表（管理科学课件提供的 Excel 插件）。

要输入)。点击"OK",Solver 表对第一列中的所有这些初始点再次求解,并且将相应的结果($x$ 的局部极大值和利润)填在表格的其他列。

这个例子中只有一个可变单元格。不过,Solver 表也可以对有两个可变单元格的问题尝试多个初始点。将表格的第一行和第一列用来指定两个可变单元格的不同初始点。在表格的左上角输入与目标单元格相关的等式。选中整个表格,选择工具菜单的"Solver 表",两个可变单元格分别作为列输入单元格和行输入单元格。接着,Solver 表根据两个可变单元格的每一种初始点组合对问题进行求解,并将针对每种组合找到的目标函数的解(局部最优值)填到表格中(要详细了解如何建立两维的 Solver 表,参见 5.4 节)。

对于有两个可变单元格以上的问题,这种方法同样可以适用,只要在同一时间选择其中两个可变单元格中的多个初始点进行尝试。但是,当可变单元格超过三个或四个时,要尝试所有可变单元格的大量的初始点是一件非常麻烦的事。

> 这个方法存在一些主要的局限。

更不幸的是,不管尝试了多少不同的初始点,还是不能保证可以找到一个全局最优解。而且,如果利润曲线不是光滑的(例如,它们是不连续的或有折点),特别是像使用了 IF、ABS、MAX 或 ROUND 的例子,此时 Solver 就可能连局部最优值也找不到。不过幸好还有另外一种方法可以试着求解这些复杂的非线性问题。在下一节中我们将探讨这个新方法。

**问题回顾**

1. 对于具有某些特征的非线性规划问题,很难用 Solver 来求解。请列出三种这样的特征。
2. 用来求解有多个局部最优解的方法是什么?

## 10.5 Evolutionary Solver 软件和遗传算法

Frontline System,Excel 中标准 Solver 的开发商,已经开发了 Solver 的 Premium 版本。Premium Solver 的一个版本(教育版 Premium Solver)可以从你的管理科学课件中获得(但是不包含在标准的 Excel 中)。Premium Solver 的每个版本,包括这一个,对 Solver 的工具都增加了新的搜索程序称之为"Evolutionary Solver"。Evolutionary Solver 的基本原理是根据遗传学、进化论和适者生存原理建立的。因此,这种类型的算法有时称为遗传算法(genetic algorithm)。

标准的 Solver 从单独一个解(初始点)开始,朝着优化解的方向移动。对所有点来说,标准的 Solver 只追踪一个惟一的解(目前为止找到的最好的解)。相反,Evolutionary Solver 从随机产生大量候选解开始,这些候选解称之为"群体"(population)。在求解过程中,Evolutionary Solver 追踪候选解的整个群体。这与标准 Solver 尝试不同的初始点很类似,关注众多候选解有助于避免被一个局部最优值所困扰。

在生成了群体之后,Evolutionary Solver 接着对群体创造了新的一代(generation)。存在的候选解群体结对创造下一代的子孙。借鉴遗传学的原理,这些子孙后代结合了每个父母的一些因子。例如,一个后代可能兼有父母一方的一些可变单元格价值和另一方的一些价值,而其他可变单元格可能是在父母双方之间均分。

在任何代的解的群体中,有些解是好的(或合适的),有些是坏的(或不合适的)。通过计算群体中候选解的目标函数来决定解的合适度。对那些不满足一个或多个约束条件的解

的惩罚就是将它们排除在外。接着，借鉴进化论和适者生存的原理，群体中"合适"的成员被允许频繁地繁殖（创造许多后代），而"不合适"的成员不允许繁殖。如此下去，群体最终变得越来越合适。

遗传算法的另一个关键特征是突变（mutation）。如同生物学中的基因突变一样，Evolutionary Solver 有时会对群体中的成员做出随机的改变。例如，一个可变单元格的数值可能会被一个新的随机值取代。这种突变可以创造出与其余群体无关的后代。这是非常重要的，因为它可以帮助算法在局部最优值附近受到困扰时摆脱困扰。

Evolutionary Solver 不断创造新一代的解，直到连续几代都没有改进。然后算法就结束了，并报告目前为止找到的最佳解。

现在让我们来看一个需要使用 Evolutionary Solver 进行求解的例子。

### 选择高于市场收益的有价证券投资组合

在 10.2 节中，我们为找到风险（投资组合的收益方差）最低并满足最低的预期收益的股票投资组合建立了模型。该问题可以使用标准的 Solver，因为其约束条件是线性的，并且目标函数是光滑、边际收益递减的。

现在来考虑投资组合经理的另一个普遍的目标——高于市场收益。图 10.22 显示了从纽约证券交易所（NYSE）的 5 个大型股票中选择投资组合来实现这个目标而建立的电子表格模型，这 5 个股票是：美国在线（AOL）、波音（BA）、福特（F）、宝洁（PG）和麦当劳（MCD）。"股票数据"（D4:H27）显示了这些股票 6 年（1995～2001 年）的季度业绩。第 K 列显示了纽约证券交易所综合指数计算的市场整体的业绩。

如果我们假设过去的业绩一定程度上是未来的指示器，那么选择在过去六年中高于市场收益的投资组合也很可能就产生了在未来高于市场收益的投资组合。因此，图 10.22 中模型的目标是选择在这个阶段中高于市场收益的季度数量最多的投资组合。

> 标准的 Solver 不能处理这类问题。

模型中的可变单元格为"投资组合"（D31:H31），代表了投资在每个股票上的投资组合比例。I 列计算了给定的投资组合在每个季度的收益。J 列接着比较了投资组合收益与市场收益，利用图 10.22 电子表格下方显示的 IF 函数确定投资组合收益是否高于市场收益。目标单元格"高于市场的数量"（J36）计算了投资组合收益高于市场收益的季度数量。从图中可以看到，5 种股票之间平分投资的投资组合（每种占 20%）在六年的 24 个季度中有 14 个季度收益高于市场。

标准的 Solver 几乎没有机会解决这个模型。由于投资组合的变化会在目标单元格中（投资组合收益高于市场的季度的数量）产生瞬间（不光滑）的跳动，所以目标函数是不光滑的。但是，对于可变单元格的一些小变动，目标单元格仍可以保持不变，直到这种变化大到足以引起 J 列中季度从"是"变到"不"（或从"不"到"是"）。这就会产生一个非常不幸的结果，即几乎每个解都是局部极大值，因为投资组合非常小的变化不会导致目标单元格发生改善。所以，Solver 通常立即停止了搜索，并报告初始解作为局部极大值。由于标准 Solver 不能解决这个模型，我们将会尝试使用 Evolutionary Solver。

### 应用 Evolutionary Solver 来选择高于市场收益的投资组合

安装从管理科学课件中获得的 Premium Solver，这会在 Solver 上增加一个按钮标记为

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Beating the Market** | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | Beat | Market |
| 3 | | Quarter | Year | AOL | BA | F | PG | MCD | Return | Market? | (NYSE) |
| 4 | | Q4 | 2001 | -3.02% | 16.35% | -8.54% | 8.77% | -1.64% | 2.38% | No | 8.45% |
| 5 | | Q3 | 2001 | -37.55% | -39.56% | -28.49% | 14.71% | 0.30% | -18.12% | No | -12.53% |
| 6 | | Q2 | 2001 | 32.00% | 0.07% | -11.80% | 2.54% | 1.92% | 4.95% | Yes | 4.38% |
| 7 | | Q1 | 2001 | 15.37% | -15.34% | 21.28% | -19.80% | -21.91% | -4.08% | Yes | -9.32% |
| 8 | | Q4 | 2000 | -35.14% | 2.55% | -7.00% | 17.07% | 13.37% | -1.83% | No | -0.93% |
| 9 | | Q3 | 2000 | 1.46% | 54.71% | 3.66% | 18.06% | -8.35% | 13.91% | Yes | 3.31% |
| 10 | | Q2 | 2000 | -21.37% | 10.98% | -6.39% | 0.00% | -11.87% | -5.73% | No | -0.91% |
| 11 | | Q1 | 2000 | -11.36% | -8.44% | -13.83% | -48.20% | -7.29% | -17.82% | No | -0.40% |
| 12 | | Q4 | 1999 | 45.82% | -2.48% | 6.10% | 16.87% | -6.79% | 11.90% | Yes | 9.70% |
| 13 | | Q3 | 1999 | -5.40% | -2.83% | -10.96% | 6.38% | 5.17% | -1.53% | Yes | -8.54% |
| 14 | | Q2 | 1999 | -25.17% | 29.83% | -0.44% | -10.02% | -9.24% | -3.01% | No | 7.38% |
| 15 | | Q1 | 1999 | 89.52% | 4.21% | -3.41% | 7.26% | 17.98% | 23.11% | Yes | 1.31% |
| 16 | | Q4 | 1998 | 177.96% | -4.92% | 24.87% | 28.38% | 28.69% | 51.00% | Yes | 18.11% |
| 17 | | Q3 | 1998 | 6.18% | -23.00% | -20.34% | -21.89% | -13.50% | -14.51% | No | -12.83% |
| 18 | | Q2 | 1998 | 53.89% | -14.51% | -8.94% | 7.93% | 15.00% | 10.67% | Yes | 1.04% |
| 19 | | Q1 | 1998 | 50.96% | 6.51% | 33.46% | 5.72% | 25.65% | 24.46% | Yes | 12.05% |
| 20 | | Q4 | 1997 | 19.96% | -10.10% | 7.62% | 15.57% | 0.26% | 6.66% | Yes | 2.81% |
| 21 | | Q3 | 1997 | 35.61% | 2.59% | 18.75% | -2.21% | -1.42% | 10.66% | Yes | 7.42% |
| 22 | | Q2 | 1997 | 30.90% | 7.60% | 21.12% | 23.09% | 2.25% | 16.99% | Yes | 16.14% |
| 23 | | Q1 | 1997 | 27.82% | -7.39% | -2.71% | 6.62% | 4.13% | 5.69% | Yes | 1.59% |
| 24 | | Q4 | 1996 | -6.34% | 12.70% | 3.20% | 10.39% | -4.22% | 3.15% | No | 6.80% |
| 25 | | Q3 | 1996 | -18.86% | 8.46% | -3.47% | 7.59% | 1.34% | -0.99% | No | 2.26% |
| 26 | | Q2 | 1996 | -21.87% | 0.58% | -5.82% | 6.93% | -2.60% | -4.56% | No | 3.54% |
| 27 | | Q1 | 1996 | 49.33% | 10.53% | 19.05% | 2.11% | 6.37% | 17.48% | Yes | 5.28% |
| 28 | | | | | | | | | | | |
| 29 | | | | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | | | |
| 30 | | | | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | Sum | | |
| 31 | | | Portfolio | 20.0% | 20.0% | 20.0% | 20.0% | 20.0% | 100% | = | 100% |
| 32 | | | | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | | | |
| 33 | | | | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | | | |
| 34 | | | | | | | | | Number of Quarters | | |
| 35 | | | | | | | | | Beating the Market | | |
| 36 | | | | | | | | | | 14 | |

| **Range Name** | **Cells** |
|---|---|
| BeatMarket? | J4:J27 |
| Market | K4:K27 |
| NumberBeatingTheMarket | J36 |
| OneHundredPercent | D33:H33 |
| OneHundredPercent2 | K31 |
| Portfolio | D31:H31 |
| Return | I4:I27 |
| StockData | D4:H27 |
| Sum | I31 |
| ZeroPercent | D29:H29 |

| | I | J |
|---|---|---|
| 2 | | Beat |
| 3 | Return | Market? |
| 4 | =SUMPRODUCT(Portfolio,D4:H4) | =IF(Return>Market,"Yes","No") |
| 5 | =SUMPRODUCT(Portfolio,D5:H5) | =IF(Return>Market,"Yes","No") |
| 6 | =SUMPRODUCT(Portfolio,D6:H6) | =IF(Return>Market,"Yes","No") |
| 7 | =SUMPRODUCT(Portfolio,D7:H7) | =IF(Return>Market,"Yes","No") |
| 8 | : | : |
| 9 | : | : |

| | I |
|---|---|
| 30 | Sum |
| 31 | =SUM(Portfolio) |

| | J |
|---|---|
| 34 | Number of Quarters |
| 35 | Beating the Market |
| 36 | =COUNTIF(BeatMarket?,"Yes") |

图 10.22 选择在最近几个季度频频高于市场的投资组合而建立的电子表格模型(在使用 Premium Solver 对话框之前的模型)。初始点被输入到可变单元格“投资组合”(D31:H31)。目标单元格是“高于市场收益的次数”(J36)。

"Premium"。点击这个按钮会产生图 10.23 所示的 Premium Solver 对话框(再次点击按钮会回到标准的 Solver,按钮的标签变为"标准")。这个对话框有一个下拉菜单,给出了可以使用的算法的选择。这些选择包括"标准 GRG 非线性"、"标准 Simplex LP"、"标准 Evolutionary"。第一个选择(GRG 非线性)等同于使用没有选择"假设线性模型"选项的标准 Solver。第二个选择(Simplex LP)相当于使用选择了"假设线性模型"选项的标准 Solver。最后一个选择(Evolutionary)使用了 Evolutionary Solver,也就是解决图 10.22 中的问题所需要的算法。用 Premium Solver 取代 Excel 中标准 Solver 的主要好处就是这个额外的 Evolutionary Solver 选项(Premium Solver 的某些版本比标准 Solver 速度更快,能解决更大的问题;但是你的管理科学课件中提供的教学版 Premium Solver 并没有这些优势,所以只有必须使用 Evolutionary Solver 时才需要 Premium Solver)。

如图 10.23 所示,Premium Solver 对话框需要说明目标单元格(高于市场收益的数量,或 J36)和可变单元格(投资组合,或 D31:H31)。它也必须包括约束条件:(1)投资组合相加为 100%,(2)每个股票占到投资组合的比例必须从 0 到 100%。

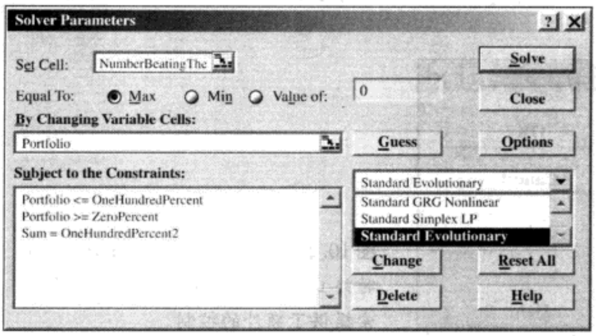



**图 10.23**　Premium Solver 对话框,用于完成图 10.22 中介绍的电子表格模型。从下拉菜单中选中标准 Evolutionary,使用 Evolutionary Solver 求解这个问题。

点击 Premium Solver 对话框中"选项"按钮,产生了如图 10.24 所示的"求解选项"对话框。这可以改变搜索的不同参数,例如允许搜索继续的最大时间、群体的大小和突变率。图 10.24 显示了参数的默认值,对大部分小型应用来说这是合理的。然而,你可以随意地尝试不同的参数。例如,增加群体大小或突变率可以帮助解决受到阻挠的搜索。

> 只要有可能,请选"变量的要求范围"选项。

"变量的要求范围"选项被默认选中了。这要求所有的可变单元格限制在最上限和最下限之间。我们强烈建议你在任何可能的情况下使用这一选项来限定可变单元格的范围。这大大缩小了 Evolutionary Solver 所需要搜索的范围,并增加了找到最优解的机会。

在"求解选项"对话框中点击"限制选项"按钮,会产生如图 10.25 所示的对话框。这个对话框对何时终止搜索提供了额外的控制。在"最大子问题"、"最大可行安全操作限制"输入较大的数值,将可以允许搜索继续很长的时间。"偏差"为 0.05,"最大无改善时间"为 30,意味着 Evolutionary Solver 将继续搜索直到在最后 30 秒内解的改善不超过 5%。减少"偏差",或增加"最大无改善时间"通常会使搜索时间变得更长。

选中 Premium Solver 对话框中的"求解",促使 Evolutionary Solver 开始搜索。在大约一分钟之内,图 10.26 所示的解被找到了。这描述了一种投资组合,该投资组合收益在六年的 24 个季度中有 19 个季度是高于市场收益的。这个解是最优的吗? 也许不是。不幸的是,没有方法可以保证我们找到了最优解。然而,它已经是一个很好的解(接近最优解)。

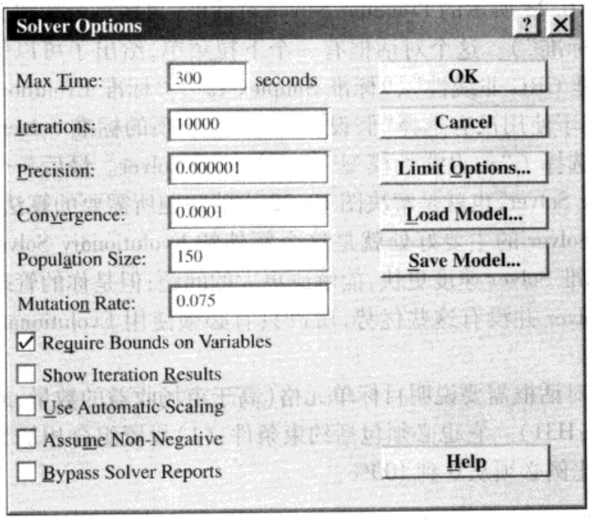



图 10.24 Premium Solver 的"求解选项"对话框提供了 Evolutionary Solver 的几个参数。在此显示的默认值对大部分小型应用来说是合理的选择。

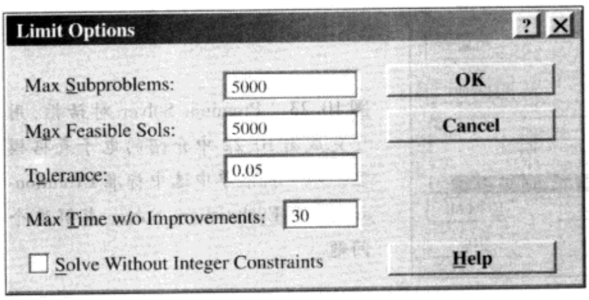



图 10.25 "限制选项"对话框对何时终止 Evolutionary Solver 进行的搜索提供了额外的控制。

## Evolutionary Solver 的优点和缺点

> Evolutionary Solver 可以处理有复杂的目标函数和有许多局部最优值的问题。

对于求解复杂的非线性规划问题，Evolutionary Solver 比起标准 Solver 有两个主要的优点。第一，目标函数的复杂性不会影响 Evolutionary Solver。只要函数可以根据给定的候选解计算（为了确定适合水平），那么函数是否有折点或者不连续或者有许多局部最优值都不要紧。第二，通过计算与当前最佳解未必在相同的领域内的所有候选解群体，Evolutionary Solver 不会受困在一个局部最优值。而且，即使整个群体最终向只是局部最优的解前进，突变仍然可以避免搜索被困在一点。事实上，由于随机突变的存在，对于最优化问题 Evolutionary Solver 可以保证最终找到一个最优解，如果它能够一直运行的话。但是，这当然是不实际的。

> 但是，Evolutionary Solver 同样也有几个缺点。

另一方面，必须指出 Evolutionary Solver 不是万能的。首先，它比标准 Solver 需要使用更长的时间才能找到最终解。选择了某些限制选项之后，搜寻更优解的过程可能持续几个小时甚至几天。其次，Evolutionary Solver 对于有许多约束条件的模型的效果不是很好。例如，对于第 2 章到第 7 章中所讨论的许多模型，虽然标准 Solver 能够即刻解决这些模型，但是 Evolutionary Solver 不能很好的完成任务。再次，Evolutionary Solver 是一个随机过程。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Beating the Market (Evolutionary Solver)** | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | Beat | Market |
| 3 | | Quarter | Year | AOL | BA | F | PG | MCD | Return | Market? | (NYSE) |
| 4 | | Q4 | 2001 | -3.02% | 16.35% | -8.54% | 8.77% | -1.64% | 10.20% | Yes | 8..45% |
| 5 | | Q3 | 2001 | -37.55% | -39.56% | -28.49% | 14.71% | 0.30% | -24.12% | No | -12.53% |
| 6 | | Q2 | 2001 | 32.00% | 0.07% | -11.80% | 2.54% | 1.92% | 7.02% | Yes | 4.38% |
| 7 | | Q1 | 2001 | 15.37% | -15.34% | 21.28% | -19.80% | -21.91% | -10.53% | No | -9.32% |
| 8 | | Q4 | 2000 | -35.14% | 2.55% | -7.00% | 17.07% | 13.37% | -0.86% | Yes | -0.93% |
| 9 | | Q3 | 2000 | 1.46% | 54.71% | 3.66% | 18.06% | -8.35% | 33.43% | Yes | 3.31% |
| 10 | | Q2 | 2000 | -21.37% | 10.98% | -6.39% | 0.00% | -11.87% | 1.31% | Yes | -0.91% |
| 11 | | Q1 | 2000 | -11.36% | -8.44% | -13.83% | -48.20% | -7.29% | -19.56% | No | -0.40% |
| 12 | | Q4 | 1999 | 45.82% | -2.48% | 6.10% | 16.87% | -6.79% | 12.11% | Yes | 9.70% |
| 13 | | Q3 | 1999 | -5.40% | -2.83% | -10.96% | 6.38% | 5.17% | -0.78% | Yes | -8.54% |
| 14 | | Q2 | 1999 | -25.17% | 29.83% | -0.44% | -10.02% | -9.24% | 7.76% | Yes | 7.38% |
| 15 | | Q1 | 1999 | 89.52% | 4.21% | -3.41% | 7.26% | 17.98% | 22.03% | Yes | 1.31% |
| 16 | | Q4 | 1998 | 177.96% | -4.92% | 24.87% | 28.38% | 28.69% | 40.51% | Yes | 18.11% |
| 17 | | Q3 | 1998 | 6.18% | -23.00% | -20.34% | -21.89% | -13.50% | -16.81% | No | -12.83% |
| 18 | | Q2 | 1998 | 53.89% | -14.51% | -8.94% | 7.93% | 15.00% | 5.39% | Yes | 1.04% |
| 19 | | Q1 | 1998 | 50.96% | 6.51% | 33.46% | 5.72% | 25.65% | 15.40% | Yes | 12.05% |
| 20 | | Q4 | 1997 | 19.96% | -10.10% | 7.62% | 15.57% | 0.26% | 2.82% | Yes | 2.81% |
| 21 | | Q3 | 1997 | 35.61% | 2.59% | 18.75% | -2.21% | -1.42% | 7.78% | Yes | 7.42% |
| 22 | | Q2 | 1997 | 30.90% | 7.60% | 21.12% | 23.09% | 2.25% | 16.24% | Yes | 16.14% |
| 23 | | Q1 | 1997 | 27.82% | -7.39% | -2.71% | 6.62% | 4.13% | 3.45% | Yes | 1.59% |
| 24 | | Q4 | 1996 | -6.34% | 12.70% | 3.20% | 10.39% | -4.22% | 8.06% | Yes | 6.80% |
| 25 | | Q3 | 1996 | -18.86% | 8.46% | -3.47% | 7.59% | 1.34% | 2.72% | Yes | 2.26% |
| 26 | | Q2 | 1996 | -21.87% | 0.58% | -5.82% | 6.93% | -2.60% | -2.22% | No | 3.54% |
| 27 | | Q1 | 1996 | 49.33% | 10.53% | 19.05% | 2.11% | 6.37% | 15.88% | Yes | 5.28% |
| 28 | | | | | | | | | | | |
| 29 | | | | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | | | |
| 30 | | | | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | Sum | | |
| 31 | | | Portfolio | 19.7% | 52.0% | 0.2% | 26.6% | 1.6% | 100% | = | 100% |
| 32 | | | | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | | | |
| 33 | | | | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | | | |
| 34 | | | | | | | | | | Number of Quarters | |
| 35 | | | | | | | | | | Beating the Market | |
| 36 | | | | | | | | | | 19 | |

**图 10.26**　在点击中 Premium Solver 对话框的“求解”按钮之后，Evolutionary Solver 找到了图 10.22 和图 10.23 中建立的模型的解，显示在可变单元格“投资组合”(D31:H31)。目标单元格“高于市场收益的数量”(J36)说明这个投资组合在 24 个季度中有 19 个季度高于市场收益。再次点击“求解”，可能会产生一个至少存在一点点不同的投资组合解。

在同一个模型上再次运行 Evolutionary Solver 通常会产生一个不同的最终解。最后，找到的最佳解不是最优的(虽然它可能是非常接近最优值的)。Evolutionary Solver 作为最优化工具的意义与标准 Solver 是不一样的。它直到到达了一个局部最优值，才会连续地向更佳解移动。Evolutionary Solver 更像一个聪明的搜索引擎，尝试不同的随机解。它很可能在一个非常接近最优值的解处结束，对于非线性规划问题的大部分类型它几乎不可能获得精确的最优解(但是，对于类似“高于市场收益”例子的问题，其中目标单元格只表现为整数，Evolutionary Solver 找到最优解可能性比较高)。因此，在 Evolutionary Solver 之后再运行标准 Solver(GRG 非线性)是有帮助的，从 Evolutionary Solver 找到的最优解开始，观察搜索该解的领域是否可以找到更优的解。

**问题回顾**

1. 为什么 Evolutionary Solver 使用的算法被称为遗传算法?
2. Evolutionary Solver 用来选择一代中合适的成员和不合适的成员的标准是什么?
3. 突变是如何帮助 Evolutionary Solver 的?
4. 与 Excel 自带的标准 Solver 相比,教育版 Premium Solver 的优势是什么?
5. 求解复杂的非线性规划问题,Evolutionary Solver 比标准 Solver 有哪两个优势?
6. 与标准 Solver 相比,Evolutionary Solver 有哪三个缺点。

## 10.6 本章小结

除了有一个关键的不同之外,非线性规划模型与线性规划模型有一样的特征。在线性规划模型中,所有的数学表达(包括目标函数)都是线性的,但是在非线性规划模型中至少有一个数学表达(通常只是目标函数)是非线性的。在电子表格建模时,这意味着如果一个非线性公式需要被输入目标单元格(也有可能输入其他的输出单元格),则这个模型变成了非线性规划模型。只要问题的任何活动水平和总绩效测度之间存在非比例关系,目标单元格就需要非线性公式。这种关系违背了线性规划的比例性假设。

建立和求解非线性规划模型通常比建立和求解线性规划更困难。例如,一些非线性规划模型有许多局部最优解,而当中只有一个解是全局最优的,而大部分是相当差的解。不幸的是,当一个初始解输入电子表格后,标准 Excel Solver 只能找到众多局部最优解中的一个,而且无法指出这个解是否也是全局最优或者远远不是最优。哪一个局部最优解会被找到完全有赖于初始解的选择。

然而,当非线性规划模型是边际收益递减时,它一般都比较容易求解。对于这类问题,局部最优解同时也是全局最优解。因此,Excel Solver 找到的解保证是模型的最优解(或者至少是最佳解中的一个)。

一些边际收益递减的非线性规划模型还可以用更简单的方法求解。当活动的利润曲线(或成本曲线)是分段直线(或至少可以被分段直线近似)时,就可以应用该方法。在这种情况下,可分离规划可用来将问题转化为线性规划问题,而线性规划问题对 Excel Solver 来说是最容易求解的问题。

对于更复杂的非线性规划问题,如有许多局部最优值的问题,一个方法是多次运行 Solver,每次将一个不同的初始解输入电子表格的可变单元格。如果只有一个或两个可变单元格,通过利用管理科学课件中的 Solver 表插件,可以系统地运用这个方法。

然而,处理复杂问题的方法有两个主要的局限。首先,对于有很多个可变单元格的问题这种方法是行不通的。其次,对于目标函数非常复杂以致 Solver 甚至不能找到局部最优值的问题,它是无效的。如果这些问题没有很多约束条件,那么另一种称之为 Evolutionary Solver 的搜索程序可能比较有效。利用遗传学、进化论和适者生存的观念,这个程序可以逐步朝着最佳局部最优值移动。如果有足够的搜索时间(有可能是非常长的一段时间),它通常能成功找到非常接近最优值的解。

## 专业术语

**曲线拟合方法**(curve fitting method):利用利润或成本曲线上已知数找到最适合这些数据的曲线等式的一种方法。(10.1 节)

**边际收益递减**(Decreasing marginal returns):如果随着活动水平的增加,利润曲线的斜率从不增加,反而有时会变小,那么这一利润曲线的活动的边际收益递减。(10.1 节)

**不连续点**(discontinuity):曲线上的某一点,在该点处曲线是不连续的,而是会突然上升或下降。(10.1 节)

**Evolutionary Solver**:在 Premium Solver 中的一种搜索程序,运用了遗传学、进化论和适者生存的观念。(10.5 节)

**一代**(generation):一组新的候选解,由 Evolutionary Solver 将已出现候选解群体的成员分成一对对并创造出下一代的子孙而形成。(10.5 节)

**遗传算法**(genetic algorithm):一种利用了遗传学观念的算法。(10.5 节)

**全局最大值**(global maximum):整个曲线上最高的一点。(10.1 节)

**局部极大值**(local maximum):曲线上某一点,曲线在该点到达其局部领域内的最大值。(10.1 节)

**突变**(mutation):与生物学中的基因突变类似,这是 Evolutionary Solver 偶尔对当前群体中某个成员做出的随机改变。(10.5 节)

**非比例性关系**(nonproportional relationship):如果活动对绩效的贡献与活动水平不成比例,那么某一问题的活动与总绩效测度为非比例关系。(10.1 节)

**分段直线**(piecewise linear):如果曲线由一系列连接的直线段组成,那么该曲线是分段直线。(10.1 节)

**群体**(population):Evolutionary Solver 随机产生的大量的候选解。(10.5 节)

**比例性关系**(proportional relationship):如果活动对绩效的贡献与活动水平成比例,那么某一问题的活动与总绩效测度为比例关系。(10.1 节)

**比例性假设**(proportionality assumption):线性规划问题的一个最基本的假设是每种活动对目标函数的贡献与该活动的水平成比例。(10.1 节)

**二次规划**(quadratic programming):非线性规划的一种特殊类型,其中目标函数既是二次形式又是边际收益递减,同时所有的约束条件是线性的。(10.2 节)

## 本章管理科学课件的学习辅助

**"Ch. 10—非线性规划"Excel 文件:**

- 建立非线性公式
- 多个局部极大值的例子
- 原始的伟恩德例子
- 存在非线性营销成本的伟恩德例子
- 投资组合例子
- 需要加班的伟恩德例子
- 需要加班并存在营销成本的伟恩德例子(可分离规划)
- 需要加班并存在营销成本的伟恩德例子(非线性规划)
- 高于市场收益的例子

**Excel 加载宏:**

- 教育版 Premium Solver
- Solver 表

## 习　题

如果以下题(或题的部分)的左边加入了 E* 的标志,说明该题应当使用 Excel(除非你的老师给出不同的指示)。打星号的问题至少有一部分的答案会在书后给出。

10.1. J·P·阿特金森公司不久将引进一个新的产品。根据该产品的四种不同月产量数值,对由该产品产生的月利润做出了估计,如下所示:

| 产　量 | 利润(美元) |
|---|---|
| 200 | 9500 |
| 500 | 22500 |
| 800 | 34000 |
| 1000 | 40000 |

a. 描出四种不同产量时的利润，并手工将四点连成一条光滑的曲线，做出该产品的利润曲线（从产量为0利润为0时开始曲线）。

b. 这个产品是否很好的满足线性规划的比例性假设？

c. 在某种程度上利润并不是严格与产量成比例，那么该产品是边际收益递减、边际收益递增或者两种都不是？

E* d. 利用 Excel 的曲线拟合方法完成：(1)获得该利润曲线的二次形式的非线性公式；(2)绘出曲线。

10.2. 考虑以下三种情形中活动的利润是如何随活动水平而变化。

| 活动水平 | 利润（美元） | | |
|---|---|---|---|
| | 情况1 | 情况2 | 情况3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 9 | 6 | 5 |
| 2 | 16 | 14 | 6 |
| 3 | 21 | 24 | 3 |
| 4 | 24 | 36 | 4 |
| 5 | 25 | 50 | 7 |

a. 对每种情况，描出不同活动水平时的利润，并手工将点连成一条光滑的曲线，做出利润曲线。

b. 对每种情况，指出活动是否边际收益递减、边际收益递增或者两者都不是？

c. 如果a中的是成本曲线而不是利润曲线，那么你会如何回答问题b？

E* d. 对每种情况，利用 Excel 的曲线拟合方法：(1)获得利润曲线的二次形式的非线性公式；(2)绘出曲线。对于活动既不是边际收益递减也不是边际收益递增的情况，评论一下使用二次形式的拟合如何。

10.3. Chiplet 公司打算对一种新的微芯片进行生产和营销，这种微芯片比当前市场的任何芯片的功能都强大。毫无疑问，这种微芯片的收益率依赖于这个高度竞争和快速发展的市场对产品的接受度。如果销售相当低，公司仍可以获得可观的利润，因为公司以当前的设备有足够的生产能力来生产微芯片。然而，如果销售再高一些，公司需要增加其生产设备，此时如果销售只是在中间水平，则会使微芯片的利润下降（完全满足需求仍然是值得的，因为最高管理层主要目标之一就是不断增大公司的市场份额，因为下一代微芯片已经发展不够）。幸运的是，当销售达到相当高的水平时，微芯片的利润将是非常巨大的。下面的表格显示了在该微芯片短暂的生命周期中不同销售水平情况下的利润估计。

| 销　量 | 利润（百万美元） |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 100000 | 15 |
| 200000 | 18 |
| 300000 | 13 |
| 400000 | 4 |
| 500000 | 1 |
| 600000 | 6 |
| 700000 | 30 |
| 800000 | 70 |

a. 描出不同销售水平时的利润，并手工将这些点（或非常接近的点）连成一条光滑的曲线，绘出该利润曲线。

b. 微芯片是边际收益递减、边际收益递增或者两者都不是？

E* c. 利用 Excel 的曲线拟合方法完成：(1)获得该利润曲线的二次形式的非线性公式（二次多项式）；(2)绘出曲线。

E* d. 使用 Excel 选项用三次多项式替代二次多项式，重复c。

e. c和d中的 Excel 选项哪一种更好地使利润曲线拟合了数据？

10.4. 下表给出了一种新产品在不同生产水平下每天可获得的利润估计。因为随着产量的增加，利润并没有成比例增加（边际收益递减），所以管理科学部分析了该产品应有的产量（以及其他产品的产量），决定通过建立产量 $R$ 的简单的非线性函数，来近似利润 $P$。

| 产量($R$) | 每天的利润($P$)（美元） |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 95 |
| 2 | 184 |
| 3 | 255 |
| 4 | 320 |

a. $P$ 的一种近似表达式为 $P=100R$ 美元 $-5R^2$ 美元。这一非线性函数求得的 P 值与上面列表中五个 $P$ 值近似程度如何?

b. 设 $P=104R$ 美元 $-6R^2$ 美元,重复 a 中的问题。

c. 上面哪个非线性函数对所有数据拟合得更好。

E* d. 利用 Excel 的曲线拟合方法:(1)获得该利润曲线的二次形式的非线性公式;(2)绘出曲线。

E*10.5. 重新考虑投资组合的例子,以及 10.2 节中图 10.13 给出的电子表格模型。在表 10.2 中可以看出,股票 2 具有最大的预期收益,而股票 3 的预期收益最小。但是,可变单元格"投资组合"(C14:E14)显示的最优解要求购买股票 3 的数量比股票 2 要多得多。虽然购买这么多的股票 3 确实大大降低了投资组合风险,但一个积极的投资者可能不愿意拥有这么多预期收益较低的股票。

为了这样一个积极投资者,为模型再加上一个约束条件,即股票 3 所占份额不能超过投资者指出的数值。于是,当股票 3 在投资组合中的比例上限为以下数值时,将最优投资组合的预期收益和风险(收益的标准差)与图 10.13 中的进行比较。

a. 20%

b. 0%

c. 利用 Solver 表,从 0% 到 50%,以 5% 为间隔尝试不同的百分比。

10.6.* 股票经纪人理查德·史密斯刚刚接到他的重要客户安·哈蒂的电话。安现在有 50000 美元资金可以投资,打算用来购买两种股票。股票 1 是具有发展潜力且风险较小的蓝筹股,相比而言,股票 2 的投机性要高的多。有两个投资简讯都称该股具有很大的发展潜力,同时风险很高。安希望她的投资能够带来可观的利润,但又相当讨厌高风险。因此,她要求理查德分析一下如何在两种股票上分配投资,对她将比较有利。她也告诉理查德她计划持有股票三年后再出售。

在研究了这两种股票的过去业绩以及公司当前前景之后,理查德做出了如下估计。如果现在将全部 50000 美元投资于股票 1,三年后出售该股票获得的利润预期为 12500 美元,标准差为 5000 美元。如果现在将全部 50000 美元投资于股票 2,三年后出售该股票获得的利润预期为 20000 美元,标准差为 3000 美元。两种股票在市场上表现十分独立,因此理查德根据历史数据计算的结果是两种股票利润的协方差为 0。

理查德现在准备利用电子表格模型来决定如何将 50000 美元分配到两种股票上,并最小化风险,同时至少满足安的最低可接受水平。他要求安决定她最低可接受的水平。

a. 不给最低可接受的预期收益分配数量值,直接建立该问题的代数形式的二次规划模型。

E* b. 将上述的模型显示在电子表格上。

E* c. 最小可接受预期收益分别取 13000 美元、15000 美元、17000 美元和 19000 美元时,求这四种情况的解。

d. 安在大学的专业是统计学,因此她非常了解模型中的预期收益和风险分别代表相应股票投资组合中利润概率分布上的估计平均值和标准差。安以 $\mu,\sigma$ 表示平均值和标准差。并且她想起来在一些典型的概率分布中,收益超过 $\mu-\sigma$ 的概率相当高(约为 0.8 或 0.9),而收益超过 $\mu-3\sigma$ 的概率极高(接近 0.999)。计算出 c 中四种投资组合的 $\mu-\sigma$, $\mu-3\sigma$ 值。并比较在 $\mu-\sigma\geq 0$ 的条件下,哪一种投资组合给安带来最高的 $\mu$ 值。

10.7. 重新考虑 10.2 节中的投资组合选择例子,现在找到了第四种股票(股票 4),可以很好地平衡预期收益和风险。单位与表 10.2 的相同,预期收益为 17%,风险为 18%。它与股票 1、2、3 的交叉风险分别为 -0.015、-0.025,0.003。

a. 最低可接受预期收益为 18%,建立该问题的代数形式的修正二次规划模型。

E* b. 将上述模型显示在电子表格上,并求解。

E* c. 为该修正问题对图 10.14 所示的 Solver 表进行修改。

10.8. 阿尔波特·汉森公司的管理层正在考虑两种新产品的组合问题,因为两种产品使用同样的设备,而每小时两种产品的组合产量不可能超过 2 个单位。由于还不能确定两种产品的销售情况,产品的利润还不能够确定,只知道边际利润会随着产量的增加而减少。对于产品 1,若每小时的产量为 $R_1$,估计每小时的利润将为 $200R_1-100R_1^2$(美元),对于产品

2,若每小时的产量为 $R_2$,估计每小时的利润则为 $300R_2-100R_2^2$。

a. 为该产品组合问题建立代数形式的二次规划模型,使得每小时的利润最大化。

E* b. 在电子表格上建立模型,并求解。

10.9. 杰森公司生产家用电动锯和电动钻孔机。除了圣诞节前后销量会有大幅增加外,一年中销量大致平均。因为这两种产品的生产要求大量的工艺和经验,所以公司一直都维持着稳定的员工水平,只在 11 月加班以增加产量。员工也很支持这种做法,因为他们可以通过加班为假期积攒一些额外的收入。

公司目前的总裁杰森现在正在考虑即将来临的 11 月的生产计划,他手上有如下的数据。

| | 最大月产量* | | 单位产品的利润 | |
|---|---|---|---|---|
| | 正常时间 | 加班时间 | 正常时间 | 加班时间 |
| 电动锯 | 3000 | 2000 | $150 | $50 |
| 电动钻孔机 | 5000 | 3000 | 100 | 75 |

* 假设公司的供应商可以提供足够的原材料

但是,杰森现在意识到,除了员工人数不足之外,还有两个因素限制着 11 月的生产。一是公司的供电商在 11 月份最多只能提供 10000 单位的电力(只比平常月份多出 2000)。而加工每一单位的电动锯和电动钻孔机都需要消耗一个单位的电力。第二个约束是齿轮配件的供应商在 11 月只能提供 15000 单位产品(比平时每月多出 4000)。每一单位的电动锯需要两个单位的齿轮配件,而一个单位的电动钻孔机需要一个单位的该种配件。

杰森现在需要决定 11 月份生产多少数量的电动锯和电动钻孔机,才能实现公司总利润最大化。

a. 画出两种产品的利润曲线。

E* b. 用可分离规划在电子表格上为该问题建立线性规划模型。求解该模型,并说明最优解表示应该在 11 月生产多少数量的电动锯和电动钻孔机。

10.10. *朵伟恩(Dorwyn)公司生产两种新产品,特种门和窗,并以之与 2.2 节中所描述的伟恩德玻璃公司竞争。在目标函数中以 100 美元为单位,通过下面代数形式的线性规划模型,来确定利润最大化的产品组合。

$$\text{最大化}\quad \text{利润}=4D+6W$$

约束条件

$$D+3W\leqslant 8$$
$$5D+2W\leqslant 14$$

且

$$D\geqslant 0\qquad W\geqslant 0$$

但是,因为来自于伟恩德公司的强大竞争,朵伟恩管理层现在意识到需要开展大规模的市场营销才能扩大产品的销量。据估计,要保持每周 $D$ 单位的产销量,相应的每周营销成本需为 $D^3\times$ 100 美元(即 $D=1$,营销成本为 100 美元;$D=2$,营销成本为 800 美元;$D=3$,营销成本为 2700 美元;以此类推)。而窗的相应营销成本为 $2W^2\times100$ 美元。因此,模型的目标函数可表述为:

$$\text{利润}=4D+6W-D^3-2W^2$$

朵伟恩管理层希望能够通过修正的模型决定利润最大化的产品组合。

E* a. 在电子表格上建立和求解这个非线性规划模型。

b. 求出产量为 0,1,2,3 时的利润数值,并建立数据表。

c. 将上面求得的各点在产量利润图上画出,连续两点之间用直线段连接起来。

E* d. 在所给数据的基础上,用可分离规划在电子表格上建立该问题的近似线性规划模型。求解模型,并说明朵伟恩管理层应采取什么样的产品组合。

e. 将 d 中基于可分离规划近似求得的解与 a 中非线性规划模型获得的解进行比较。

10.11. MFG 公司正计划生产和销售三种新产品,分别用 $x_1$,$x_2$,和 $x_3$ 表示各产品的产量。初步估计三种产品的获利性如下所示。

产品 1 的前面 15 个单位,单位利润大约为 360 美元,但是,超过这一数量之后的产品 1,单位利润就只有 30 美元。

产品 2 的前面 20 个单位单位利润约为 240 美元的，而接下来的 20 个单位的单位利润为 120 美元，更后面的产品，单位利润就只有 90 美元。对于产品 3 的前面 10 单位产品，单位利润为 450 美元，接下来 5 个单位，单位利润为 300 美元，再增加产品，就只能获得 180 美元的单位利润。

三种产品生产时，还受到所需资源的限制，具体约束条件为，

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 200$$
$$x_1 + 2x_3 \leq 70$$

管理层希望能够了解当 $x_1$，$x_2$，和 $x_3$ 为何值时，可以实现最大利润。

a. 画出三种产品的利润曲线。

E* b. 为该问题利用可分离规划在电子表格上建立线性规划模型。求解模型，并说明有关 $x_1$，$x_2$，和 $x_3$ 的值，模型结果对管理层的建议是什么。

10.12. 重新考虑问题 6.15. 中描述的 Build-Em-Fast 公司生产计划问题。该问题的特殊限制在于，除非完全利用正常工作时间还不能完成任务，才可以允许加班。解释一下，为什么可分离规划的逻辑意味着运输问题得到的任何最优解，都会自动满足上述的约束条件。

10.13. 假设运用可分离规划将原问题转化成下面等价的代数形式的线性规划模型：

$$\text{最大化}\quad \text{利润} = 5x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + x_{22}$$

约束条件

$$3x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 2x_{22} \leq 25$$
$$2x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} - x_{21} - x_{22} \leq 10$$

且

$$0 \leq x_{11} \leq 2 \qquad 0 \leq x_{21} \leq 3$$
$$0 \leq x_{12} \leq 3 \qquad 0 \leq x_{22} \leq 1$$
$$0 \leq x_{13}$$

原问题的数学模型是怎样的？通过画出每个原活动的利润曲线以及用原决策变量写出原问题的约束条件来回答这一问题。

10.14. 杰姆·马修是 J·R·尼克公司的营销副总裁，他正在考虑如何安排两种不相关产品的广告活动。两次活动需要使用一些相同的资源。因此，他知道有关两个活动水平上的决策需要综合考虑这些资源的约束之后才能做出。假设用 $x_1$，$x_2$，表示两种产品广告活动的水平，相应的约束为：$4x_1 + x_2 \leq 20$ 和 $x_1 + 4x_2 \leq 20$。

面对这些决策，杰姆非常清楚地意识到，当广告活动的水平增加很多之后，存在某一点，过了该点收益将会下降。在该点，额外的广告成本超过了广告所引起的净收入（不包含广告成本）的增加。在仔细的分析之后，杰姆和他的员工估计，对于产品 1，当广告水平在 $x_1$ 时，对应的净利润（包括广告成本）为 $3x_1 - (x_1 - 1)^2 \times 100$ 万美元，而产品 2 的相应估计值为 $3x_2 - (x_2 - 2)^2$。

以 $P$ 表示总净利润，为了确定两种产品广告活动的水平，建立如下的非线性规划模型：

$$\text{最大化}\quad P = 3x_1 - (x_1 - 1)^2 + 3x_2 - (x_2 - 2)^2$$

约束条件

$$4x_1 + x_2 \leq 20$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 20$$

且

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

a. 算出广告水平为 $x_1 = 0, 1, 2, 2.5, 3, 4, 5$（对产品 1），或 $x_2 = 0, 1, 2, 3, 3.5, 4, 5$（对产品 2）时各产品的利润并建立每种产品的利润数据表。

b. 利用上面求得的数据绘出各产品的大致的光滑利润曲线（注意，利润曲线的起点当 $x_1 = 0$ 或 $x_2 = 0$ 时为负值，因为不做广告来支持的话，产品就会赔钱）。

c. 在产品 1 的利润曲线基础上，通过在 $x_1 = 0$ 到 $x_1 = 2$，$x_1 = 2$ 到 $x_1 = 4$，以及 $x_1 = 4$ 到 $x_1 = 5$ 的利润之间划分为几个直线段，来画出近似的利润曲线。然后针对产品 2 的利润曲线作同样的划分，令 $x_2 = 0, 2, 4, 5$ 时。

E* d. 根据 c 部分对利润曲线的近似，运用

可分离规划为杰姆·马修的问题在电子表格上建立近似的线性规划模型。并说明模型给出的结论表明广告活动水平应当如何？两种产品的总净利润是多少？

E* e. 除了 $x_1=0, 2, 2.5, 3, 5, x_2=0, 3, 3.5, 4, 5$；使用其他值作为 c 中利润曲线的近似，重复 c，d。

E* f. 运用 Excel 和 Solver 直接建立和求解原非线性规划模型。并将结果与 e 中求得的进行比较。

g. 运用微积分求得使 $3x_1-(x_1-1)^2$ 最大时的 $x_1$ 的值，并计算产品 1 的净利润。同样，利用微积分求得使 $3x_2-(x_2-2)^2$ 最大时的 $x_2$ 的值，并计算产品 2 的净利润。说明这些值是如何满足非线性规划模型的约束条件的。并将这些值与 e，f 中得出的结论相比较。

E*10.15. 考虑以下非线性规划问题：

$$\text{最大化}\quad \text{利润} = x^5 - 13x^4 + 59x^3 - 107x^2 + 61x$$

约束条件

$$0 \leqslant x \leqslant 5$$

a. 在电子表格中为该问题建模，以 $x=0,1,2,3,4,5$ 为初始点，利用 Solver 表求解该问题。在 Solver 表的输出单元格中包含 $x$ 和利润的值。

b. 利用 Evolutionary Solver 求解该问题。

E*10.16. 考虑以下非线性规划问题：

$$\text{最大化}\quad \text{利润} = 100x^6 - 1359x^5 + 6836x^4 - 15670x^3 + 15870x^2 - 5095x$$

约束条件

$$0 \leqslant x \leqslant 5$$

a. 在电子表格中为该问题建模，以 $x=0,1,2,3,4,5$ 为初始点，利用 Solver 表求解该问题。在 Solver 表的输出单元格中包含 $x$ 和利润的值。

b. 利用 Evolutionary Solver 求解该问题。

E*10.17. 由于人口的增长，华盛顿州在众议院被给予了额外的一个席位，席位总数为 10。目前由共和党人执政的州议会需要制定一个方案重新将华盛顿州分区。华盛顿州有 18 个主要的城市需要被分成 10 个选举区。下面的表格给出了每个城市登记的民主党人和共和党人的数字。每个选举区必须包含 150000 到 350000 名登记的选民。利用 Evolutionary Solver 来将每个城市分配到 10 个选举区中的某一个，并且使得选举区内登记共和党人的数量超过登记民主党人数量的选举区的个数最大化（提示：使用 SUMIF 函数）。

| 城市 | 民主党人（千） | 共和党人（千） |
|---|---|---|
| 1 | 152 | 62 |
| 2 | 81 | 59 |
| 3 | 75 | 83 |
| 4 | 34 | 52 |
| 5 | 62 | 87 |
| 6 | 38 | 87 |
| 7 | 48 | 69 |
| 8 | 74 | 49 |
| 9 | 98 | 62 |
| 10 | 66 | 72 |
| 11 | 83 | 75 |
| 12 | 86 | 82 |
| 13 | 72 | 83 |
| 14 | 28 | 53 |
| 15 | 112 | 98 |
| 16 | 45 | 82 |
| 17 | 93 | 68 |
| 18 | 72 | 98 |

10.18. 重新考虑 10.5 节中的投资组合优化问题，其目标是选择在过去六年中高于市场收益的季度最多的股票组合。

a. 将每个股票投资 20% 作为初始点，仅考虑前三年的数据（Q1 1996 到 Q4 1998），应用 Evolutionary Solver 将投资组合最优化。

b. 同一个投资组合在未来三年中（Q1 1999 到 Q4 2001）有几个季度是高于市场收益的？

c. 评论 a 和 b 的结论。

E*10.19. 重新考虑 10.5 节中的投资组合优化问题，其目标是选择在过去六年中高于市场收益的季度最多的股票组合。

a. 利用 Evolutionary Solver 找到过去六年中不赔钱的季度最多的投资组合。

b. 利用 Evolutionary Solver 找到过去六年中收益至少达到 10% 的季度最多的投资组合。

10.20. 重新考虑 2.2 节中的伟恩德玻璃公司问题。

E* a. 利用标准 Solver 求解问题。

E* b. 以生产 0 扇门和 0 扇窗为初始点，利用 Evolutionary Solver 求解该问题。

c. 评论两种方法的表现。

## 案例 10.1 超级食品公司案例研究续篇

重新考虑 4.1 节中讨论的超级食品公司案例研究。在一家一流的广告公司 G&J 的帮助下，超级食品公司的营销副总裁克莱尔 · 希文生正在计划为公司的新早点谷类食品“脆始”进行一次广告活动。这次活动将使用三种广告媒体：星期六上午儿童节目的电视广告；食品与家庭导向的杂志上的广告媒体；主要报纸星期天增刊上的广告。

图 4.6 的电子表格显示了为了说明该问题的经修改的线性规划模型。这个模型约束条件包含了广告费用、计划费用、优惠券使用，以及管理层的目标即广告所覆盖的孩子和家长的数量。可变单元格“广告数量”（C19:E19）显示了根据模型得出的每个媒体上应投放的最优广告数量。目标单元格“总感知数”（H19）对相应的总感知数做了估计，其中一些人对广告的每次观看计为一次感知。

广告活动的最终目标是将公司从广告中获得的销售利润最大化。然而，直接将广告费用和利润联系起来是很困难的。因此，总感知数量被用来粗略地代表利润。这也是为什么图 4.6（以及图 4.1）的目标单元格给出了总感知数，而不是总利润。

克莱尔对这样做感到很不安。因为她意识到她的估计——“脆始”推出带来的总利润与广告活动的总感知数成比例——仅仅是一个粗略的近似。最重要的原因是在某个广告媒体上投放太多广告将会到达一个饱和水平，再多投放一个广告带来的影响大大小于该媒体上投放的第一个广告。但是，当目标单元格给出总感知数量时，在饱和之后一个人再多看一次广告的计算也与第一次看广告相同（多一次感知）。

为了检验图 4.6 的结论，克莱尔决定尝试将利润直接作为绩效测度计入目标单元格。她仔细地将利润定义为由于广告活动而产生的“脆始”第一次销售获得的总利润。那些没有看过广告的消费者由于受到放在货架上的这个新谷物早点的闪耀外包装所吸引而冲动的购买所产生的利润排除在外，因为这些销售与评价广告活动无关。对“脆始”的重复购买也不在考虑之内，因为这些销售主要是依赖于第一次购买获得的对谷物早点的体验而不是广告活动。

克莱尔要求 G&J 公司的高级合伙人希德为每种媒体上不同数量的广告而引起对“脆始”第一次购买的数量做出估计。以下表格显示了他的估计。

| 电视投放数量 | 销售量 |
|---|---|
| 1 | 1000000 |
| 2 | 1750000 |
| 3 | 2450000 |
| 4 | 2800000 |
| 5 | 3000000 |

| 杂志广告数 | 销售量 |
|---|---|
| 5 | 700000 |
| 10 | 1200000 |
| 15 | 1550000 |
| 20 | 1800000 |
| 25 | 2000000 |

| 周日增刊广告数 | 销售量 |
|---|---|
| 2 | 1200000 |
| 4 | 2200000 |
| 6 | 3000000 |
| 8 | 3500000 |
| 10 | 3750000 |

希德还报告说可以合理地假设由某种媒体的广告引起的销售应当不会受到在其他媒体上的广告数量的影响，因为不同媒体的受众是不一样的。

据估计，公司从“脆始”产品获得的毛利润为每单位 75 美分。但是，这个毛利润还没包括广告活动的广告成本和计划成本。因此，克莱尔希望在总利润的定义中包括这些成本，以通过考虑总利润来决定最佳的广告组合。

a. 对于每一个广告媒体，通过描出希德提供的五个销售量的点并连接成一条光滑的曲线，画出销售量与广告数量的关系曲线。

b. 对于每一个广告媒体，利用 Excel 的曲线拟合方法（1）获得销售曲线的非线性公式；（2）绘出曲线。每种情况对曲线的形式尝试三种不同的 Excel 选项——指数为 2 的多项式（二次形式），指数为 3 的多项式，以及对数形式——然后选择你

认为最合适的选项。

c. 利用 b 中获得的结论，根据每种广告数量写出总利润（如克莱尔所定义）的表达形式。

d. 利用 c 中的结论，修改图 4.6 的电子表格模型（可以从 CD-ROM 上获得），使得总利润最大化而不是总感知量最大化，然后求解模型。

e. 利用希德提供的销售表格对最大化总利润问题应用可分离规划。

f. 将 d、e 中获得的结论与图 4.6 中的进行比较，给出你对最佳广告组合的建议（作一些简单的解释）。你觉得是否值得为了精确图 4.6 使用的线性规划模型而引入非线性利润函数？

## 案例 10.2 了解投资组合

在进入高中上了第一堂经济课以后，莉迪亚就开始考虑她父母的理财行为。他们努力工作赚钱以维持舒适的中产阶级生活水平，但是他们从来不知道如何有效地使用手上的钱。他们仅仅是将辛苦赚得的工资存入银行，取得微薄的利息（所幸的是还有足够的钱支付她的大学学费）。她下定决心，一旦她成人，绝不会像她父母那样保守地理财。

莉迪亚实践着她的誓言，她选修了大学里面所有的财务课程。毕业后在华尔街从事一项令人羡慕的工作，她养成了每天早上看 CNN 的财经报道的习惯。她通过网络投资选择股票，以最小的风险获取尽可能多的收益。并且，她也经常阅读《华尔街日报》和《财经时报》。

莉迪亚同时关注着各种金融期刊上的投资建议，她决定采取她最喜欢的两个专栏作家的投资建议。在 Jonathan Taylor 的专栏中，建议了三种股票，他认为这三种股票的收益会超出市场水平。而在公共基金权威 Donna Carter 的专栏中推荐了另外三种股票，认为这三种股票的收益在明年会超出市场水平。

BB（证券交易所的交易代码）是全国最大的电信公司之一，该公司股票的市盈率远低于市场平均水平，因为过去八个月的大量投资，使得该股的收益已经下降了很多。但是，由于其拥有最前沿的新技术，该公司有望大幅提高边际利润。Taylor 估计该公司的股票将会在明年从现在的每股 60 美元上涨到 72 美元。

LOP 是世界上主要的硬盘驱动器生产商之一。经过过去几年激烈的价格战，许多公司倒闭，或被像 LOP 这样的公司和其竞争对手收购，该行业目前经历着大规模的重整。由于硬盘驱动器市场的竞争减少，该行业的收益在下一年有望大幅增加。Taylor 估计该公司的股票将会在今年每股 127 美元的基础上上涨 42%。

ILI 在网络公司多年沉浮中存活下来。随着下一次的网络热潮即将来临，Taylor 预测该公司的股票在一年内会涨 1 倍，从现在的每股 4 美元涨到 8 美元。

HEAL 是一家主要的生物技术公司，即将获得食品和药品管理局对几种新药的正式批准。这些新药将会使公司的收入在今后几年增长 20%，其中一种治疗心脏病的药物更是有望赢得高额收益。同时，由于几次针对儿童的舒适药物治疗，该公司树立了很好的大众形象，其公共关系的发展肯定会有助于药物在柜台上的销售。Carter 相信该公司的股票在一年内可能会从现在的每股 50 美元增加到每股 75 美元。

QUI 是一家快餐连锁店，其分店网络遍布美国。自从该公司 15 年前上市以来，Carter 就一直对它很关注。该公司上市的时候，仅在美国西部沿岸有几家餐馆，而现在，美国的各州都有它的分店。因为公司一贯注重健康食品，其市场份额不断上升。Carter 相信该公司的股票会保持在市场水平之上，一年内，会在现在的每股 150 美元的基础上上涨 46%。

AUA 是底特律地区的一家主要的汽车制造商，该公司最近引进了两种新车型。新产品的前期销售状况极佳。因此，预计该公司的股票明年会从现在的 20 美元涨到 26 美元。

莉迪亚在网络上搜索到了这几家公司股票的投资风险，这六只股票收益方差和协方差的历史数据如下表所示。

| 公司 | BB | LOP | ILI | HEAL | QUI | AUA |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 方差 | 0.032 | 0.1 | 0.333 | 0.125 | 0.065 | 0.08 |

| 协方差 | LOP | ILI | HEAL | QUI | AUA |
|---|---|---|---|---|---|
| BB | 0.005 | 0.03 | -0.031 | -0.027 | 0.01 |
| LOP | | 0.085 | -0.07 | -0.05 | 0.02 |
| ILI | | | -0.11 | -0.02 | 0.042 |
| HEAL | | | | 0.05 | -0.06 |
| QUI | | | | | -0.02 |

a. 一开始，莉迪亚希望忽视所有投资的风险。在这种情况下，她最优的投资组合决策是什么，也就是她在六种不同股票上分别投资多少？该投资组合总的风险是多少？

b. 莉迪亚认为不能在一种股票上投入超过总额40%的资金，在不考虑风险并加入这一限制的条件下，她的最优投资组合是什么，该投资组合的总风险又是多少？

c. 现在莉迪亚将投资风险考虑在内。为了在下面几个问题中使用，建立一个二次规划模型，使得她的风险最小，同时保证她的预期收益不低于她所选择的最低可接受水平。

d. 莉迪亚希望能够获得至少为35%的预期收益，同时她又要保持最小的投资风险，在这种情况下，最优的投资组合该如何？

e. 如果莉迪亚要获得至少为25%的预期收益，最小风险是多少？至少40%的预期收益，情况又如何？

f. 在莉迪亚的投资策略中，是否存在任何问题或不足？

## 案例 10.3　跨国投资

查尔斯·罗森躺在火炉旁的躺椅上，享受着一周假期最后的悠闲生活。作为德国一家大型跨国投资公司的财务分析师，他很少有机会过这种不被打扰的生活。他总是飞来飞去，劳碌奔波评估各地的投资机会。查尔斯拍了一下躺在脚下的忠心猎狗，喝了一口白兰地享受着酒的温暖，不由得叹了一口气，他意识到即使在度假的时候，也不得不考虑自己的财务问题。他打开一大堆文件上的一个文件夹，这个文件夹中的资料是关于四年前他大学刚毕业时所作的一项投资。

查尔斯很清楚记得毕业典礼那天，他获得了工商管理的学位并满怀着学习期间积累的无数的投资想法。在大学期间查尔斯就一直从事一项收入不菲的工作，从而攒下了一大笔父母为他存的教育基金。

一毕业，查尔斯就想把这笔钱投入到更能获利的地方。因为他被派到德国工作，所以他评估这个国家的投资机会。最后，他决定将 30000 德国马克投在一种七年期的 B 债券上。查尔斯是在四年前的上周（即讨论中被称作"第一年"的 1 月初，）购进这一债券的。他认为这个债券是一个很好的投资机会，因为利率很高（如表 1 所示），且会在后面几年有所增加，而且在第一年之后，可以随时出售债券。他计算了一下如果在七年当中任何一年的年底售出最初价值为 100 德国马克的债券的话，可以获得的收益（如表 2 所示），包括本金和利息。例如，假如他将最初价值 100 德国马克的债券在第六年的 12 月 31 日售出，他可以获得 163.51 德国马克（本金 100 德国马克，加上利息 63.51 德国马克）。

**表 1　七年的利率**

| 年　份 | 利率（%） | 年获利百分比（%） |
|---|---|---|
| 1 | 7.50 | 7.50 |
| 2 | 8.50 | 8.00 |
| 3 | 8.50 | 8.17 |
| 4 | 8.75 | 8.31 |
| 5 | 9.00 | 8.45 |
| 6 | 9.00 | 8.54 |
| 7 | 9.00 | 8.61 |

**表 2　100 德国马克的总回报**

| 年　份 | 德国马克 |
|---|---|
| 1 | 107.50 |
| 2 | 116.64 |
| 3 | 126.55 |
| 4 | 137.62 |
| 5 | 150.01 |
| 6 | 163.51 |
| 7 | 178.23 |

在前面四年中，查尔斯没有出售任何债券。但是去年德国联邦政府对利息收入加收了资本利益税。德国政府规定每年个人从利息中获得的前6100德国马克是不用缴税的，超过6100德国马克部分的税率为30%。例如，若查尔斯的利息收入为10100德国马克，他就必须支付4000德国马克（10100－6100）的30%，即1200德国马克的税款。他的税后收入将为8900德国马克。

因为去年的利息税，查尔斯决心重新评估这项投资。他知道，资本利益税会影响B债券的潜在收益，但也可能存在着能使收益最大化的方案。如果在不同年份将部分债券售出的话，他可以减少需交的资本利益税。查尔斯认为这一计划是可行的，因为政府只要求投资者在出售时才支付利息收入的税款。例如，若查尔斯在第六年年底售出1/3的债券，那么他要交的税额为(6351－6100)的30%。

查尔斯问了自己好几个问题，是否应该将所有的债券保持到第七年年底？这样的话，他可以在利息上收入DM30000乘以0.7823，但是那一年就必须付出高额的税款。考虑到税款的支出，他想是否可以在今年(第五年)年底或者明年年底售出部分的债券。

若查尔斯售出债券的话，他现在的投资选择是有限的。他可以购买利息为4%的存款单(CD)，因此他将考察这一投资的回报情况。他碰到一位当地银行的投资顾问，顾问建议他继续持有B股票到七年年底再售出。她说虽然最后一年在原来9%的利率(见表1)上还要支付30%的利息税，总的净利率仍为6.30%，比存款单4%的收益率要高很多。

查尔斯决定将其所有的债券都在各年年底12月31日售出。由于在第七年的秋季他要进入美国的商学院深造，他希望用他的投资支付第2、3、4学期的学费，所以他不会将在德国的投资保持到七年以后。

（在前面三题中，假设查尔斯售出部分的债券后，得到的资金将不再作投资，因而该部分资金的利息为0。在接下来的几题中，假设他将获得的资金投入存款单中去。）

a. 建立可以用于下面几题的可分离规划模型。
b. 查尔斯的最优投资策略是什么？
c. 银行投资顾问给查尔斯提供的建议中有一个最基本的错误，是什么？
d. 现在，查尔斯考虑投资存款单，最优投资策略又是什么？
e. 如果他最初投资了50000德国马克，那么第五、六、七年的最优投资策略是什么？
f. 查尔斯和他的未婚妻计划在他读商学院的第一年之后结婚。但是，查尔斯得知对已婚夫妇，每年利息收入的免税点是12200德国马克。如果查尔斯在这一年(投资的第五年)结婚的话，可以为他最初的30000德国马克节省多少支出？
g. 由于德国经济萧条，利率很低并且低利率会持续下去。而美国经济正处于繁荣时期，利率有望上升。利率的增加将会导致美元对马克升值。查尔斯所在的投资银行的分析家认为目前(第五年)美元对马克的汇率将保持在1美元对1.50马克，而在第七年年末将会上升为1美元对1.80马克。因此查尔斯打算在第六年年初投资于一种两年期的美国政府债券，利率为3.6%，且免税，以支付学费。为了这项投资，他应该将多少B债券售出换成美元？

CHAPTER

# 11 目标规划

## 学习目标

完成本章学习后，你应该掌握：

1. 识别可以用目标规划来表述的管理问题。
2. 描述目标规划模型与其他类型的管理科学模型有何不同。
3. 讨论加权目标规划方法和优先目标规划方法的区别。
4. 对于给定的情况，确定何种目标规划方法更适合。
5. 对某个描述的问题建立并应用加权目标规划模型。
6. 对某个描述的问题建立并应用优先目标规划模型。

在前面的几章中，我们已看到了各种不同的管理科学模型，可以用来说明大量各异的管理问题。但是，所有这些模型都有一个共同的特点，即它们都只有一个目标函数来表达问题的总绩效测度。比如，目标是利润最大化。

> 目标规划提供了寻找解的一种方法，这个解能尽可能接近管理层对项目的所有主要目标。

然而，不幸的是，并不是所有的管理目标都可以这样用一个总绩效测度来表示。目标有可能是完全不同的，对这些目标的测算根本没有相同的基础。在这种情况下，管理层可能为不同的目标设立不同的数字目标，然后寻找一种方法尽可能朝着这些目标进步。这就是目标规划要表述的一类问题。

本章开始将引入一个案例研究，来说明这种情况是如何出现的。你将会看到最高管理层的三名成员对一个项目分别支持三个截然不同的目标。首席执行官同意所有三个目标都是非常重要的，并居中调停来评价它们相对的重要性。你也会看到管理科学部门的主管如何与最高管理层一起得出在目标规划中需要用到的输入。

目标规划对存在多个目标的问题提供了两种方法来建立公式。第一种称之为“加权目标规划”，给各个目标赋以权重来表示其相对重要性，然后找出使各个目标偏差的加权总和最小的解。

这个方法将在案例研究之后的11.2节中加以介绍。另一种方法称之为“优先目标规划”，需要决定各个目标的重要性的顺序。接着，按照这个顺序，在某段时间集中在一个目标上。11.3节将描述这种方法。11.1节案例研究中的对话也介绍了这两种方法，包括每种方法在什么情况下更合适，以及管理层如何在实际的设置中提供所需要的输入。

## 11.1 案例研究：德怀特公司的目标规划问题

“亲爱的，发生什么事了？你看起来情绪很糟？”

“并没有那么坏，”凯瑟琳回答她丈夫斯考特的问候，“我只是很困惑，自从我担任德怀特(Dewright)公司管理科学部的负责人以来，我一直都强调我们必须根据管理层的需要来开展工作。理解管理层的决策目标，因为这就是他们想从我们的研究中获得的，在工作时专注的是那些目标而不是我们所认为的目标，我一直都强调这一点。”

“那现在又发生了什么事呢？”

> 管理层研究的目标应当反映的是对公司的整体利益最优，而不是对局部进行考虑。

“现在我们接到了一项极其重要的新项目，这项研究会带来很丰厚的收入。今天，我进行了一番寻访，访问了最高管理层中几个重要人物，希望能够弄清楚他们想从这项研究中取得哪些结果。他们需要做出决策的基本目标是什么？以前，这项工作都能很顺利地进行，大多数人对于最重要的决策目标都有一致的意见。但是今天就不一样。起初，我被告知我们应当专注于某某作为研究的主要目标。接着，我访谈的另一个人说不行，关键目标是截然不同的另外一个。之后，又有一个人提出了崭新的见解。我从来没有碰到过这么多的不同意见。每个人都从自身的利益角度提出要求，而没有顾全公司整体的最佳利益。因此，现在我们不知道该从何处入手。我早就选好了管理科学部的人员，但是在没有得到管理层的清楚指示之前，我们是无法开展工作的。当然，管理层需要很快地完成这项研究。今天，他们中一个爱开玩笑的人居然说希望前天就能看到我们的报告。我只能礼节性地笑了笑，其实当时我真想踢他一脚。难道他们不明白我们研究的输出好坏与否还取决于他们输入的好坏?！我们工作的速度只能与他们给我们需要的指示的速度相同。”

“难怪你这样困惑，”斯考特说，“看来管理层给你出了个难题。”

“是的，尽管他们知道我今天会访问他们所有的成员，但他们之间还是没有相互交流过想法。在这一点上他们必须首先进行研究讨论，对他们希望从管理科学研究中获得的东西达成共识，才能给我们以明确的指示，这是他们的责任。但这一次，他们没有尽责。”

“下一步该怎么办呢？”

“今天下午我已经打电话给公司的CEO，必须从最高层那里得到指示。事实上，盖利很同情我，他已经认识到是他们让我处于这样的困境了。”

“那他给了你需要的指示了吗？”斯考特问凯瑟琳。

“不，我要求的不是这一点，因为他并没有直接参与管理科学的研究，我只不过是提醒他一下。但是，他已经知道问题出在什么地方。在我提出看法之前，他就说必须组织所有相关的管理者开一次会，统一一下主要的目标。他说他会亲自主持这次会，并要求我和我部门的关键人员参加。他说，清楚地理解管理层在这个问题上的看法是非常重要的。我当然表示赞同。”

“太好了，我认为现在你所要做的就是参加会议，并认真地听取他们的意见。让他们去

做一些准备工作,然后在会议上提出建议。如果你想得到更清楚的指示,有必要的话就给他们一点压力。这样你就可以摆脱烦恼,开始投入工作了。"

## 背　景

德怀特公司是美国最大的电动工具制造商之一。在发展历程中,公司历经风雨,但 20 多年来一直都保持着市场领导者的地位。这一成就大部分要归功于公司一批忠诚且有技术的工人生产的优质产品,他们当中很多人从公司成立开始一直工作到现在。管理层在决策时,首先要考虑的就是要保持职工的稳定性,从而保持职工对工作的热情和忠诚。

公司刚刚经历了一段萧条时期。公司的销量略少于历年水平,而收入也有所下降,这一点已经引起了许多股东的不满。后果之一就是公司目前可用于开发新产品的资金没有往年充足。如果销售不能很快改善的话,管理层将会考虑削减公司的生产规模。

现在,形势有了一线转机,公司准备将目前的产品换成新一代产品,即三种最具现代艺术特征的新型电动工具。他们希望能够通过这一举措改变公司的现状,争取在今后一到两年内保持较高的销量。因为资金有限,管理层不得不在三种新产品的投资上作出取舍决策。另外一点要考虑的是,这些决策是否会影响公司维持职工的相对稳定性。目前已经有竞争者在开发类似的新产品,所以必须尽快地做出决策。

正是因为要考虑这么多的事项,公司总裁塔莎·约翰逊才要求凯瑟琳·唐纳森,管理科学部的负责人来进行一次紧急的管理科学研究,分析得出最优的产品组合。塔莎要求凯瑟琳先简要地看一下管理层在产品组合问题上的目标,并建议凯瑟琳与制造部副总裁维杰·沙哈以及财务总监海茵·纽叶交流一下。

凯瑟琳刚刚完成了这些访问,但是结果很不令人满意,因此向丈夫发了一通牢骚。

公司的 CEO 盖利·让已经安排相关的管理人员以及凯瑟琳和她的主要成员一起开一次会,共同探讨一下。

## 管理科学小组与高层管理者的会议

在一阵寒暄之后,会议正式开始。

**盖利·让(公司的 CEO)**:我之所以要召开这次会主要是为了弄清楚公司通过引入新产品到底要达到怎样的目标。我们的主要目标是什么呢?这个问题我一直在考虑,但首先我想听一下在座各位的看法,然后我们一起把主要目标总结出来。只有先弄清楚这一点,我们才能实施计划,取得我们所希望获得的结果。塔莎已经要求凯瑟琳和她的管理科学部负责分析这一问题,以使得我们能够最好地达到目标。但是,在开展研究之前,他们必须清楚知道我们管理层的目标和决策优先权是什么。凯瑟琳,这是否是你想在这次会议上所获得的?

**凯瑟琳·唐纳森(管理科学部负责人)**:是的,盖利,谢谢你。

**盖利**:　好,现在我们来谈谈各自的看法。塔莎,你先开始吧。

**塔莎·约翰逊(总裁)**:像以前一样,我认为我们要把握最基本的一点,只要做到这一点之后,其他的一切都会迎刃而解。在经历了过去一年的萧条之后,我们必须提高公司的收入。这正是董事会给我的指示。大家回想一下我在上次董事会上提出的计划。为了实现我们的收入目标,这三种新产品在淘汰以前必须能够创

造至少1.25亿美元的利润。这一点,我认为是可以做到的。我已经跟凯瑟琳说过,他们研究所能得到的产品组合必须能够使利润最大化。而且新产品至少要获利1.25亿美元,正如我向董事会作出的保证一样。我想这就是我们的主要目标。

**盖利:** 谢谢你,塔莎。确实如此,董事会给了我们很大的压力,要求大幅度增加收入。你从新产品上获取至少1.25亿美元利润的计划给了他们很大的希望。维杰,你对这一点有何看法?

**维杰·沙哈(制造部副总裁):** 利润这一点是无可非议的,但是如何来创造这些利润就会有多种途径。总的来说,20年以来我们都是一家收益很好的公司。尽管有几年不是很理想,就像去年,我想我们公司会继续成功地发展下去,只要我们牢记是什么使我们取得了一直以来的成就。我们最重要的资产就是我们的员工,他们是我所知道的最好的员工,我们大家都知道这一点。如果为了让董事会满意,追求短期利润,势必要求裁员以缩小公司规模。这是会毁灭士气的!会造成各种破坏性的后果。据我所知,一些采取这类措施的公司都很后悔他们的举措,而对于我们公司而言,就更是一个大错。我们不能这样杀鸡取卵。这么多年来,我们的员工忠心耿耿,尽职尽责,就是因为我们将他们团结在一起,如果我们继续保持员工的稳定,并尽可能地发挥他们的能力,开发生产新产品的话,我们会得到长期收益。我告诉凯瑟琳在研究该问题时要首先保持员工人数,只有这样,才能够取得利润。

**塔莎:** 但是在现在这个全球化的经济世界里,只有那些能够为了保持竞争力而迅速缩减规模的公司才能立于不败之地。

**维杰:** 那是很短视的,特别是在我们这种情况下。

**盖利:** 维杰,我也认为我们的员工是很优秀的,必须尽可能地保持这支队伍。我希望这三种新产品能够使我们维持员工人数。我们目前有4000名员工。如果一切顺利的话,我们还有可能增加员工。在你谈论改变员工人数的不利之处时,你为什么总是想着要减少人员而不是增加呢?

**维杰:** 增加的话不会很坏,但还是会引起一些问题,特别是当产量减少的时候,增加员工只能是暂时的。首先,我们必须考虑培训这些新员工的培训支出,然后,在生产缩小的时候,我们又不得不将他们裁掉,任何裁员对员工的士气都会产生影响。我想保持现在大约4000的员工水平是最佳的。

**盖利:** 好的,谢谢你维杰。现在我很想听听海茵的想法,特别是去年我们的财务状况不佳。

**海茵·纽叶(财务总监):** 是的,大家都知道目前我们的财务状况不佳,我们的资金从来没有像现在这样紧张过。

**盖利:** 不幸的是,为了开发新产品,我们将会需要大量的资金。而好的开始对公司的未来是至关重要的。我希望你尽你所能获得在新产品上的最小投资,包括生产设备、市场营销等等所需的资金?你认为我们能有多少资金呢?

**海茵:** 这一点我曾经很仔细地考虑过。我想我们大概能筹集到大约5500万美元。但是,我建议不要超过这一数字,因为如果我们过度扩展的话,我们的公司债券可

能会降级为垃圾债券。那样的话，我们就会被迫为所有的债务支付高额的利息。因此当凯瑟琳最近与我谈话时，我建议她将投入资金限制在 5500 万美元之内。

**盖利：**　好，我想先简要地总结一下，你们三人都提出了很具体的要求。你们每个人都提出了一个目标：新产品总利润不少于 1.25 亿美元，保持目前大约 4000 人的员工水平以及将投入资金限制在 5500 万美元之内。这些目标都是合理的，但是我怀疑是否能够同时实现所有这些目标。我想我们必须尽可能的同时实现所有的目标，而不是仅选出其中一个作为重点。

**凯瑟琳：**我有一个问题。

**盖利：**　说啊。

**凯瑟琳：**你们是否发现有什么方法可以将三个目标组合成为一个最为重要的目标，一个包含三方面要求的目标？

**盖利：**　例如？

**凯瑟琳：**比如，或许要求长期利润最大化。改变员工水平和加大资金支出的问题都将会影响我们的长期利润，我们是否可以衡量这些问题对长期利润的影响，并将它们与新产品的直接效益结合起来呢？

**盖利：**　嗯，这个想法很有意思，但是，我认为这样不行。这就相当于拿苹果与桔子比较，这是无法比较的。如果不考虑第二或第三个目标，将有太多的无形因素受到影响。我想你们无法合理地估计由此而产生的对长期利润的影响？

**凯瑟琳：**是的，这也是我的想法，但是，还得以你说的为准。这样的话，我们就必须将三个目标分开来独立地考虑，但必须同时分析。

**盖利：**　是的，我也这样认为，那你有什么好方法来处理这一问题吗？

**凯瑟琳：**我想有两种可能，但是我们还必须得到所有在座各位的指示，才能确定应该采取哪种方法。

**盖利：**　继续说下去。

**凯瑟琳：**一种方法是采用线性规划方法。你应该还记得，最近我们为你们做过几个线性规划的研究。

**盖利：**　是的。

**凯瑟琳：**这样的话，就以新产品的总利润为最大化的目标，而第二、第三个目标就是必须满足的约束条件。但是，这就要求第二和第三个目标必须完全实现。你觉得这个要求合理吗？

**塔莎：**　不，不行！我认为第一点是最重要的，我们必须确保第一个目标实现，即便这样做会影响第二、第三个目标。

**维杰：**　但是，我们认为，为了避免过于偏离其他几个目标，也可以让第一个目标作些让步。

**盖利：**　你说的对，我同意。如果说三个目标不能同时实现的话，我们也不会要求必须全部满足所有的目标。

**凯瑟琳：**好，这样看来建立线性规划模型不能满足你的需要。第二种方法可能会更适合这一问题。

**盖利：**　是什么方法？

目标规划能够为同时实现几个目标找到最佳的解决方法。

**凯瑟琳**：这是一种管理科学技术，称为目标规划，能够为同时实现几个目标找到最佳的解决方法。

**盖利**：这好像正是我们所需要的。现在，你是否得到了足够的信息，可以开展工作了？

两种目标规划方法的选择取决于管理层对目标重要性差异大小的评价。

**凯瑟琳**：还没有，我还要麻烦你们几分钟，我想获得我们建立目标规划更多的输入信息。

**盖利**：这很重要，我们将继续下去，只要你需要。

**凯瑟琳**：谢谢，我们想知道的是你们对这三个目标相对重要性的评价。

**盖利**：这一点还是要说破的，在讨论的过程中我一直在考虑。我不得不承认塔莎、维杰和海茵都有其充分的理由。所有三个目标都是非常重要的。但是，我想我们必须将利润目标放在第一位。因为这是推动其他一切的动力，也是董事会要求的，我们别无选择。但是，我认同维杰的看法，员工是我们第一重要的财产。我想将他保持员工水平的目标分成两部分，一是避免减少员工水平，二是避免增加员工水平。我想，比起雇一些新员工然后一年或两年之内再裁掉所带来的影响，裁掉一些忠诚的老员工所产生的负面影响将更加严重。因此，我将避免裁员放在第二位。对不起，海茵，我只能将投资资金限制在5500万美元这一目标放在第三位。但是，我们不会忽视你的合理顾虑。我们现在正处在一个困难的境地，我们必须走出来，即使不得不比往常贷更多的资金。最后，维杰目标的第二部分将作为第四位来考虑，即避免雇用新员工，因为这样做可能只是暂时的。你们对此有何看法？这样做是否合理？

**塔莎**：很合理。

**维杰**：可以。

**海茵**：你说了算，但是，财务上的过度扩展还是小心点为好。

**盖利**：我知道了。凯瑟琳，你是否还需要从我们这获得其他的输入信息？

决策决定先使用加权目标规划方法，然后再应用优先目标规划方法。

**凯瑟琳**：对于下面的问题我需要你的建议。目标规划是一个灵活的技术，它提供了两种不同的方法来分析管理问题。哪种方法合适有赖于管理层对目标重要性差异大小的评价。是否所有的目标都相当重要，它们之间的重要性只存在不大的差别？或者这些目标的重要性是否存在很大的差异？在第一种情况下，该方法在承认重要性差异的同时几乎同时考虑所有的目标。我们称这种方法为加权目标规划，因为它给目标赋以权重来反映它们之间的相对重要性。第二种情况下，由于目标的重要性存在很大的差别，该方法会首先单独集中在最重要的目标上，尽可能地满足这个目标。然后才去满足第二个重要的目标，接着第三个，第四个，由此类推。这种方法称之为优先目标规划，因为它依次集中到某个目标，并优先于其他任何重要性较低的目标。我的小组对任何一种方法都很熟悉。但是，对于使用哪一种方法的决策需要根据你们提供的输入信息。你们认为目标重要性的差异有多大？哪种方法看起来更适合公司的情况？

**盖利**：我想两种方法都有适合的地方。虽然在我看来，目标的重要性之间有明显的差别。但是它们确实是都非常重要。我不想说它们在重要性上有很大的差别。

因此我倾向于你所提到的第一种方法。

**凯瑟琳:** 是加权目标规划方法。既然你说你觉得两种方法都有合适的地方,看来这显然不是一个清晰明了的情况。因此,我想我们可以首先从加权目标规划方法开始,然后通过应用优先目标规划方法来再次检验我们的结论。我们在报告中将包含所有的结果,你们四位可以碰头决定一下三种新产品的产品组合。

**盖利:** 我同意。让我们全速前进吧。你是否已经获得所有需要的东西?

**凯瑟琳:** 差不多了,这对于我的工作帮助很大。但是为了运用加权优先规划方法,我们还需要你们再给出更多一点信息。让我解释一下这种方法是如何运行的。如果不能满足所定的目标,它就会分配一定的罚数。偏离目标越远,罚数越大。偏离处于最优先地位的目标会得到最大的罚数;而偏离优先级最低的目标,罚数最小。之后,目标规划可以找到最终决策——在这个例子中就是三种产品的生产量,这个决策可以使得偏离各种目标所产生的罚数总和最小。

**盖利:** 好像是个很不错的方法。

**凯瑟琳:** 是的,但这就意味着我们必须要确定各个目标的罚数权重来评价偏离相关目标的相应严重性。现在我们可以尝试在刚才讨论和设置的优先权的基础上分配罚数权重。但是,这不是我们做的。这些罚数应当反映的是你们对偏离各种目标严重性的判断,而不是我们的。

**盖利:** 我同意这一点。那如何确定各个罚数权重呢?

**凯瑟琳:** 首先,我们会根据以往的一些数据作为偏离某个目标的罚数权重,以此建立一个进行比较的标准。然后,你们来判别偏离其他目标的严重性比起偏离第一个目标是大还是小,并据此来上下调整各个目标的罚数权重。因为现在我们的首要目标是新产品的利润不能少于 1.25 亿美元,所以每低于这个目标 100 万美元就分配罚数 5。换句话说,如果选取的产品组合的总利润估计只有 1.24 亿美元,则相应的罚数即为 5 点。而如果只能实现 1.15 亿美元的利润,低于目标 1000 万美元,罚数就是 50 点,是前面的 10 倍。

**盖利:** 我明白了。

> 罚数权重是由管理层分配的,用以测算偏离各个目标的相应严重性。

**凯瑟琳:** 好,现在以这一 5 点的罚数作为参照,继续分析下去。按照优先级别,如果要从现在的 4000 人中减少 100 名职工,要分配多少罚数呢?如果资金投资比原来的 5500 万美元多增加了 100 万美元的投资,罚数应该是多少?如果在现在的 4000 名员工的基础上,再增加 100 人,应该分配的罚数又是多少?

**盖利:** 提得好,我想按照 5、4、3、2 的比例分配比较合适。第一个目标罚数为 5,下面的三个目标分别为 4、3、2。

**凯瑟琳:** 很好,这就是我们要得到的,现在我们可以马上开始工作了。

**盖利:** 好的,我们希望能够尽快地看到你们的报告。

**凯瑟琳:** 我想我们会在一个月内完成,我们现在最主要的工作是要收集数据,我们必须知道每一产品的产量对三个目标的各自的影响,每种产品能够产生多少利润?到底要保持怎样的员工水平?需要投资多少?为了得到这些数据,我们不得不需要多方面的支持。

**盖利:** 我会让所有员工优先支持你们的。

**凯瑟琳:** 那我们就开始工作了,下面的一个月我们会很忙,没有多少时间与家人在一起

了。但是,我相信我们会按时完成这项任务的。

**盖利:** 好的,谢谢你,如果你们有什么需要帮助的话,请告诉我。

**凯瑟琳:** 我会的,谢谢。

会议结束了,但是,塔莎与维杰两个人还在激烈地讨论着。

## 会议的结论

下面总结出了这次会议主要的讨论结果。

由凯瑟琳·唐纳森领导的管理科学小组在接下来的一个月内将要开展一项研究,研究的重点是确定三种新产品的组合,以最好地实现管理层的三个目标。三种新产品的产量就是要作出的决策。

在作出决策前,管理层希望主要考虑三方面的影响因素:总利润、员工的稳定性以及产品开发的投资资金限制。这样管理层建立了如下的目标,

**目标 1:** 新产品产生的总利润(净现值)不得少于 1.25 亿美元。

**目标 2:** 保持现有的 4000 人的员工水平。

**目标 3:** 将投资资金限制在 5500 万美元以内。

但是,管理层意识到要同时实现三个目标是不太现实的,因此,他们对三个目标的相对重要性作出了评价。三个目标都是很重要的,但是在重要性上还是有些细小的差别,其重要性排序为:

**重要性排序**(Order of Importance):目标 1,目标 2 的前半部分(避免减少员工),目标 3,目标 2 的后半部分(避免增加员工)。

为了进一步使这一排序量化,对每一目标都分配了表示偏离目标严重性的罚数权重(Penalty Weights)。凯瑟琳与管理层在讨论之后确定了如表 11.1 中所示的罚数权重。

**表 11.1 德怀特公司例子中,表示偏离目标相对严重性的罚数权重**

| 目标 | 因素 | 偏离目标的罚数权重 |
|---|---|---|
| 1 | 总利润 | 5(低于目标的每 100 万美元) |
| 2 | 员工水平 | 4(低于目标的每 100 名员工) |
| | | 2(超过目标的每 100 名员工) |
| 3 | 投资资金 | 3(超过目标的每 100 万美元) |

## 相关数据

需要获得每种产品的产量每增加一个单位时对每个目标所做的贡献的有关数据。

总利润、员工的水平以及资金投资规模都依赖于三种产品的产量(每天的产量)。每一产品对各个目标的贡献与产量成比例关系,因此,对于每一种产品,管理科学小组将重点放在单位产量对各个目标的贡献上。问题的大部分相关数据都还没有,所以小组必须要在有关人员的帮助下挖掘这些数据。基于已经取得的有限的信息,管理科学小组对每种产品对各个目标的贡献作出了尽可能准确的估计。

这些估计的每单位产量贡献值如表 11.2 所示,贡献的各自单位显示在第一栏的括号中。例如,如果每天生产一个单位的产品 1 可以产生 1200 万美元的总利润,需要 500 名员

工，以及 500 万美元的投资水平。

**表 11.2　德怀特公司例子中，各种产品对目标的单位贡献**

| 因　素 | 产品的单位贡献 | | | 目　标 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 总利润（百万美元） | 12 | 9 | 15 | ≥125 |
| 员工水平（以百为单位） | 5 | 3 | 4 | =40 |
| 投资资金（百万美元） | 5 | 7 | 8 | ≤55 |

至于管理科学部是如何利用这些数据完成他们的研究的，这些内容在讲解了目标规划的一般知识之后在下一节中再作介绍。

### 问题回顾

1. 德怀特公司的管理科学小组要着手解决的是怎样的一个问题？
2. 管理层对该问题设定的三个目标是什么？
3. 在运用加权目标规划方法时，要求将什么最小化？

## 11.2　加权目标规划

到目前为止，我们所讨论的各种管理科学模型（包括线性规划、整数规划、非线性规划）都有一个共同的特点，只有一个目标函数。也就是说，问题所有的管理目标都可以包含在一个最重要的目标内，比如利润最大化或者成本最小化。但是，并不是所有情况都可以做到这一点，就如同在你刚看到的德怀特公司的案例研究里。

如果组织是利润导向的，管理层的目标通常包括下面一些内容：

1. 保持稳定的利润。
2. 增加市场份额。
3. 多样化产品线。
4. 保持价格稳定。
5. 提高员工的士气。
6. 保持对业务的控制力。
7. 增加公司的声誉。

这些目标有着本质上的差别，因此要把它们综合到一个最重要的目标中去是不现实的。相反，在分析问题时，必须对每个目标进行单独的考虑。

> 对每个管理目标建立一个量化的目标，然后分配以罚数权重来表示偏离这些目标的相对严重性。

加权目标规划提供了一种方法，可以同时满足多个目标。基本的方法是为每一个目标建立一个明确的量化目标，然后寻找一个解，能通过平衡尽可能实现各个目标。将罚数权重分配给各个目标来表示偏离各目标的严重程度。根据各目标建立总目标函数，该目标函数表示的目标是要使得每个目标函数与各自目标的加权偏差之和最小。假设所有单个的目标函数以及约束条件都符合线性规划的要求，那么，整个问题就可以描述成为一个线性规划问题。

现在让我们来看看德怀特问题的管理科学小组是如何为上一节介绍的案例研究开展和完成他们的工作的。

## 德怀特公司问题加权目标规划模型的建立

德怀特公司的问题中，要决策的是三种产品的产量，因此，这些决策变量可表示为，

$P_1$ = 产品 1 的每天产量

$P_2$ = 产品 2 的每天产量

$P_3$ = 产品 3 的每天产量

利用表 11.2 给出的单位贡献，可以用三个决策变量将三个目标表示为，

目标 1：　$12P_1+9P_2+15P_3\geq 125$　（总利润目标）

目标 2：　$5P_1+3P_2+4P_3=40$　（员工水平目标）

目标 3：　$5P_1+7P_2+8P_3\leq 55$　（资金投资目标）

这些目标的数学表达式形式上很像线性规划的约束条件。但是，它们不能看作为是数学模型的约束，因为约束是必须满足的，而德怀特公司的管理层已经意识到要同时实现所有的目标是不可能的。对于一个目标规划模型，问题的总目标就是尽可能同时满足所有的目标。

进一步，代入表 11.1 给出的罚数权重，令

$W$ = 各个目标偏离的加权总和

= 偏离目标产生的罚数总和

对于每一个偏离的目标，其相应的罚数为罚数权重与偏离值的乘积，因此，问题的总目标就是通过确定 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 的值以实现

> 这个目标偏离的加权总和将成为电子表格模型的目标单元格。

最小化　$W$ = 5(低于目标 1 的数量) + 2(超过目标 2 的数量) + 4(低于目标 2 的数量) + 3(高于目标 3 的数量)

在超过目标 1(超过目标利润是一种好现象)和低于目标 3(资金投资低于预算是令人满意的)这两种情况下，是不会产生罚数的。

图 11.1 给出了为该问题用电子表格建模的一种方法，可变单元格“生产的单位数”(UnitProduced)(C12:E12)显示了问题的决策变量($P_1$、$P_2$和 $P_3$)。给出这些变量的值之后，输入“实现的水平”(LevelAchieved)(F6:F8)中的等式表示了 B、G 和 H 列各目标的实现水平。

该建模最微妙之处在于 J、K、M 和 O 列。“偏离值”(Deviations)(J6:K8)是附加的可变单元格，表示低于目标或超过各自目标的结果。“偏离加权总和”(WeightedSumOfDeviations)M13 是目标单元格，表示 $W$ 的值，在 Solver 的对话框里规定该目标是使 $W$ 的值最小。利用上面表示 $W$ 的等式，输入目标单元格的等式为将数据单元格“罚数权重”(PenaltyWeights)(J13:K15)和可变单元格“偏离值”(J6:K8)SUMPRDUCT。

> 这种方法来建立模型使得其成为了一个线性规划模型。

在图 11.1 底部选择的 Solver 选项说明这个模型是按照线性规划(使得求解模型成为可能)来建立的，而且所有的可变单元格必须是非负的。输出单元格“实现的水平”(F6:F8)并没有包含约束条件，因为这些单元格的值并不需要完全满足列 B、G 和 H 所指出的目标。但是，输出单元格“平衡”(Balance)(M6:M8)必须满足 Solver 对话框所规定的约束条件，

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Dewright Co. Goal Programming (Weighted) | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | Goals | | Deviations | | | Constraints | | |
| 4 | | | Contribution per Unit Produced | | | Level | | | | Amount | Amount | | Balance | | |
| 5 | | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | Achieved | | Goal | | Over | Under | | (Level – Over + Under) | | Goal |
| 6 | | Goal 1 (Profit) | 12 | 9 | 15 | 125 | ≥ | 125 | | 0 | 0 | | 125 | = | 125 |
| 7 | | Goal 2 (Employment) | 5 | 3 | 4 | 48.33333 | = | 40 | | 8.333 | 0 | | 40 | = | 40 |
| 8 | | Goal 3 (Investment) | 5 | 7 | 8 | 55 | ≤ | 55 | | 0 | 0 | | 55 | = | 55 |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | | | Penalty | | Over | Under | | Weighted Sum | | |
| 12 | | Units Produced | 8.333 | 0 | 1.667 | | | Weights | | Goal | Goal | | of Deviations | | |
| 13 | | | | | | | | Profit | | | 5 | | 16.667 | | |
| 14 | | | | | | | | Employment | | 2 | 4 | | | | |
| 15 | | | | | | | | Investment | | 3 | | | | | |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: WeightedSum

Equal To: ○ Max ◉ Min ○

By Changing Cells:

UnitsProduced,Deviations

Subject to the Constraints:

Balance = Goal

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| | F |
|---|---|
| 4 | Level |
| 5 | Achieved |
| 6 | =SUMPRODUCT(C6:E6,UnitsProduced) |
| 7 | =SUMPRODUCT(C7:E7,UnitsProduced) |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:E8,UnitsProduced) |

| | M | N | O |
|---|---|---|---|
| 4 | Balance | | |
| 5 | (Level – Over + Under) | | Goal |
| 6 | =LevelAchieved – AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |
| 7 | =LevelAchieved – AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |
| 8 | =LevelAchieved – AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| AmountOver | J6:J8 |
| AmountUnder | K6:K8 |
| Balance | M6:M8 |
| Deviations | J6:K8 |
| Goal | H6:H8 |
| LevelAchieved | F6:F8 |
| PenaltyWeights | J13:K15 |
| UnitsProduced | C12:E12 |
| WeightedSumOfDeviations | M13 |

| | M |
|---|---|
| 11 | Weighted Sum |
| 12 | of Deviations |
| 13 | =SUMPRODUCT(PenaltyWeights,Deviations) |

图11.1　德怀特公司加权目标规划问题的线性规划的电子表格模型，其中可变单元格“生产的单位数”(C12:E12)显示的是最优的产量，而可变单元格“偏离值”(J6:K8)表示的是低于或超过目标的最优值。目标单元格“偏离加权总和”(M13)给出相应的偏离加权之和。

即“平衡”(M6:M8)=“目标”(H6:H8)。

这些约束条件起着关键作用,可以保证可变单元格“偏离值”(J6:K8)等于“实现的水平”(F6:F8)偏离目标的数值。其原因是,输入“平衡”(M6:M8)的等式是:

“平衡”(M6:M8)=“实现的水平”(F6:F8)-“超过值”(J6:J8)+“低于值”(K6:K8)

因此,约束条件“平衡”(M6:M8)=“目标”(H6:H8)要求:

“目标”(H6:H8)=“实现的水平”(F6:F8)-“超过值”(J6:J8)+“低于值”(K6:K8)

为了使目标单元格最小化,必须选择满足该等式的“超过值”(J6:J8)和“低于值”(K6:K8)的最小非负值。结果,在所有“实现的水平”偏离目标的行中“超出值”或“低于值”(根据是正的偏离还是负的偏离)都等于偏离值,而其他的值都为0。

点击“求解”按钮,产生了如图11.1所示的所有可变单元格的最优解。因为该模型中使用的单位如表11.2的第一栏所规定的,该最优解包含如下内容,

产品1的每天产量=8⅓单位每天
产品2的每天产量=0
产品3的每天产量=1⅔单位每天
总利润=1.25亿美元
员工水平=4833名职工
资金投资=5500万美元

与管理层目标的惟一偏离是在权重最小的目标上,即超过了原先4000名的员工水平。

**问题回顾**

1. 目标规划不具备前面几章介绍的管理科学模型的共同特点,该特点是什么?
2. 目标规划的基本方法是什么?
3. 目标规划模型中的目标函数表示的是什么含义?
4. 目标规划电子表格中的可变单元格表示的是什么(与前面几章中所介绍的表示决策变量值的可变单元格不同)?
5. 为了求解目标规划问题,这类问题可以建立哪一类电子表格模型?

## 11.3 优先目标规划

目标规划提供了两种不同的方法来处理需要考虑多个目标的管理问题。上一节中所介绍的加权目标规划方法是用于处理所有的目标都非常重要的问题,并且可以通过给这些目标赋以权重来说明它们在重要性上的细微差别。我们现在来讨论另一种方法——优先目标规划。

> 优先目标规划方法按照目标的重要性顺序排列目标,然后按照这个顺序依次集中于每个目标。

第二种方法用于目标的重要性之间存在显著差异而无法通过分配合理的权重来说明目标的相对重要性的问题。所以,这些目标将按照其重要性的顺序来排列。优先目标规划从尽量满足最重要的目标开始,接着以同样方式来实现第二重要的目标,之后按照目标的顺序以此类推。因此,当这种方法集中在某个目标,它将优先于任何其他重要性较低的目标。

优先目标规划应用起来比加权目标规划更容易。

这种方法的一个优点是，对于管理层来说，比起给目标赋以权重来表示其相对重要性，评价目标的重要性顺序显得较为容易。当目标如同德怀特公司问题中的那样完全不同时，对偏离目标分配罚数权重并不是一件很容易的事。而评价重要性的顺序相比下来是一件比较清楚的工作。另一个优点是根据目标重要性顺序每次集中在一个目标上，这种过程是比较直观和容易理解的。当管理层对模型输入的有效性和获得输出的过程充满信心时，他们对输出就更有信心。

也有一些情况，需要结合使用两种方法来分析问题。当目标可以被分成几组，每组内的目标的重要性比较相似，而组与组之间的重要性有很大的差异，此时应当结合使用两种方法。在这种情况下，加权目标规划可用于每组内部，而优先目标规划可用来按照重要性顺序处理组与组之间的问题。然而，我们将不会深入研究这个内容。

每次当重心转到下一个目标时，目标单元格变为对该目标的偏离值。约束条件要求在运行过程中之前考虑的目标不能减少。

对于同一个问题，应用加权目标规划和优先目标规划建立的电子表格模型十分的相似。主要的不同在于它们的目标单元格。优先目标规划没有将目标偏离加权总和最小化作为目标单元格，而是将最重要目标的偏离值最小化作为目标单元格。这一步完成之后，第二步就是增加一个约束条件，即在进行第二重要目标偏离最小化的过程中必须满足刚才获得的最小偏差。接着，再增加第二个约束条件，即在进行第三重要目标偏离最小化的过程中必须满足获得的第二重要目标最小偏差。这个过程将继续进行下去，直到所有的目标都被考虑过了。

现在让我们继续德怀特公司的案例研究，看一下如何来应用优先目标规划。

## 德怀特公司问题中优先目标规划的应用

德怀特公司的管理科学部已经对 11.1 节中所述的问题应用了加权目标规划模型，并得出了结论，如图 11.1 所示。然而，在部门主管（凯瑟琳・唐纳森）和其小组主要成员与最高管理层讨论这个问题时，达成过意向，就是还需要使用优先目标规划方法。

在这个会议上，公司的 CEO（盖利・让）曾清楚地明确了目标的重要性顺序，如下所示：

**优先级 1**：三种新产品产生的总利润（净现值）不得少于 1.25 亿美元（目标 1）。

**优先级 2**：避免使员工水平低于 4000 人（低于目标 2 的情况）。

**优先级 3**：将资金投资限制在 5500 万美元以内（目标 3）。

**优先级 4**：避免员工水平超过 4000 人（高于目标 2 的情况）。

因此，这就是凯瑟琳和她的小组应当实现的四个目标的顺序。

在运行的每个步骤中，当前的电子表格模型总是线性规划模型。

图 11.2 显示了集中在优先级 1 的目标的电子表格模型。这个模型除删掉了“罚数权重”（J13:K15）和改变了目标单元格之外，与图 11.1 所示的加权目标规划模型是一样的。因为此时的目标是将低于目标 1（利润不低于 1.25 亿美元）的数值最小化，所以现在目标单元格是“低于目标 1”（K6）。这个模型仍然是一个线性规划模型，也因此比较容易求解。

第二步将集中在优先级为 2 的目标，最小化“低于目标 2”（K7）。然而，在图 11.2 中这个单元格的值已经显示为 0，所以在优先级为 1 的目标求得的解（如图所示）已经满足了这个目标。

因此，我们可以立即进行第三步，集中到优先级为 3 的目标（资金投资不超过 5500 万美元）。图 11.3 显示了这一步修改之后的电子表格模型。现在的目标单元格是“超过目标 3”

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Dewright Co. Goal Programming (Preemptive Priority 1: Minimize under Goal 1)** | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | **Goals** | | | **Deviations** | | | **Constraints** | | |
| 4 | | | **Contribution per Unit Produced** | | | Level | | | | Amount | Amount | | Balance | | |
| 5 | | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | Achieved | | Goal | | Over | Under | | (Level – Over + Under) | | Goal |
| 6 | | Goal 1 (Profit) | 12 | 9 | 15 | 125 | ≥ | 125 | | 0 | 0 | | 125 | = | 125 |
| 7 | | Goal 2 (Employment) | 5 | 3 | 4 | 40 | = | 40 | | 0 | 0 | | 40 | = | 40 |
| 8 | | Goal 3 (Investment) | 5 | 7 | 8 | 61.481 | ≤ | 55 | | 6.481 | 0 | | 55 | = | 55 |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | Minimize (Under Goal 1) | | | | | |
| 11 | | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | | | | | | | | Weighted Sum | | |
| 12 | | **Units Produced** | 3.704 | 0 | 5.370 | | | | | | | | of Deviations | | |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: UnderGoal1

Equal To: ○ Max ◉ Min ○

**By Changing Cells:**

UnitsProduced,Deviations

**Subject to the Constraints:**

Balance = Goal

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cells |
|---|---|
| AmountOver | J6:J8 |
| AmountUnder | K6:K8 |
| Balance | M6:M8 |
| Deviations | J6:K8 |
| Goal | H6:H8 |
| LevelAchieved | F6:F8 |
| OverGoal1 | J6 |
| OverGoal2 | J7 |
| OverGoal3 | J8 |
| UnderGoal1 | K6 |
| UnderGoal2 | K7 |
| UnderGoal3 | K8 |
| UnitsProduced | C12:E12 |

| | F |
|---|---|
| 4 | Level |
| 5 | Achieved |
| 6 | =SUMPRODUCT(C6:E6,UnitsProduced) |
| 7 | =SUMPRODUCT(C7:E7,UnitsProduced) |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:E8,UnitsProduced) |

| | M | N | O |
|---|---|---|---|
| 4 | Balance | | |
| 5 | (Level − Over + Under) | | Goal |
| 6 | =LevelAchieved − AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |
| 7 | =LevelAchieved − AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |
| 8 | =LevelAchieved − AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |

**图11.2** 德怀特公司优先目标规划问题第一步的线性规划的电子表格模型。由于优先级1是将低于目标1的偏离值最小化，所以这一步骤的目标单元格是“低于目标1”(K6)。点击“求解”按钮之后，可变单元格“生产的单位数”(C12:E12)显示了得出的产量，而可变单元格“偏离值“(J6:K8)表示的是低于或超过目标的结果。由于优先级2是将“低于目标2”(K7)最小化，而这个单元格数值早已为0，因此程序将跳过第二步，直接进行第三步。

(J8)。另一个主要的修改是 Solver 对话框中约束条件的增加,“低于目标1”(K6) =0 和“低于目标2”(K7) =0。此图中的可变单元格显示了点击“求解”按钮之后获得的最优解。再一次,新的目标单元格显示为0。

第四个也是最后一个目标是优先级为4的目标,即最小化“高于目标2”(J7),如图11.4所示。除了先前步骤中引入的约束条件,“低于目标1”(K6) =0 和“低于目标2”(K7) =0,这一步骤又增加了一个约束条件,要求“高于目标3”(J8) =0。点击“求解”按钮后,可变单元格显示了最优解,并且目标单元格给出了值8.3333。

注意这个解与图11.3中得出的解是一样的。因此图11.4中修正后的模型并没有对优先级为4的目标做出任何改进。然而,这个解已经完全实现了最主要的三个目标,是一个非常出色的结果。

同样我们也可以注意到,图11.3和图11.4的解与图11.1中用加权目标规划方法获得解也是一致的。这进一步保证了这是最满足管理层需要的解。

## 德怀特公司案例研究的结语

正好在上次会议的一个月之后,盖利·让再次召集了原来的几个成员来听取管理科学小组的汇报。在这之前的晚上,凯瑟琳·唐纳森已经让送信人将这份报告送到了每个与会者的手中。基于上面两种方面的分析,报告中建议对产品1($P_1=8\frac{1}{3}$)进行大量的生产与营销,而产品3($P_3=1\frac{2}{3}$)上面的投入相对来说要小的多。并且暂时推迟产品2($P_2=0$)的生产,等进一步的调研表明该产品很有利可图时,再根据情况而定。这份报告强调一个事实,即管理层的所有最重要的目标都可以通过该计划实现。

每个人在步入会场之前都详细地阅读了这份带有好消息的报告。因此,这次会议的气氛与上次完全不同,不再有无尽的可疑问题,不再是各持己见(凯瑟琳在家里曾私下和斯考特说以前的会议就像是对她进行审查)。此外,凯瑟琳注意到德怀特公司管理者以前盲目捍卫自己的部门的情况也不见了(凯瑟琳后来惊奇地告诉斯考特,她看到塔莎和维杰这几个月来第一次互相微笑)。维杰一直点着头,对暂时增加员工这一点也表示赞同,因为通过加速新产品的开发,可以避免将来解雇这些新加入的员工。另外,整个报告讲演的过程几乎没有被打断过。在全体快速一致通过该项建议后,盖利拿来了香槟,祝贺凯瑟琳和她的小组完成了一项重要任务。

由此德怀特公司开始了精彩的一年。不过,这一路上德怀特公司也出现一些非常困难的时刻和管理人员的变动。在低迷时期之前,凯瑟琳离开了德怀特公司成立了自己的管理科学咨询公司。她的公司很成功。

## 问题回顾

1. 何时应当使用优先目标规划而不是加权目标规划?
2. 优先目标规划方法与加权目标规划方法有哪些不同?
3. 对于同一问题,分别利用加权目标规划和优先目标规划建立的电子表格模型有什么主要不同?
4. 考虑完第一个目标,在注意力转向下一个目标时,运用优先目标规划方法的每个步骤中需要加入哪些额外的约束条件?
5. 德怀特公司的问题中,应用优先目标规划成功满足了几个最重要的目标?

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Dewright Co. Goal Programming (Preemptive Priority 3: Minimize under Goal 3)** | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | **Goals** | | | **Deviations** | | | **Constraints** | | |
| 4 | | | | **Contribution per Unit Produced** | | Level | | | | Amount | Amount | | Balance | | |
| 5 | | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | Achieved | | Goal | | Over | Under | | (Level – Over + Under) | | Goal |
| 6 | | Goal 1 (Profit) | 12 | 9 | 15 | 125 | ≥ | 125 | | 0 | 0 | | 125 | = | 125 |
| 7 | | Goal 2(Employment) | 5 | 3 | 4 | 48.3333 | = | 40 | | 8.3333 | 0 | | 40 | = | 40 |
| 8 | | Goal 3 (Investment) | 5 | 7 | 8 | 55.000 | ≤ | 55 | | 0.000 | 0 | | 55 | = | 55 |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | Minimize (Over Goal 3) | | | | | |
| 11 | | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | | | | | (Under Goal 1) = 0 | | | | | |
| 12 | | **Units Produced** | 8.333 | 0 | 1.667 | | | | | (Under Goal 2) = 0 | | | | | |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: OverGoal3

Equal To: ○ Max ● Min ○

**By Changing Cells:**

UnitsProduced,Deviations

**Subject to the Constraints:**

Balance = Goal
UnderGoal1 = 0
UnderGoal2 = 0

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cells |
|---|---|
| AmountOver | J6:J8 |
| AmountUnder | K6:K8 |
| Balance | M6:M8 |
| Deviations | J6:K8 |
| Goal | H6:H8 |
| LevelAchieved | F6:F8 |
| OverGoal1 | J6 |
| OverGoal2 | J7 |
| OverGoal3 | J8 |
| UnderGoal1 | K6 |
| UnderGoal2 | K7 |
| UnderGoal3 | K8 |
| UnitsProduced | C12:E12 |

| | F |
|---|---|
| 4 | Level |
| 5 | Achieved |
| 6 | =SUMPRODUCT(C6:E6,UnitsProduced) |
| 7 | =SUMPRODUCT(C7:E7,UnitsProduced) |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:E8,UnitsProduced) |

| | M | N | O |
|---|---|---|---|
| 4 | Balance | | |
| 5 | (Level – Over + Under) | | Goal |
| 6 | =LevelAchieved – AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |
| 7 | =LevelAchieved – AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |
| 8 | =LevelAchieved – AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |

**图11.3** 图11.2的电子表格模型的修正，运行了优先目标规划过程的第三步。由于优先级3是将与目标3的偏离值最小化，所以这一步骤的目标单元格是“高于目标3”(J8)。同时模型中加入了约束条件，“低于目标1”(K6)=0和“低于目标2”(K7)=0。点击“求解”按钮之后，可变单元格显示了结果。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Dewright Co. Goal Programming (Preemptive Priority 4: Minimize over Goal 2)** | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | **Goals** | | | **Deviations** | | | **Constraints** | | |
| 4 | | | **Contribution per Unit Produced** | | | Level | | | | Amount | Amount | | Balance | | |
| 5 | | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | Achieved | | Goal | | Over | Under | | (Level – Over + Under) | | Goal |
| 6 | | Goal 1 (Profit) | 12 | 9 | 15 | 125 | ≥ | 125 | | 0 | 0 | | 125 | = | 125 |
| 7 | | Goal 2 (Employment) | 5 | 3 | 4 | 48.3333 | = | 40 | | 8.3333 | 0 | | 40 | = | 40 |
| 8 | | Goal 3 (Investment) | 5 | 7 | 8 | 55.000 | ≤ | 55 | | 0.000 | 0 | | 55 | = | 55 |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | Minimize (Over Goal 2) | | | | | |
| 11 | | | Product 1 | Product 2 | Product 3 | | | | | (Under Goal 1) = 0 | | | | | |
| 12 | | **Units Produced** | 8.333 | 0 | 1.667 | | | | | (Under Goal 2) = 0 | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | (Over Goal 3) = 0 | | | | | |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: OverGoal2

Equal To: ○ Max ● Min ○

**By Changing Cells:**

UnitsProduced,Deviations

**Subject to the Constraints:**

Balance = Goal
OverGoal3 = 0
UnderGoal1 = 0
UnderGoal2 = 0

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

| Range Name | Cells |
|---|---|
| AmountOver | J6:J8 |
| AmountUnder | K6:K8 |
| Balance | M6:M8 |
| Deviations | J6:K8 |
| Goal | H6:H8 |
| LevelAchieved | F6:F8 |
| OverGoal1 | J6 |
| OverGoal2 | J7 |
| OverGoal3 | J8 |
| UnderGoal1 | K6 |
| UnderGoal2 | K7 |
| UnderGoal3 | K8 |
| UnitsProduced | C12:E12 |

| | F |
|---|---|
| 4 | Level |
| 5 | Achieved |
| 6 | =SUMPRODUCT(C6:E6,UnitsProduced) |
| 7 | =SUMPRODUCT(C7:E7,UnitsProduced) |
| 8 | =SUMPRODUCT(C8:E8,UnitsProduced) |

| | M | N | O |
|---|---|---|---|
| 4 | Balance | | |
| 5 | (Level − Over + Under) | | Goal |
| 6 | =LevelAchieved − AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |
| 7 | =LevelAchieved − AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |
| 8 | =LevelAchieved − AmountOver+AmountUnder | = | =Goal |

**图11.4** 图11.3的电子表格模型的修正，运行了优先目标规划过程的第四步。由于优先级4是将超过目标2的偏离值最小化，所以这一步骤的目标单元格是“高于目标2”(J7)。同时模型中多加入一个约束条件，“高于目标3”(J8)=0。由于这是最后一步，因此点击“求解”按钮之后，可变单元格显示了德怀特公司优先目标规划问题获得的最优解。

## 11.4 本章小结

大部分的管理科学模型都有一个基本的假设,即可以用单一的目标函数来涵盖所有最重要的管理目标。但是,有时候管理层的目标各不相同,必须分开来考虑。如德怀特案例研究所介绍的,目标规划能够使多个目标同时最大限度地实现。

一个基本方法,称为加权目标规划,它为各个目标建立量化目标,而后通过平衡各目标的实现程度来求得最优解。通过引入一些新的决策变量(可变单元格)来表示低于或超过目标的数值,这种方法建立了一个线性规划模型,并以各目标偏离的加权和最小为模型的目标函数。

另一种基本方法,称为优先目标规划,它将各个目标按照其重要性进行排序。之后按照这个顺序每次集中到一个目标上。当集中在某个特定目标时,模型将与目标的偏离最小化作为目标。模型同时也包括了约束条件,这些约束条件要求之前考虑的目标不可以减少。

这两种方法都可以建立线性规划模型,这使得求解比较容易。因此,对于同时需要满足多个管理目标并且对比较重要的目标给予较高的优先级的情况,目标规划提供了一个非常实用的方法。

## 专业术语

**目标规划**(goal programming):为了同时尽可能地实现多个目标而设计出的一种规划技术。(11.1 节)

**罚数权重**(Penalty weights):分配给加权目标规划问题各目标的权数,用以表示偏离各目标的相对严重性。(11.1 和 11.2 节)

**优先目标规划**(preemptive goal programming):目标规划的一种类型,按照目标的重要性顺序每次集中在一个目标上,并且优先于其他任何重要性较低的目标。(11.1 和 11.3 节)

**加权目标规划**(weighted goal programming):目标规划的一种类型,给不同的目标赋以罚数权重,然后寻找一个解,可以使各个目标偏离值的加权总和最小化。(11.1 和 11.2 节)

## 本章管理科学课件的学习辅助

**"Ch. 11—目标规划"Excel 文件:**

德怀特公司加权目标规划
德怀特公司优先目标规划(三张电子表格)

**Excel 加载宏:**

教育版 Premium Solver

## 习　　题

如果以下题(或题的部分)的左边加入了 E* 的标志,说明该题应当使用 Excel(除非你的老师给出不同的指示)。打星号的问题至少有一部分的答案会在书后给出。

11.1.* 在一目标规划问题中,管理层的目标之一是要使得公司下一年员工水平保持在目前 60 个全职员工(FTE)的水平上。每低于目标一个全职员工的严重性是超过目标一个全职员工的三倍。假设电子表格的 K7 单元格表示"超过目标的数量",L7 表示"低于目标的数量"(两个单元格均为可变单元格)。在输入目标单元格

的等式中，K7 与 L7 前的系数有何关系？

11.2. 艾尔伯特·弗兰克公司（Albert Franko Co.）的管理层已经为其公司的两种新产品制定了各自的市场目标。具体地说，产品 1 必须占据 15% 的市场份额，而产品 2 必须有 10% 的市场份额。为了获得市场，准备开展三次广告活动。其中一个广告专门针对产品 1，一个专门针对产品 2，而广告 3 是为了提高整个公司及其产品的声誉。以 $x_1, x_2, x_3$ 分别表示分配在三个广告上的资金（以百万美元为单位），相应的两种产品取得的市场份额估计值（以百分比表示）为：

产品 1 的市场份额 $= 0.5x_1 + 0.2x_3$
产品 2 的市场份额 $= 0.3x_2 + 0.2x_3$

广告总预算为 5500 万美元，其中必须有至少 1000 万美元投资在第三个广告上。如果两个产品的市场份额目标不能同时实现，管理层认为两种产品上目标偏离的严重性是同等的。在上述条件下，管理层希望得到最有效的资金分配方法。

a. 根据题中给出的各目标的数量表达式以及总目标，说明为什么该问题是一个加权目标规划问题。

E* b. 在电子表格上建立该问题的线性规划模型并求解。

c. 以管理层能够理解的语言解释你所求得的解。

11.3.* 易迈克斯（Emax）公司的研发部开发出了三种新产品，现在就要决策该如何生产各种产品。管理层主要考虑三个因素，分别为：总利润、员工的稳定性以及公司明年的收入比今年的 7500 万美元有所增加。使用表中规定的单位，该问题的目标可表示为：

$$最大化 \quad M = P - 6C - 3D$$

其中

$M$ = 综合三个因素的总绩效测度
$P$ = 新产品在整个生命周期产生的总利润
$C$ = 员工水平的变动量（增加或减少）
$D$ = 第二年收入与今年相比的减少量

收入的任何增加都不输入 $M$，因为管理层所要求的只是收入上的增加以取悦股东。（这里面还包含着矛盾的心情，如果明年收入增加过多，今后几年就很难保持并超越。）

各产品每一单位对三个因素的影响如下表所示：

| 因　素 | 单位产品的贡献 | | | 目　标 | （单位） |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | | |
| 总利润 | 20 | 15 | 25 | 最大化 | （百万美元） |
| 员工水平 | 6 | 4 | 5 | =50 | （百名员工） |
| 下一年的收入 | 8 | 7 | 5 | ≥75 | （百万美元） |

E* a. 为该问题建立电子表格模型并求解。

b. 以管理层能够理解的语言解释你所求得的解。

11.4. 重新考虑 11.1 和 11.2 节中的德杯特公司的案例。进一步考虑了利用加权目标规划获得的最优解之后，管理层提出了如下一些 what-if 问题。

a. 盖利·让想知道如果表 11.1 最右栏中的罚数权重变为 7，4，1，3，会产生怎样的结果？你是否可以预期最优解的变动？为什么？

E* b. 塔莎·约翰逊想知道如果总利润的最小要求增为 1.4 亿美元，在保持原来的罚数权重不变的情况下，会有什么样的结果。求解修改后的模型。

E* c. 将盖利和塔莎的要求同时表现在一个模型中，求解这一模型。

11.5. 蒙特哥是一个有着 1500 万英亩政府耕地的发展中国家。目前，政府正计划明年将这些土地分配给三种基本的农作物（以 1、2、3 表示）。生产的农产品一部分出口以换取紧缺的外币，剩下的是居民的食粮。种植这些农作物也为国家相当一部分人提供了就业。因此，在给三种农作物分配土地时要考虑的主要因素为：（1）能获得的外币；（2）可供养的居

民数;(3)种植农作物需要的劳动力。下表的数据说明了各种作物每1000英亩产量对三个因素的贡献,而表的最后一栏为政府给三个因素建立的目标。

| 因　素 | 每1000英亩地的贡献 | | | 目　标 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 外币 | $3000 | $5000 | $4000 | ≥7000万美元 |
| 可供养的居民 | 150 | 75 | 100 | ≥1750000 |
| 可雇用的居民 | 10 | 15 | 12 | =200000 |

在评估不满足各个目标的严重性时,政府认为以下目标的偏差是同等重要的:(1)外币数量每低于目标值100美元;(2)供养居民的数量每低于目标值一个;(3)需要的劳动力比劳动力目标少或多一人。

a. 根据上面提供的各目标的数量表达式以及总目标,说明为什么该问题是一个加权目标规划问题。

E* b. 为该问题在电子表格上建立线性规划模型并求解。

c. 以管理层能够理解的语言解释你所求得的解。

E*11.6. 重新考虑问题11.5中所描述的情况。蒙特哥的失业率正在不断增加,且外币资金的缺乏成为越来越严重的问题。因此,蒙特哥政府现在决定需要给增加就业和提高外币以更高的优先级。以下是所建立的目标优先级的顺序。

优先级1: 雇用的居民≥200000
优先级2: 外币 ≥7000万美元
优先级3: 供养的居民≥1750000
优先级4: 雇用的居民≥200000

利用优先目标规划来决定政府应如何将耕地分配给三种基本农作物。

E*11.7. 阿伯丁的市议会必须对下一年的税收政策做出决策。有四种税收被用来增加收入:

- 财产税
- 营业税(州营业税以外的附加税)
- 娱乐税
- 公共事业税(市所有的公共事业)

该城市由三种类型的市民组成:低收入阶层、中等收入阶层和高收入阶层。下表给出了每个阶层每1%税率产生的收入(例如,对低收入阶层来说,3%的营业税将产生120万美元)。

| 收入阶层 | 每1%的税率收缴的收入(千美元) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 财产税 | 营业税 | 娱乐税 | 公共事业税 |
| 低收入 | 600 | 400 | 50 | 100 |
| 中等收入 | 800 | 350 | 100 | 120 |
| 高收入 | 1200 | 250 | 120 | 80 |

市议会决定税收政策必须满足以下限制条件。

- 对中等收入阶层的税收负担不能超过250万美元。
- 对高收入阶层的税收负担不能超过230万美元。
- 总的税收收入必须超过当前600万美元的水平。
- 营业税税率必须在1%到3%之间。

在这些限制条件下,市议会设立了以下三个目标(按优先级顺序排列):

- 目标1:对低收入阶层的税收负担限制在200万美元以下。
- 目标2:财产税税率不低于1%。
- 如果税收负担过高,则20%的低收入阶层、20%的中等收入阶层和40%的高收入阶层可能会考虑离开。如果总人口的这个子集的总税收负担超过150万美元,就会出现上述情况。因此目标3就是将这部分人群的总税收负担限制在150万美元。

a. 利用优先目标规划来决定各种税率。

b. 利用以下罚数权重：超过目标 1 每 1000 美元罚数权重为 1，低于目标 2 每 1% 罚数权重为 90，超过目标 3 每 1000 美元罚数权重为 1；运用加权目标规划来决定各种税率。

E*11.8. 重新考虑问题 11.2 所描述的情况。艾尔伯特·弗兰克公司（Albert Franko Co.）的管理层决定，产品 2 获得至少 10% 的市场份额的这个目标应该优先于产品 1 获得至少 15% 的市场份额的目标。利用优先目标规划来决定如何最有效地将可获得的资金分配到三种广告活动中。

E*11.9. 重新考虑 11.1 节所描述的德怀特公司的案例。维杰·沙哈（制造部副总裁）仍然觉得最优先考虑的目标应该是维持 4000 名的员工水平（避免增加或减少），这样才能获得令人满意的利润。因此，他将资金投资不高于 5500 万美元的目标作为优先级 2，而将获得至少 1.25 亿美元的总利润作为优先级 3。根据修改过的优先级顺序，对德怀特公司的问题应用优先目标规划。

E*11.10. 沃特沃商学院的招生委员会将对下一年哪些申请者可以进入其 MBA 课程做出决策。除了考虑每个申请者自身的能力之外，委员会还需要考虑三个政策方针。第一个方针是：虽然只要申请者其他方面非常优秀即使其 GMAT 成绩较低并不会使其丧失资格，但是整个 MBA 班级的平均 GMAT 成绩仍应当保持较高的水平（在所有参加 GMAT 考试的人中大约有 85% 的人总分低于 650，但是沃特沃商学院是一个要求较高的学院，它认为 650 分以下是一个比较低的分数）。第二个方针是：MBA 班中的男生和女生比例不应当相差太多。第三个方针是：班级中应当包含相当数量至少 30 岁的学生，因为这些人有丰富的工作经验而且成熟。

现在委员会根据学生 GMAT 成绩的高、中、低将男性申请者和女性申请者分成了三个类型。下表显示了年龄低于 30 和至少 30 的申请者的数量。

| 类　型 | 平均 GMAT 成绩 | 年龄低于 30 的数量 | 年龄至少 30 的数量 |
|---|---|---|---|
| 高分（男） | 720 | 120 | 32 |
| 高分（女） | 720 | 18 | 4 |
| 中等（男） | 670 | 104 | 56 |
| 中等（女） | 670 | 32 | 32 |
| 低分（男） | 620 | 40 | 40 |
| 低分（女） | 620 | 32 | 48 |

招生委员会为进入 MBA 班设置了四个目标，以下是优先级顺序：

**目标 1**：班级应至少有学生 240 人。

**目标 2**：班级平均 GMAT 成绩不低于 690 分。

**目标 3**：班级里女生的比例至少达到 35%。

**目标 4**：班级里至少有 120 名学生的年龄不低于 30 岁。

基于过去的经验，申请者中有 60% 的人将会被录取。

利用优先目标规划来决定每种类型的申请者各有多少可以被录取。

## 案例 11.1　古巴的良方

Fulgencio Batista 以铁血政策领导着古巴——大肆地掠夺贫苦老百姓，专制地统治着信任他的人民，残酷地屠杀政治犯。1958 年，为了拯救古巴人民，逃出苦海，Fidel Castro 领导着一支游击队起来反抗 Batista，并在 1959 年 1 月夺过了 Batista 手中的政权。1961 年美国对古巴实行了经济制裁，完全中断了两国产品的贸易往来。贸易制裁的影响一直没有在古巴引起很大的反响，直到 1989 年苏联解体。因为，

在这之前古巴每年从苏联取得平均 50 亿美元的援助。失去了这赖以生存的经济支持，现在古巴几乎没有财政收入来购买基本的食品、衣物和药物。1992 年美国制定了 Torricelli 法，禁止美国在第三世界国家的子公司与古巴进行贸易，给古巴原本艰难的经济雪上加霜，因为这一项往年可为古巴创造 7 亿美元的年收入。

从 1989 年开始，古巴经济备受贸易制裁的影响，贫苦统治了整个古巴。人们没有钱购买诸如食物、药品和衣物等生活必需品，大量的儿童饿死冻死，由于药品紧缺而疾病盛行。视神经炎、肺结核、肺炎和流行性感冒在人群中蔓延。

美国很少有人会同情古巴人民的悲惨遭遇，但是，救援协会的会长 Robert Backer 却不忍看到政治再继续摧毁那么多人的生命。他的组织每年都会对世界上的贫困地区进行人道主义救助，Mr. Backer 意识到了古巴的可怕形势，准备从下一年对古巴进行救助。

Mr. Backer 会给古巴人民送去大量的救援包裹，这些救援包分为三类。最基本的救援包中只放了食物，如谷物和奶粉，每一包成本为 300 美元，重 120 磅，可救助 30 人。稍微好一些的救援包中不仅含有食物还包括衣物，如毯子、衣料等，每包成本 350 美元，重 180 磅，可救助 35 个人。高级救援包中包括食品、衣物和药品，成本为 720 美元，重 220 磅，可救助 54 人。

Mr. Backer 在决定发放给古巴的包裹数量和类型的同时，也希望可以实现以下几个目的：第一是至少可以救助古巴 1100 万人口中的 20%；第二是因为古巴目前疾病流行，所以发送的救援包裹中至少有 3000 个应该是包含药物的高级包；第三个目标是因为其他国家也需要人道主义救助，所以在古巴的救援费用不能超过 2000 万美元。

Mr. Backer 对三个目标的重要性评价是不同的，其中最重要的，他认为是减低成本，因为这样他的组织就可以救助更多需要帮助的国家。因此，他给超过 2000 万美元的每 100 万赋以 1 点的罚数。第二个重要的目标是要保证至少有 3000 个包含药物的高级包裹，因为他不想看到古巴的流行病情况继续恶化导致人民的死亡。因此，少于目标 3000 的每 1000 个高级包裹相应的罚数为一点。放在最末尾的目标是该次救援活动必须涉及到至少 20% 的古巴人民，因为他认为与其给所有的人一点点救助，还不如给相对少一些人以足够的救援物资，让他们生存下去。因此，他决定给低于 20% 目标的每 100000 人数分配 7 点罚数。

Mr. Backer 同时也意识到发放救助包裹受到一些条件的约束。每个包裹的大小尺寸是一样的，但是，因为美国政府允许飞到古巴的货机数目是有限的，他只能最多送出 40000 个包裹。此外，在重量上也有限制，每架货机的承重量不能超过 600 万磅。最后，还有一个安全方面的限制，在发放药品的时候，为了确保古巴人民知道如何正确地使用这些药物，每发放 100 个高级包裹，必须派出一名医生，而每位医生的花费为 33000 美元。

a. Mr. Backer 分别应将多少基本的、中档的以及高级包裹发往古巴？

b. Mr. Backer 决定对各目标的重要性重新评价。为了获得更多的捐款，他必须表明这一活动是很有效的，而捐款人通常是以总的接受救援的人数来判别活动的有效性。因此，Mr. Backer 要将活动至少涉及到 20% 的古巴人民这一目标放在首要位置，分配给低于目标值 20% 的每半个百分点以 10 点的罚数。其他两个目标的罚数不变，在这种条件下，各种包裹的数量应分别为多少？该计划对罚数权重的变动有多灵敏？

c. Mr. Backer 认为多派一些医生将有助于所发送的包裹物资被有效地分配和使用，从而会增加活动的效果，因此，他决定给每 75 个高级包分配一名医生。b 中所指定的各个目标的罚数权重不变，在这种情况下，应发送多少数量的各类包裹？

d. 援助活动的资金预算被减少了，Mr. Backer 只能获得不超过 2000 万美元的资金。因为这一预算原因，Mr. Backer 决定还是给每 100 个高级包分配一名医生。假设其他两个目标的罚数权重如 a 中所指定的，在这种情况下，应发送多少数量的各类包裹？

e. 由于援助预算被削减了，Mr. Backer 认为三个目标的重要性水平相差很远，以致为偏离这些目标赋以合适的罚数权重是非常困难的。因此，继续维持他原先每 100 个高级包裹分配一名医生的政策，在这种情况下他觉得使用优先目标规划方法更加合适（这可以保证他的预算目标尽可能的完全满足）。根据优先目标规划方法，应发送多少数量的各类包裹？

# 案例 11.2　纪念 9・11

艾德琳・乔纳森在 2001 年 9 月 11 日世贸中心坍塌的时候失去了两位好朋友。她们是两位充满活力的女性，而现在她们离开了人世，留下她们的丈夫和孩子沉浸在无尽的悲伤中。这是多么可怕的失去。过去的每一天艾德琳都在想念她的朋友们，并对那些毫无意义的屠杀感到愤恨。现在，她感到有一种真实的使命感，要做一些事情。她被要求担任新组建的交通安全局的高层管理者，这是多么令人高兴的一件事。当她被告知这份工作将涉及领导一支航空安全特别工作组时，她毫不犹豫地接受了这个职位。她之前很享受作为航空业管理科学顾问的工作。因为可以帮助多家航空公司节约大量的资金是一件让人满足的事。但是，她现在感受到了更强烈的愿望。她希望可以运用她在管理科学的专业知识帮助拯救生命。她没有办法让朋友再回到身边，但最起码她可以尽可能地避免不幸的事情再次发生。

艾德琳正在真正地实现她的使命。紧接 2001 年 9 月 11 日的惨剧之后，美国国会制定了紧急立法，提供全美 400 多个机场的保安措施是交通部的首要责任。于是在交通部里产生了交通安全局来实现这个职责。艾德琳的特别工作组接到的一个任务就是调查研究在预算的限制下哪些先进的安全技术应当被开发和在机场的检查站被使用，以使有效性最大化。

早在 2001 年之前，对安全检查站用来检查每个乘客的两种基本类型的检查系统，飞机乘客已经非常熟悉。一个在入口处，当乘客通过时可以检查隐藏的武器。另一个是筛选系统，用来扫描乘客的手提行李。已经有许多关于先进安全技术的各种不同的提议，可以用来改善这两种系统。艾德琳的特别工作组现在需要对下一代检查系统应如何发展做出建议。

特别工作组被告知了新型入口系统的功能性要求，即它必须能够检查出即使是一盎司的爆炸性的和危险的液体，以及乘客隐藏的金属武器。实现这个功能所需要的技术包括四极矩共振（与医学上所使用的磁共振技术非常接近）和磁传感器。利用这种技术来设计入口有很多种方法，都可以良好地满足功能性要求。但是，不同的设计在错误警报出现的频率上、以及入口的购买成本和维护成本上，都有很大的差别。错误警报的出现频率是关键的考虑因素，因为这对乘客队列行进的效率有很大的影响。而且更重要的是，错误警报出现频率过高会减少保安人员检查到确实隐藏破坏性装备的极少数恐怖分子时的警戒性。

满足功能性要求的最基本型的入口系统的购买价格是 90000 美元，并且平均每年的维护成本为 15000 美元。这个系统的缺点在于它的错误警报出现频率大约为乘客的 10%。使用更昂贵的入口系统可以降低错误警报率。入口系统的成本每增加 15000 美元，就可以将错误警报率降低一个百分点，同时会使每年的维修成本增加 1500 美元。最贵的入口系统的价值为 210000 美元，而它的错误警报率只有顾客的 2%，年维修成本为 27000 美元。

对于手提行李的新型筛选系统，其功能性要求是必须能够清楚地显示小到瑞士军刀一样的可疑物体。满足这一要求所需要技术结合了 X 射线成像、热中子扫描器和计算机 X 线断层成像（可用来将可疑物体与已知的高危险性材料进行密度和其他物理特性的比较）。据估计，能够良好地满足功能性要求的最基本系统的成本为 60000 美元，每年的维护成本为 9000 美元。与最基本的入口系统一起，这个筛选系统的缺点在于它不能有效地区分有破坏性和无危害的可疑物体。因此，这个系统产生的错误警报大约为顾客的 6%。除了会浪费时间和延缓乘客之外，这么高的错误警报率将会使筛选系统操作者很难在极少数正确警报发生时保持必要的警觉性。但是，较为昂贵的筛选系统就具有相当高的识别力。具体来说，系统成本每增加 30000 美元就能减少 1% 的错误警报率，同时每年的维护成本也要增加 1200 美元。因此，最昂贵的筛选系统的成本高达 150000 美元，可以使错误警报率降到 3%，每年的维护成本也增加到 12600 美元。

特别工作组被给定了两个预算方针：

**第一预算方针**：在每个安全检查点，入口系统和手提行李筛选系统的总支出为 250000 美元。

**第二预算方针**：在每个安全检查点，两个系统的平均总维护成本控制在 30000 美元以下。

这两个预算方针限定了不可能使用最昂贵的入口系统和手提行李筛选系统。因此，特别工作组需要决定，在财政允许的情况下两个系统分别用什么型号才能够将筛选乘客的有效性最大化。完成这一

决定，首先要从交通安全委员会的最高管理层获得有关输入信息：有效性的测算方法是什么？管理层的目标，以及获得很高的有效性与满足预算方针两者之间的优先级别如何？

**优先级**1：两种新系统的功能性要求必须满足（在特别工作组考虑范围之内的各种型号的系统都满足这个目标）。

**优先级**2：两个系统的总错误警报率不能超过每个乘客0.1。

**优先级**3：满足第一个预算方针。

**优先级**4：满足第二个预算方针。

现在已经获得了所有需要的管理输入，特别工作组准备开始进行分析。

a. 明确两个需要做出的决策，并为每一个决策定义决策变量。

b. 利用a中定义的决策变量给出每个目标的数量化表达式，解释为什么这个问题是优先目标规划问题？

c. 画出一个两维的图形，其中两个轴代表a中所定义的决策变量。按照优先级顺序依次考虑每个目标，利用b中获得的该目标的数量化表达式，在图上做出一条表示完全满足该目标的决策变量值的曲线。在完成所有目标的曲线之后，利用该图形来决定这个优先目标规划的最优解。

d. 利用优先目标规划建立一个电子表格模型，并求解。

e. 如果除了优先级最低的目标不能满足之外，所有其他目标都可以完全满足，那么可以先建立一个包括了除最后一个目标之外的所有目标作为约束条件的线性规划模型并求解，这样就能很快解决一个优先目标规划问题，接着利用目标函数尽量朝优先级最低的目标努力。为这个问题在电子表格上建立这样的一个线性规划模型，并求解。如果该线性规划模型没有可行解，应该如何解释这个优先目标规划问题？

f. 在忽视第二个预算方针但必须完全满足第一个预算方针的情况下，通过决定每位乘客的总错误警报率可以降到何种程度（甚至可能低于目标），做一些 what-if 分析。

g. 为了给最高管理层提供作出合理决策所需的信息，有关每位乘客总错误警报率的最佳平衡、每个安全检查点的两种新安全系统的总支出、每个安全检查点两个新系统的年维护总成本，你认为还需要做哪些 what-if 分析？

CHAPTER

# 12 决策分析

## 学习目标

完成本章学习后,你应该掌握:

1. 确定需要进行决策分析的决策制定的环境。
2. 描述决策分析组织一个问题的逻辑方法。
3. 从问题的描述中构建一个收益表。
4. 描述和评价建立在收益表基础上的做决策的几个可选规则。
5. 应用贝叶斯决策规则求解决策分析问题。
6. 构建和求解决策树以处理系列决策问题。
7. 使用 TreePlan 来构建和求解决策树。
8. 应用贝叶斯决策规则来实施敏感性分析。
9. 在作出决策之前决定是否值得需要得到更多的信息。
10. 使用新的信息来更新自然状态的概率。
11. 当处理系列决策问题时使用 SensIt 来实施敏感性分析。
12. 用效用来更好地反映收益的价值。
13. 描述决策分析在实践应用中的一些共同特征。

前面的几章主要讨论了在已知各种可选决策的结果具有相当大的确定性的情况下的管理决策制定问题。这种决策制定的环境使得能够利用描述任何决策组合的预测结果的目标函数来建立有用的数学模型(线性规划、整数规划等)。尽管这些结果通常无法完全确定地预测到,但它们至少能够以足够的准确度估计得到,从而证实选择使用这些模型(连同敏感性分析等)的准确性。

然而,管理人员经常需要在具有更多不确定性的环境中进行决策。这里有一些例子:

1. 制造商向市场推出新产品。这时潜在顾客将会做出什么反应?制造商应当生产多少产品?在决定全面分销前是否需要在一个小区域中进行试销?为了成功推出产品,制造商需要打多少广告?

2. 一个金融公司投资有价证券。哪些市场板块和单个有价证券前景最好？经济趋势如何？利率会怎样变化？这些因素如何影响投资决策？
3. 一个政府工程承包商投标一个新的合同。工程的实际成本是多少？其他哪些公司会投标？他们可能的投标价是多少？
4. 一个农业公司为即将到来的季节选择农作物和家畜的组合。天气状况如何？价格趋势是什么样的？成本会是多少？
5. 一个石油公司决策是否在一个特定地点钻探石油。那里有石油的可能性有多大？有多少石油？他们需要钻探多深？在钻探前是否需要地质学家做进一步的勘查？

所有这些面临巨大不确定性的决策都是决策分析的使用对象。当结果不确定时，决策分析提供了进行理性决策制定的框架和方法。

第一节介绍了一个案例，这个案例将会贯穿本章，介绍涉及到决策分析应用的各个阶段。12.2 节着重于选择适当的决策准则。下一节描述了如何使用决策树来构造和分析决策分析问题。12.4 节讨论了如何在决策树的辅助下有效地实施敏感性分析。接下来的三节解决是否值得获取更多的信息，以及如果值得获取更多信息时，如何使用这些信息来制定一系列决策。12.8 节介绍了一种有效的 Excel 宏，即 SensIt 用来执行敏感性分析，它甚至适用于需要作出一系列决策的时候。12.9 节描述了在对可能的结果进行修正以反映决策者的真实价值后，应当如何分析问题。最后 12.10 节讨论了决策分析的实际应用，并总结了有益于相关组织的各种应用。

## 12.1 案例研究：高富布鲁克公司的难题

马克斯·弗雷尔是高富布鲁克公司（Goferbroke Company）的创建人和全资所有人。这家公司在未经证实的地区钻探石油。马克斯的朋友亲切地称他为投机家。然而他喜欢称自己为企业家。他将一生的积蓄都花在了公司上，希望通过发现一个大油田使公司壮大起来。

现在他的机会可能来了。他的公司买了许多块地。尽管这些地靠近一些大的油田，但是较大的石油公司认为这些土地是没有希望产油的。现在马克斯得到了其中一块土地的令人兴奋的报告。一位咨询地质学家刚刚告诉马克斯，他认为这块土地有1/4的概率有石油。

马克斯已经从痛苦的经验中吸取了教训，必须对咨询地质学家的有石油的概率的报告保持怀疑。在这块地上钻探石油需要大约 100000 美元的投资。如果这块地是干涸的（没有石油），整个投资都将会损失。由于他的公司没有多少资金，这个损失将会非常严重。

另一方面，如果这块地蕴含有石油，咨询地质学家估计那里的石油足够可以获得约 800000 美元的净收入。因此大概的利润是：

$$
\begin{aligned}
\text{发现石油的利润} &= \text{发现石油的收入} - \text{钻探成本} \\
&= 800000\ \text{美元} - 100000\ \text{美元} \\
&= 700000\ \text{美元}
\end{aligned}
$$

尽管这不是马克斯一直等待的大发现，但还是会给公司带来相当不错的资金流入，使得公司能够维持运转直到他遇到真正的大发现。

这里还有一个选择。另一个石油公司听说了这个咨询地质学家的报告，决定出价 90000 美元来购买这块土地。这非常诱人。因为这也可以为公司带来不错的现金流入，而

且无需承担 100000 美元损失的巨大风险。

马克斯不知道该怎么做。幸运的是帮手就在身边。马克斯的女儿杰妮弗刚刚从一所不错的商学院拿到了学位，开始为她引以自豪的父亲工作。马克斯要女儿杰妮弗应用她受到的商业培训来帮他分析这个问题，由于在大学里学过管理科学，她建议使用决策分析。由于已经为她的优良教育支付了大量的费用，所以他同意试一试。

杰妮弗与父亲关于这个问题的谈话开始了。

**表 12.1　总结了马克斯面前的备择方案和预期的收益。**

| 土地状况 / 备择方案 | 利润（美元） | |
|---|---|---|
| | 有石油 | 干涸 |
| 钻探石油 | 700000 | -100000 |
| 出售土地 | 90000 | 90000 |
| 概率 | 1/4 | 3/4 |

**杰妮弗**：你认为咨询地质学家关于这块地有 1/4 的概率产石油的估计有多大的可信度？

**马克斯**：可信度不大。这些家伙有时好像任意夸大数据。他们总是要让我相信那里有石油。但是概率可能是 1/3，或者是 1/5。实际上他们自己并不知道。

**杰妮弗**：是否有途径能获得更多的信息来降低不确定性？这是用决策分析方法的一个重要的选择。

**马克斯**：有的。我们可以安排在这块土地进行详细的地震勘探。这可能会在一定程度上更好地确定这种可能性。但是你不会真的发现是否有石油，除非你进行钻探。而且这些地震勘探花费巨大。我得到了对这块土地进行勘探的报价。30000 美元！而结果可能只能告诉我们很有可能有石油。所以如果我们进行钻探，可能什么也找不到。然后我们又要损失 100000 美元！损失 130000 美元几乎要使我们破产。

**杰妮弗**：好。让我们先把地震勘探放在一边。还有一个关键的考虑因素。好像我们不能仅仅局限于钱来分析可能带来的后果。损失 130000 美元带来的伤害远远超过获得 130000 美元带来的帮助。

**马克斯**：当然是这样！

**杰妮弗**：决策分析有一种通过使用效用概念的方法来考虑问题。一个结果的效用（utility）衡量的是这个结果对你的真实价值而不是货币价值。

**马克斯**：听起来不错。

**杰妮弗**：这是我建议我们要做的工作。我们从简单的开始，不考虑地震勘探的选择也不用效用。我会向你介绍决策分析如何组织我们的问题，以及它所提供的用于决策的准则。你可以选择你认为合适的准则。然后我们看看是否值得做地震勘探。如果值得，如何以最佳的方式使用这些信息。在此之后，我们要仔细分析这个问题，包括使用效用。我想当我们完成了这个过程并且你作出了决策后，你会对你选择的最佳决策感到满意。

**马克斯**：好。那我们就开始吧。

下面就是杰妮弗为她父亲提供的使用决策分析来组织问题的逻辑方法的指导。

## 决策分析术语

决策分析有一些专门术语。

决策者(Decision Maker)是对通过考虑作出一个决策(或一系列决策)负责的个人或团体。对于高富布鲁克公司的问题,决策者是马克斯。杰妮弗(管理专家)能够帮助进行分析,但其目的是帮助决策者找到从决策者视角出发的最佳决策。

备择方案(Alternatives)是决策者将作出的决策的选项。马克斯的备择方案是钻探石油或出售这块土地。

决策的结果受到决策者无法控制的随机因素的影响。这些随机因素决定了决策执行中的各种状况。每一种可能的状况被称为可能的自然状态(State of nature)。对于高富布鲁克公司的问题,可能的自然状态为这块地有石油或这块地是干涸的(没有石油)。

决策者通常会有一些可能的自然状态的相关可能性的信息。这些信息可能仅仅是基于个人经验或直觉的主观估计,或一些相关的证据(如咨询地质学家的报告)。这些估计用概率的形式表达出来就被称为特定自然状态的先验概率(Prior Probabilities)。对于高富布鲁克公司的问题,咨询地质学家提供了表 12.2 所示的先验概率。尽管这不可能是基于更多信息(如地震勘探)所得到的真实概率,但这是在获得更多的信息之前所能得到的最好的概率估计(在这一章的后面,我们将会分析是否值得采用地震勘探,所以目前没有地震勘探时该做什么的问题会在随后提及,作为高富布鲁克公司的第一个问题)。

每一种决策的备选方案及自然状态的组合都会导致某种结果。收益(Payoff)是衡量决策结果对决策者的价值的量化指标。在大多数情况下,收益以货币价值表示,如利润。见表 12.1 所示,高富布鲁克公司的收益就是利润(在 12.9 节,公司的收益将会以效用的形式重新表述)。

## 损益表

当对问题进行系统描述时,明确所有的相关备择方案及可能的自然状态是很重要的。在从决策者的视角确定了适当的收益度量方法后,下一步就是要估计每一种决策备择方案和自然状态组合的收益。这些收益显示在损益表(Payoff Table)中。

表 12.3 显示了高富布鲁克公司问题的损益表。收益的单位是千美元。注意在最下面一行显示了自然状态的先验概率,与先前的表 12.2 相同。

**表 12.2 高富布鲁克公司问题的先验概率**

| 自然状态 | 先验概率 |
|---|---|
| 有石油 | 0.25 |
| 干涸 | 0.75 |

**表 12.3 高富布鲁克公司问题的损益表(利润单位:千美元)**

| 备择方案 | 自然状态 | |
|---|---|---|
| | 有石油 | 干 涸 |
| 钻探石油 | 700 | -100 |
| 出售土地 | 90 | 90 |
| 先验概率 | 0.25 | 0.75 |

## 问题回顾

1. 马克斯考虑了哪些决策备择方案?
2. 咨询地质学家估计的那块地域有石油的概率是多少?
3. 马克斯对咨询地质学家关于那块地域有石油的概率估计的信心有多大?
4. 什么方法可以获得关于出油概率的更多的信息?
5. 什么是可能的自然状态?
6. 什么是先验概率?
7. 损益表里的收益代表什么?

# 12.2　决策准则

在表 12.3 中给出了高富布鲁克公司问题的损益表,在决策是钻探石油还是出售土地时应该采用什么决策准则呢? 对于这个问题并没有惟一的正确答案适合于每一个决策者。决策准则的选取主要取决于决策者自己对于决策的性格和态度,还有制定决策的环境。最后,马克斯,作为高富布鲁克公司的所有人,需要决定哪一个决策准则最适合他自己的处境。

贝叶斯决策规则是大多数情况下被推荐的决策准则。

几十年(甚至几个世纪)过去了,大量的决策准则已经用来指导当损益表提供了多种信息时如何做决策。所有的这些准则都在某种程度上考虑了损益表,还有一些准则也考虑了自然状态的先验概率,但是其他的准则却没有使用概率。每一个准则都有一些基本原理和缺陷。无论如何,在最近几十年,大多数的管理科学家得出一个结论,即这些准则中的一个(贝叶斯决策规则)对于大多数的决策者在大多数情况下是特别适合的准则。因此,在这一节描述并讨论贝叶斯决策规则后,剩余的章节将会集中在如何在各种情况下运用这个特殊的准则。

不过,在讨论贝叶斯决策规则前,下面我们主要介绍三种备选决策准则。所有的这些备选准则都特别简单直观。同时,每一个准则在某种程度上都是很肤浅的,因为他们只是关注于损益表所提供信息的一部分,忽视了其余的信息(包括其余两种准则所考虑的部分)。但是,许多个人经常非正式地运用这些准则中的一个或多个。前两个准则没有利用先验概率,当获得相对可靠的先验概率的价值是非常困难或者不可能时,这两种准则是有道理的。贝叶斯决策规则却非常不同于这些决策准则,因为它采用了一种更加结构化的决策方法从而充分利用了损益表中的信息。

在你的 CD-ROM 中包含了标题为决策准则的补充材料,提供了更详细地对这三种决策准则以及更复杂的其他一些准则的讨论和评论。

### 不使用概率的决策准则:乐观准则

乐观准则(maximax criterion)是一种乐观主义者的决策准则。它仅着眼于所发生的对我们最好的情况。下面介绍这个准则如何操作:

1. 对每一个备择方案,确定其每一个自然状态的最大收益。
2. 找出这些最大收益中最大的一个,选出相应的备择方案。

这个决策准则的基本原理是它提供了一个最好的可能结果出现的机会(在损益表中最很好的收益)。所有这一切需要所希望的自然状态的出现,那就是乐观主义者相信最有可能的状态。

表 12.4 给出了高富布鲁克公司问题应用此准则的过程。它来自于表 12.3,没有使用先验概率(因为这些先验概率在这个准则中被忽略了)。在右面多出的一列给出了每个备选方案的最大收益。既然这些备择方案中最大收益中的最大者必定是整个损益表中的最大收益,那么相应的备择方案(钻探石油)也就被这个标准所选择。

这个准则最大的缺陷是它完全忽视了先验概率。例如,它会始终认为高富布鲁克公司应该钻探石油,即使发现石油的机会微乎其微。另一个缺陷是它忽视了除最大收益外其他所有的收益。例如,它仍然会认为高富布鲁克公司应该钻探石油,即使出售这个土地的收益是 699(699000 美元)。

**表 12.4 高富布鲁克公司问题乐观准则应用**

| 备择方案 | 自然状态 | | 行最大值 |
|---|---|---|---|
| | 有石油 | 干 涸 | |
| 钻探石油 | 700 | -100 | 700 ←最大最大值 |
| 出售土地 | 90 | 90 | 90 |

**表 12.5 高富布鲁克公司问题悲观准则应用**

| 备择方案 | 自然状态 | | 行最小值 |
|---|---|---|---|
| | 有石油 | 干 涸 | |
| 钻探石油 | 700 | -100 | -100 |
| 出售土地 | 90 | 90 | 90←最大最小值 |

## 不使用概率的决策准则:悲观准则

悲观准则(maximin criterion)是一种完全悲观主义者的决策准则。与乐观准则相反,它仅着眼于所发生的对我们最差的情况。下面介绍这个准则如何操作:

1. 对每一个备择方案,确定其每一个自然状态的最小收益。
2. 找出这些最小收益中最大的一个,选出相应的备择方案。

这个决策准则的基本原理是它提供了一种对运气不佳的最好的可能保证。即使备选方案的每个可能选择导致了最坏的自然状态的发生,即完全悲观主义者所认为有可能发生的那种情况,由这种准则指出的选择给出了在这种情况下的最好的可能收益。

表 12.5 给出了高富布鲁克公司问题应用这个准则的过程。它和表 12.4 最基本的不同是在最右手边的那列里的数字是所在行的最小值而不是最大值。因为 90 是这两个数字中的最大的一个,那么被选定的备择方案是出售土地。

这个准则的缺陷与乐观准则相似。因为它也完全忽视了先验概率,它会一直坚持认为高富布鲁克公司应该出售土地,即使是钻探石油几乎可以肯定会发现石油。因为它忽视了除那两个最小行值中的最大值外所有的收益。它也同样会认为公司应该出售土地,即使如果钻探石油成功发现石油获得 10000(1000 万美元)的收益。

## 使用概率的决策制定：最大可能性准则

最大可能性准则(maximum Likelihood Criterion)着眼于如下所示的最可能的自然状态：

1. 发现先验概率最大的自然状态。
2. 选择在这种自然状态下收益最大的备择方案。

这个决策准则的基本原理是基于我们对最有可能发生的自然状态的假设。我们给了自己一个比假设其他自然状态更好的获得有利结果的机会。

表 12.6 给出了高富布鲁克公司问题应用这个准则的过程。它和前面给出的损益表 12.3 完全相同，除此之外，还标明了此准则应用的第一步（选取干涸的自然状态）和第二步（选取出售土地这个备择方案）。因为干涸是具有较大先验概率的自然状态，我们只能考虑干涸这一列的收益（-100 和 90）。这两个收益中较大的一个是 90，所以我们选择相应的备择方案，即出售土地。

这个准则也有几个缺陷。一个是在多种自然状态下，最可能发生的状态可能有一个相对比较低的先验概率，在这种情况下，单独地基于这种状态的决策就没有什么意义了。另一个更严重的缺陷是它完全忽视了整个损益表中除了最有可能发生的惟一的自然状态所对应的收益外其他所有的收益（包括任何一个极其巨大的收益或者是致命的收益）。例如，不管发现石油的收益是多么巨大，它会自动地认为高富布鲁克公司应该出售土地，而不应该去钻探石油，不论何时，干涸的自然状态仅比有石油的自然状态的先验概率高一点点。

**表 12.6　高富布鲁克公司问题最大可能性准则应用**

| 备择方案 | 自然状态 | | |
|---|---|---|---|
| | 有石油 | 干　涸 | |
| 钻探石油 | 700 | -100 | |
| 出售土地 | 90 | 90 | ← Step2：最大值 |
| 先验概率 | 0.25 | 0.75<br>↑<br>Step1：最大值 | |

## 使用概率的决策制定：贝叶斯决策规则

贝叶斯决策规则(Bayes' Decision Rule)如下面所总结的那样直接使用可能自然状态的先验概率：

1. 对于每一种备择方案，将每一个收益乘以相应自然状态的先验概率，再把乘积相加就得到收益的加权平均。在统计上这个加权平均称为这个备择方案的期望收益[Expected Payoff(EP)]。
2. 贝叶斯决策规则选择具有最大期望收益的备择方案。

图 12.1 显示了将这个准则应用于高富布鲁克公司问题的 Excel 模板。B、C 和 D 列显示了表 12.3 给出的损益表。单元格 F5 和 F6 执行了的程序的第一步，这些程序调用了输入这些单元格的方程，即：

F5 = SUMPRODUCT(先验概率，钻探石油收益)

F6 = SUMPRODUCT(先验概率,出售土地收益)

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Bayes' Decision Rule for the Goferbroke Co. | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | Payoff Table | State of Nature | | | Expected |
| 4 | | Alternative | Oil | Dry | | Payoff |
| 5 | | Drill | 700 | −100 | | 100 |
| 6 | | Sell | 90 | 90 | | 90 |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | Prior Probability | 0.25 | 0.75 | | |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| DrillPayoff | C5:D5 |
| ExpectedPayoff | F5:F6 |
| PriorProbability | C8:D8 |
| SellPayoff | C6:D6 |

| | F |
|---|---|
| 3 | Expected |
| 4 | Payoff |
| 5 | =SUMPRODUCT(PriorProbability,DrillPayoff) |
| 6 | =SUMPRODUCT(PriorProbability,SellPayoff) |

**图 12.1 用贝叶斯决策规则解决高富布鲁克公司第一个问题的 Excel 模板。其中单元格 F5 和 F6 中的期望收益的比较可以发现钻探石油备择方案应该选用,因为它的期望收益最大。**

由于钻探的期望收益 = 100(单元格 F5),与出售这块土地的较小的收益 = 90(单元格 F6)相比较,这个准则建议进行钻探。

同其他的方法一样,这个准则不能保证所选择的方案在实际情况发生时会成为最佳方案。然而,它提供了下面所描述的另一个保证:

> 一般说来,贝叶斯决策规则提供了比其他准则更大的长期收益。

特定备择方案的期望收益可以被描述为在相同的情况下重复足够多的次数所出现的平均收益。因此,从平均的角度来说,重复使用贝叶斯决策规则进行决策会比其他准则带来更大的长期收益(假设先验概率是正确的)。

因此,如果高富布鲁克公司拥有许多具有相同损益表的土地,则在所有的土地上钻探石油会带来大约 100(100000 美元)的收益,而不是出售这些土地得到 90(90000 美元)的收益。正如下面的计算所表明,在每四块土地中有一块有石油(就像先验概率所表明的那样)的情况下进行钻探所带来的平均收益:

在一块土地上发现石油:　　收益 = 700

三块土地是干涸的:收益 = 3( −100) = −300

总收益 = 400

$$\text{平均收益} = \frac{400}{4} = 100$$

然而,在"平均规则"下,获得这样一个平均收益要求钻探很多块干涸的土地才能够说明这些土地中有 25% 含有石油。如果没有足够的资金,公司在遇到这样一长串霉运之后仍然能够生存下来是不现实的。

这个准则也受到了一些批评。下面是主要的几点:

1. 在确定先验概率时，仍然有相当大的不确定性，因此将这些数据作为先验概率并不能体现可能出现结果的真实概率（在 12.4 节将讨论如何在这种情况下使用敏感性分析）。
2. 先验概率在相当大的程度上是主观的，然而安全的决策应当是基于客观数据和程序的（12.6 节将描述如何获得新的信息来改进先验概率使它们更加客观）。
3. 对于平均结果，期望（货币上的）收益忽视了可能结果的易变性对决策制定的影响。例如，由于高富布鲁克没有足够的资金承受巨大的损失，出售土地以保证 90（90000 美元）的收益可能比进行钻探以得到 100（100000 美元）的期望收益更可取。当土地是干涸的时候，出售土地可以避免钻探带来的巨大损失的风险（12.9 节将讨论如何用效用来更好地反映收益的价值）。

> 仅考虑期望收益，贝叶斯决策规则没有特别考虑灾难性损失的可能性。

那么为什么这个准则通常被称为贝叶斯决策规则呢？因为这个规则是贝叶斯——一位 18 世纪英格兰大臣，著名的哲学家和数学家——提出的，尽管相同的概念更早以前就已经在经济领域中存在了（确实是这样，许多管理科学技术拥有很古老的根源）。贝叶斯的决策理念今天仍然有相当大的影响，许多管理学家由于深深信奉贝叶斯的哲学甚至将自己称为贝叶斯主义者。

由于这个准则的广泛应用，本章的其余部分将集中在基于这个准则的决策程序上。

**马克斯的反应**

**马克斯**：因此大多数管理科学专家认为这是一个正确的准则？

**杰妮弗**：对于每个人来说，并没有所谓正确的或错误的准则。对于某个人来说合适的准则可能一点儿也不适合别人。它取决于个人决策的性格和态度。它也可能取决于这样一个情况：对备择方案知道多少以及可能自然状态的有意义的先验概率是否能够得到。所有的准则都是这样。

**马克斯**：那么这告诉了我们什么？

**杰妮弗**：现在你就要决定在目前情况下哪一个准则最适合你。

**马克斯**：我对任何一个准则都不是很满意。但好像这个准则广为应用。

**杰妮弗**：是的。

**马克斯**：为什么？

**杰妮弗**：有两个原因。首先，这是一个使用所有可用信息的准则。先验概率可能不像我们期望的那样准确，但它们给了我们每一种可能自然状态的可能性的有价值的粗略信息。许多管理科学专家认为使用这个关键的信息能够作出较好的决策。

**马克斯**：我不同意这个看法。第二个原因是什么？

**杰妮弗**：记得这个准则着眼于如果相同的状况重复多次，那么平均收益是多少吗？我们称之为期望收益。从长期来看连续选择最佳期望收益的备择方案能够使得公司获得最多的收益。选择最有利于长期发展的决策对于管理人员来说是一个理性的决策。

**马克斯**：是的，有点道理。但是在高富布鲁克能够获得长期发展之前，我们需要在短期内生存下来。我们不能承受由于土地干涸而进行钻探所造成的更多的损失。

**杰尼弗**：你说的对。关注短期也是真正重要的。但是刚才我曾经提到过效用这个概念。过一会儿，我会解释效用将如何使我们完全专注于短期运作。

## 问题回顾

1. 乐观准则如何选择备择方案？哪一类人会觉得这个准则有吸引力？

2. 对乐观准则的批评有哪些?
3. 悲观准则如何选择备择方案? 哪一类人会觉得这个准则有吸引力?
4. 对悲观准则的批评有哪些?
5. 最大可能性准则着眼于哪种自然状态?
6. 对最大可能性准则的批评有哪些?
7. 贝叶斯决策规则如何选择备择方案?
8. 备择方案的期望收益如何计算?
9. 对贝叶斯决策规则有哪些批评?

## 12.3 决策树

在表 12.1 中的电子表格提出了一种很有用的采用贝叶斯决策规则进行决策分析的方法。另一种采用此规则的启发性的方法是运用决策树来用图表示和分析这个问题。高富布鲁克公司问题的决策树如图 12.2 所示。从左边开始,向右移动显示了整个事件的渐进过程。首先,需要制定的决策是在这块地上钻井还是出售这块土地。如果决策是进行钻探,下一个事件是了解这块土地是否有石油。最后,来自这些事件的结果得到了收益。

在决策树术语中,交汇点称为节点(Nodes)[或分岔(Fords)],从节点发出的线称为树枝(Branches)。节点有两种类型:

> **决策节点**(Decision Node),用方块表示,表示了在这一点上需要进行决策。事件节点(Event node)[或机会节点(Chance Node)],用圆圈表示,表示了在这一点上会发生随机事件。

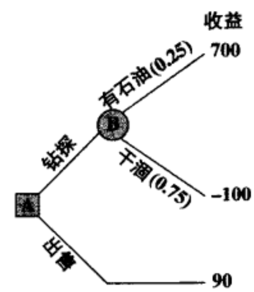



图 12.2 表 12.3 所表示的高富布鲁克公司问题的决策树。

由于需要进行钻探或出售的决策,图 12.2 的节点 A 是一个决策节点。由于一个随机事件——可能自然状态的发生,节点 B 是一个事件节点。两条树枝中的每一条都从一种可能的随机事件中分岔出来。树枝上括号中的数字给出了这个事件发生的概率。

决策树在对问题图像化以及分析问题时很有用。对于如图 12.2 那样的小问题,在分析过程中使用决策树是选择性的。然而,决策树的一个非常好的特点是它也可以用于需要进行一系列决策的更加复杂的问题的分析。在 12.7 和 12.9 节中你将会看到它在高富布鲁克公司决定钻探或卖出前是否进行地震勘测时的应用。

### 决策树的电子表格软件

> **Excel 窍门:**
> TreePlan 加载宏可以通过管理科学课件中简单地打开 TreePlan 文档或者使用课件中的安装文件来安装。

我们将描述和展示如何应用由迈克尔·密德唐(Michael Middleton)教授开发的 Excel 的加载宏 TreePlan 在电子表格上进行构建和分析决策树。在你的管理科学课件中作为共享软件有这个软件的学术版本(如果你在本课程结束后想继续使用这个软件,你要注册并支付软件费用)。与其他 Excel 加载宏一样,这些加载宏需要安装才能在 Excel 中显示出来。

要用 TreePlan 创建一个决策树,选择工具菜单中的"创建新树"。这样就创建了一个默认的如图 12.3 的决策树,它只有一个(方形)节点还有两条树枝。

**TreePlan 窍门：**
要改变节点的类型或者添加删除树枝，点击包含节点的单元格，然后选择工具菜单里的决策树选项。

这恰恰是高富布鲁克公司问题所需要的决策树（这个节点与图 12.2 的节点 A 相一致）。然而，即使还需要其他的节点或树枝，在 TreePlan 中对节点做改变是很容易的。只要简单地选择包含节点的单元格（在图 12.3 中的 B5），再从工具菜单里选择决策树选项。这样就弹出了一个对话框，允许你改变节点的类型（例如从一个决策节点变成事件节点）或者添加更多的树枝。

决策的标签（图 12.3 中的单元格 D2 和 D7）被默认成“Decision 1”和“Decision 2”等等。这些标签可以通过点击他们并且输入新的标签来改变。在图 12.3 中这些标签已经被各自改成“钻探”和“出售”。

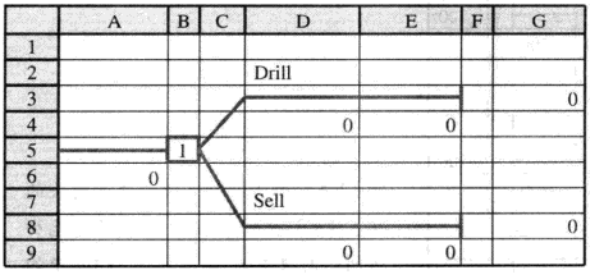



图 12.3 通过选择工具菜单中的决策树选项，由 TreePlan 所创建的默认的决策树。

**TreePlan 窍门：**
要在决策树的末尾创建一个节点，选择包含结束节点的单元格，再选择工具菜单里的决策树选项。这样就可以将结束节点转化为含有所希望的树枝数目（1～5 条）的决策节点或者事件节点。

如果决策是钻探，下一个事件就是了解这块土地是否有石油。要创建一个事件节点，点击在钻探树枝末端包含结束节点的那个单元格，即那条水平线的右端（图 12.3 中的单元格 F3），然后选择工具菜单里的决策树选项。这样就弹出 TreePlan 的如图 12.4 的结束节点对话框。选择左边的“改变为事件节点”选项和右边的“选择两条树枝”选项，然后点击“确定”。这样决策树节点和树枝变化的结果如图 12.5 所示（图中的默认标签“Event 1”和“Event 2”已经被各自替换成“有石油”和“干涸”）。

最初，每一条树枝都会有一个自动产生的默认值为 0 的净现金流量（在树枝标签下面出现的数字：如图 12.5 中的 D6，D14，H4 和 H9）。同样，两条树枝的任何一条都伸向事件节点，显示为默认的 50% 的先验概率（先验概率在相应的标签上面：如表 12.5 中的 H1 和 H6）。因此，下一步你应该点击这些默认值，用正确的数字代替它们，即：

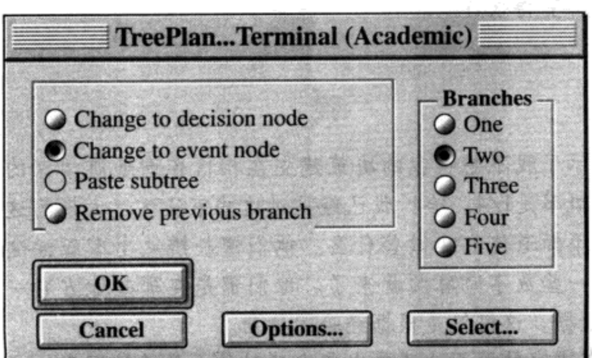



图 12.4 在决策树中用来做各种改变的 TreePlan 的对话框。

D6 = −100(钻探成本为 100000 美元)
D14 = 90(出售的收入为 90000 美元)
H1 = 0.25 (有石油的先验概率为 0.25)
H4 = 800(发现石油的净收入为 800000 美元)
H6 = 0.75(干涸的先验概率为 0.75)
H9 = 0(发现干涸后的净收入为 0)

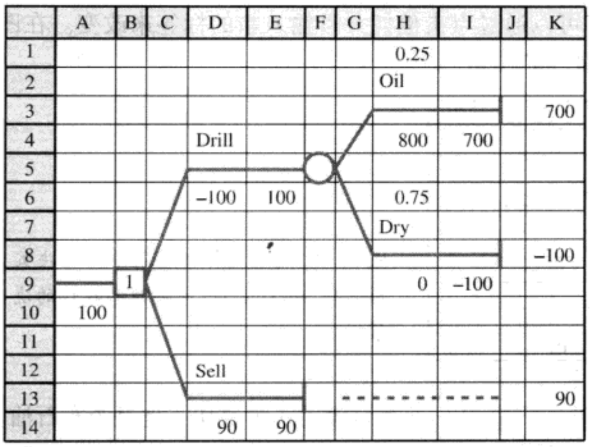



**图 12.5　由 TreePlan 所构建和解决的在表 12.3 中所描述的高富布鲁克公司问题的决策树,其中单元格 B9 中的 1 表示应该选择的最高层树枝(钻探备选方案)。**

> 根据贝叶斯决策规则 TreePlan 总是能够找到现有决策树的最优策略。

在构建决策树的每一个步骤中, TreePlan 使用贝叶斯决策规则自动完成决策树的最佳策略的求解。每个决策节点内的数字表示哪一条树枝应该被选取(假设从那个节点出发的树枝按从上到下的顺序编号)。这样,对于图 12.5 中最终的决策树来说,单元格 B9 中的数字 1 表明第一条树枝(钻探的备择方案)应该被选取。每一个结束节点两边的数字是到达那个节点时的收益。单元格 A10 和 E6 中的数字 100 是所在步骤的期望收益(贝叶斯决策规则的性能的衡量)。

对 TreePlan 的描述看上去有些复杂。但我们认为当你使用计算机时你会发现这个过程非常直观。如果你在 TreePlan 上花费相当多的时间,你还会发现它有许多没有在这个简短的介绍中提及的有用的特点。

**马克斯的反应**

**马克斯:**我喜欢决策树。它把一切都变得很透明。

**杰妮弗:**好的。

**马克斯:**但是仍然有一点困扰着我。

**杰妮弗:**我想我能够猜得到。

**马克斯:**是的。我已经很清楚地表示了我不想将我的决策建立在相信咨询地质学家的数据的基础上。有石油的概率是1/4。哈！我已经见过这些家伙玩过太多的这种把戏。我并不是说他们不知道他们在做些什么。他们擅长辨认出有石油这种有利的迹象。当你问及一些数字时麻烦就来了。他们都是在那些地方看一会儿,然后就冒出了这些数据。这仅仅是根据经验的猜测。

**杰妮弗:**好,让我来看看这一点。在决定钻探石油还是出售土地时什么是关键因素?

**马克斯**:那里有石油的可能性有多大。

**杰妮弗**:难道咨询地质学家不能帮助确定这一点吗?

**马克斯**:当然可以。没有他们提供的信息,我不可能进行钻探。

**杰妮弗**:那么用于决定是否进行钻探的准则难道不应该直接基于这些信息吗?

**马克斯**:当然应该。

**杰妮弗**:但是我不明白你为什么一直拒绝使用咨询地质学家的数据。

**马克斯**:我没有拒绝使用他的信息。这些信息对于我的决策极其重要。我所拒绝的是将四分之一的出油概率作为绝对真理使用。这就是贝叶斯决策规则似乎要作的。我们看到结果是多么的接近,100 和 90。如果他的数据与真实概率有出入,就像它们很有可能的那样,会发生什么情况。这个决策太重要了,不能依靠这些被大大夸大了的数据。

**杰妮弗**:我明白了。他说那里有 1/4 的机会有石油,25% 的概率。你认为这至少是一个合理的约略估计吗?

**马克斯**:是的。我认为那里有石油的概率要小一些。

**杰妮弗**:如果 25% 不是一个准确的数据,你认为可能是多少?

**马克斯**:这谁知道?

**杰妮弗**:我的意思是你已经看了咨询地质学家的报告以及他用来支持他的数据的证据。根据这份报告以及你的经验,你能够给我一个正确数据的可能范围吗? 如果不是 25%,那么会低多少或高多少呢?

**马克斯**:我通常在咨询地质学家所说的基础上加减 10%。因此我估计这个概率是介于 15% 到 35% 之间的某个值。

**杰妮弗**:好的。我们会找到这个值的。我想我知道下一步我们该怎么做了。

**马克斯**:该怎么做?

**杰妮弗**:有一种管理科学技术是用来处理这类情况的,它称为敏感性分析。它能够让我们研究如果咨询地质学家的数据远离正确值时会发生什么情况。

**马克斯**:好极了! 让我们现在就开始吧。

### 问题回顾

1. 什么是决策树?
2. 什么是决策树中的决策节点、事件节点?
3. 代表决策节点和事件节点的符号各是什么?

## 12.4　使用决策树的敏感性分析

敏感性分析(Sensitivity Analysis)在许多管理科学运用中都有应用,用于研究如果数学模型中的一些数据不正确时的影响。在这个案例中,数据模型用图 12.5 中的决策树表示。决策树中最值得怀疑的数据是单元格 H1 和 H6 中的先验概率,所以我们首先要在这些数据上使用敏感性分析。

通过把图 12.6 中的决策树下面的电子表格中的数据和结果相结合来开始这个过程是

很有帮助的。正如图下端的公式所示,给出结果的单元格和决策树中相对应的输出单元格相关联。相似地,决策树中的数据单元格现在也与相应的决策树下面的数据单元格相关。因而,用户可以在下面的数据单元格中实验多个备选的数值,决策树和其下面的结果部分中的结果会同时改变来反映新的数据。

> **Excel 窍门:** 电子表格中的数据和结果相结合使得敏感性分析更加容易,也使得结果更容易解释。

数据和结果相结合提供了多个优点。首先,它保证了数据的每一条都有惟一的位置。每次决策树需要一条数据时,只需要在下面的惟一的数据单元格中做相关的改变。这大大简化了敏感性分析。为了改变一条数据,只需改变一处单元格而不必搜寻整条决策树来查找和改变与那条数据相关的所有改变①。数据和结果相结合的第二个优点是它使得向任何人解释这个模型变得非常容易。你不必了解 TreePlan 这个宏,也不必了解如何阅读决策树来理解模型中使用了什么数据以及建议的行动计划和期望收益是什么。

两个先验概率的和必须等于 1,因此一个概率的上升会自动使得另一个概率以相同的数量下降,反过来也是如此。这在图 12.6 中的决策树中被单元格 H6 中的一个公式所执行——干涸的概率 = H6 = 1 - 有石油的概率(E22)。马克斯已经得出结论:在这块土地上有石油的真实概率在 15% 到 35% 的某个位置。换句话说,有石油的真实先验概率在 0.15 到 0.35 之间。因此相应的土地干涸的概率在 0.85 到 0.65 之间。

我们可以简单地尝试不同的有石油的先验概率值来开始我们的敏感性分析。如图 12.7 所示,一次是先验概率的下限(0.15),另一次是上限(0.35)。当有石油的先验概率只有 0.15 时,由于一个大的收入差额决策转为出售土地(期望收益为 90,钻探仅为 20)。然而,当这个概率为 0.35 时,决策以一个大的收入差额确定为钻探(期望收益 =180,出售土地仅为 90)。因此,决策对于有石油的先验概率非常敏感。这个敏感性分析表明,如果可能的话,很有必要再多进行一些工作来找出有石油的真实概率是多少。

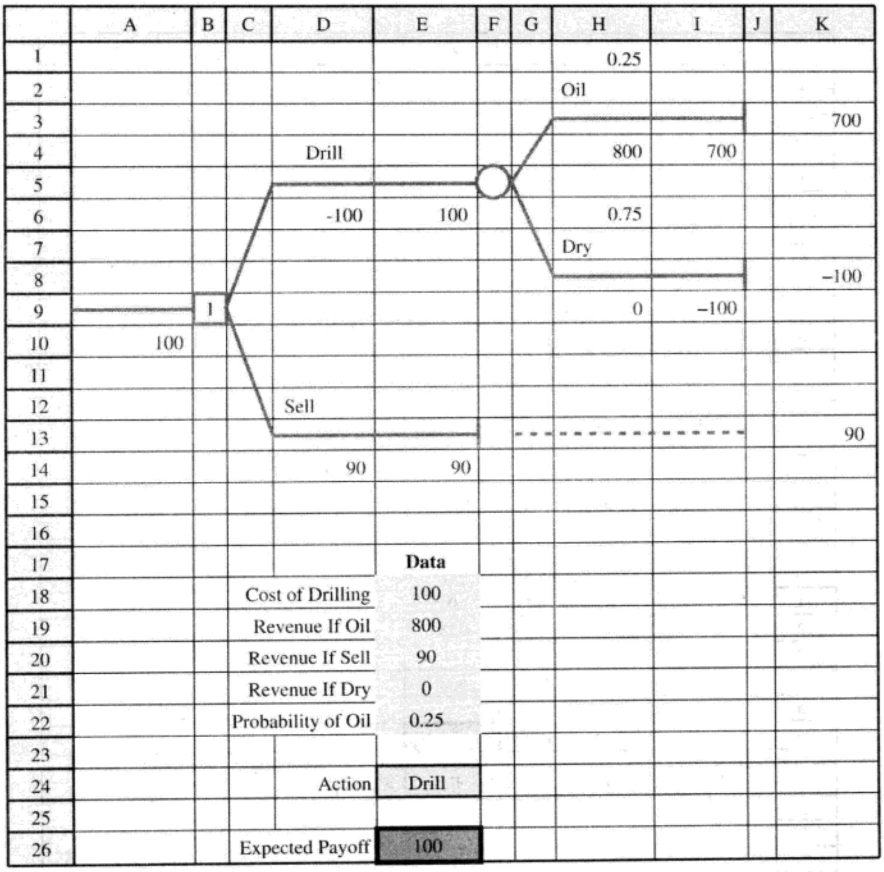
## 用数据表系统地进行敏感性分析

> 战略区域图显示选定的输出单元格的结果,它们对应于数据单元格中的各个尝试数值。

为了找出所建议的行动变化的路线,我们应该继续随机选择新的有石油的先验概率的尝试值。然而,一个较好的方法是系统地考虑数值的变化范围。Excel 的一个显著特点,所谓的战略区域表,被设计用来执行这一类分析。战略区域表用来表示特定的输出单元格的结果,它们对应于数据单元格中的各个尝试数值。战略区域表工作的方式和线性规划表一样,线性规划表是在第 5 章中用来为线性规划问题做敏感性分析的。惟一的不同是战略区域表没有利用规划求解工具再解决每个数据单元格中的各个尝试数值问题(规划求解工具在决策分析问题中不是必需的)。

为了使用战略区域表,首先要在电子表格中创建一张表,标题如图 12.8 中的第 I、J 和 K 列所示。在表中的第一列(I19:I29),列出了数据单元格的各个尝试数值(有石油的先验概率),除了空余的第一行。下一列的标题详细说明了哪一个输出单元格被估计。对于每一

① 在这个很简单的决策树中,这个优点并不是很明显,因为每条数据在决策树中都被使用了一次。然而,在后面的章节里,当地震勘探的可能性被考虑时,决策树中的一些数据会被反复多次地使用,这时这个优点就变得很明显了。




| | D |
|---|---|
| 4 | Drill |
| 5 | |
| 6 | =-CostOfDrilling |

| | D |
|---|---|
| 12 | Sell |
| 13 | |
| 14 | =RevenueIfSell |

| | D | E |
|---|---|---|
| 24 | Action | =IF(B9=1,"Drill","Sell") |
| 25 | | |
| 26 | Expected Payoff | =A10 |

| | H |
|---|---|
| 1 | =ProbabilityOfOil |
| 2 | Oil |
| 3 | |
| 4 | =RevenueIfOil |
| 5 | |
| 6 | =1- ProbabilityOfOil |
| 7 | Dry |
| 8 | |
| 9 | =RevenueIfDry |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| Action | E24 |
| CostOfDrilling | E18 |
| ExpectedPayoff | E26 |
| ProbabilityOfOil | E22 |
| RevenueIfDry | E21 |
| RevenueIfOil | E19 |
| RevenueIfSell | E20 |

**图** 12.6　准备进行高富布鲁克公司问题的敏感性分析,数据和结果已经合并于决策树下面的电子表格中。

列,使用数据表(单元格 J18:K18)的第一行,输入公式使之与相关的输出单元格相关联。这样,目标单元格就是行动(E24)和期望收益(E26),所以单元格 J18:K18 中的公式如图 12.8 下面的电子表格所示。

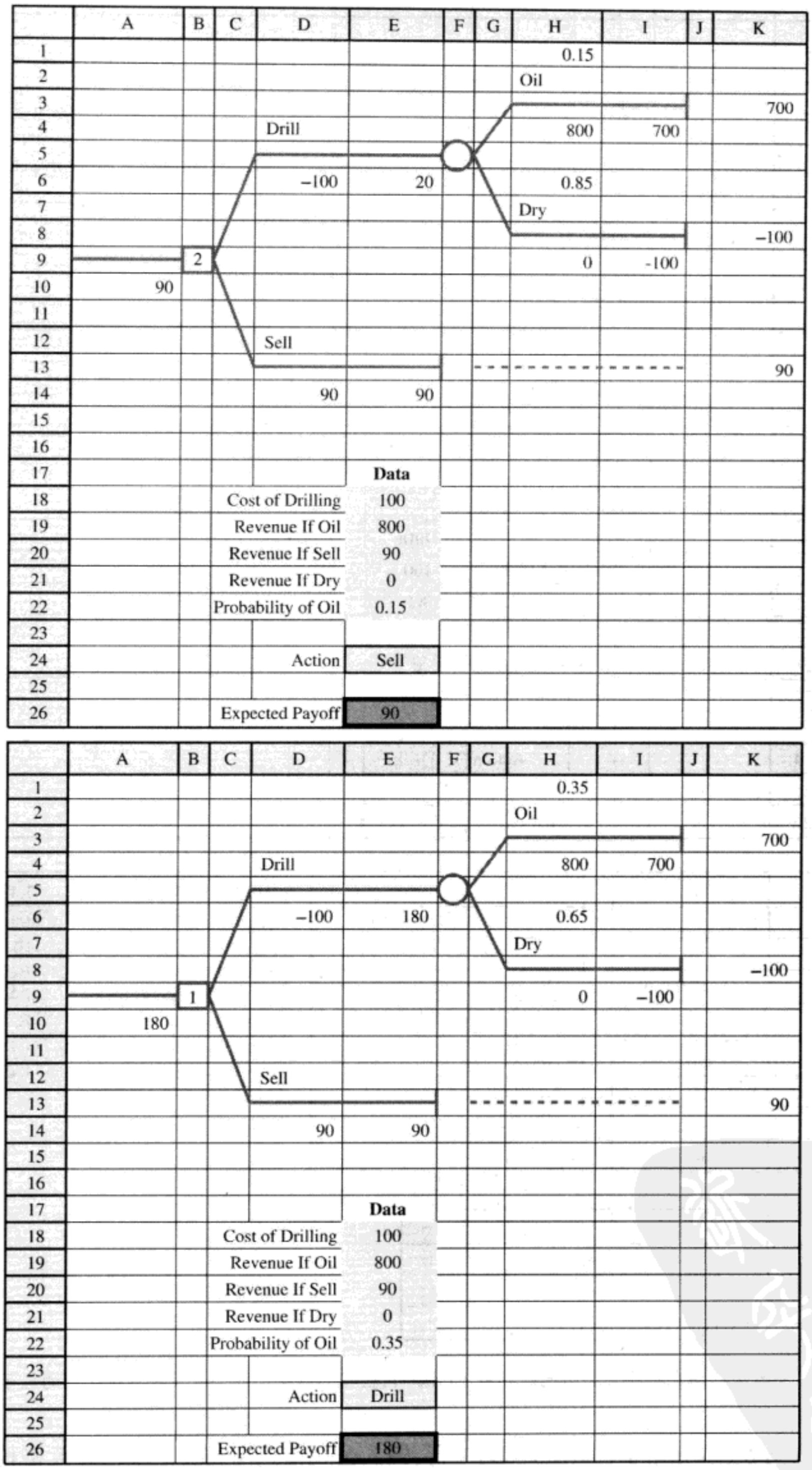
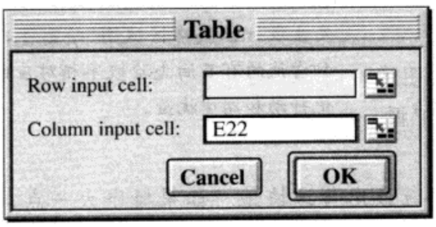



**图 12.7** 通过尝试备选的有石油先验概率(0.15~0.35)进行高富布鲁克公司问题的敏感性分析。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | | | | | | | | | Probability | | Expected | | |
| 17 | | | | | Data | | | | of Oil | Action | Payoff | | |
| 18 | | | | Cost of Drilling | 100 | | | | | Drill | 100 | | |
| 19 | | | | Revenue If Oil | 800 | | | | 0.15 | | | | |
| 20 | | | | Revenue If Sell | 90 | | | | 0.17 | | | | |
| 21 | | | | Revenue If Dry | 0 | | | | 0.19 | | | | |
| 22 | | | | Probability of Oil | 0.25 | | | | 0.21 | | | | |
| 23 | | | | | | | | | 0.23 | | | | |
| 24 | | | | Action | Drill | | | | 0.25 | | | | |
| 25 | | | | | | | | | 0.27 | | | | |
| 26 | | | | Expected Payoff | 100 | | | | 0.29 | | | | |
| 27 | | | | | | | | | 0.31 | | | | |
| 28 | | | | | | | | | 0.33 | | | | |
| 29 | | | | | | | | | 0.35 | | | | |

Select these cells (I18:K29), before choosing Table from the Data menu.




| | J | K |
|---|---|---|
| 16 | | Expected |
| 17 | Action | Payoff |
| 18 | =Action | =ExpectedPayoff |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| Action | E24 |
| ExpectedPayoff | E26 |

**图** 12.8　扩展图 12.6 这个电子表格来准备生成一张数据表,其中在表对话框里选择 E22 作为列输入单元格,表明这是一个数据单元格,可以在数据表中的第一列中改变它。

下一步,选择整个数据表(I18:K29),然后从数据菜单中选择数据表选项。在数据表对话框中(如图 12.8 中的左下表所示)显示了列输入单元格(E22),它与表中第一列变化的数据单元格相对应。在行输入单元格中没有任何输入值,因为这个案例中没有使用行来列出数据的尝试值。

> 使用代数的方法可以找到先验概率的确切值,当先验概率大于这个值时决策就会从一个备择方案转向另一个。

点击确定,就会生成一个如图 12.9 的战略区域表。对于每一个在战略区域表第一列中的数据单元格的尝试值,都有相对应的输出单元格数值被计算得出,并且显示在战略区域表的另一列中(战略区域表第一列的输入值来自电子表格的初始结果)。

图 12.9 说明了最优行动过程从出售土地转向钻探石油的条件是有石油的先验概率为 0.23 和 0.25 之间的某个值。用代数方法可以用来找出这个先验概率的确切值,如下所示:

设 $p$ = 有石油的先验概率。对于钻探石油的备择方案:

$$\begin{aligned}\text{期望收益} &= p(700) + (1-p)(-100)\\ &= 700p - 100 + 100p\\ &= 800p - 100\end{aligned}$$

设期望收益 =90(卖出土地的收益)

$$800p-100=90$$
$$800p=190$$
$$p=\frac{190}{800}=0.2375$$

**结论:**当 $p<0.2375$ 时应当出售土地

当 $p>0.2375$ 时应当进行钻探

对于有不止两种可能的自然状态的问题,最直接的方法是每次只进行与前面相同的两个状况的敏感性分析。这也会涉及察看在其余状况的先验概率不变的前提下,当一种状况的先验概率上升另一种状况的先验概率以相同的数量下降时会发生什么情况。这个过程可以在其他的两种状况组合中进行重复使用。

| | I | J | K |
|---|---|---|---|
| 16 | Probability | | Expected |
| 17 | of Oil | Action | Payoff |
| 18 | | Drill | 100 |
| 19 | 0.15 | Sell | 90 |
| 20 | 0.17 | Sell | 90 |
| 21 | 0.19 | Sell | 90 |
| 22 | 0.21 | Sell | 90 |
| 23 | 0.23 | Sell | 90 |
| 24 | 0.25 | Drill | 100 |
| 25 | 0.27 | Drill | 116 |
| 26 | 0.29 | Drill | 132 |
| 27 | 0.31 | Drill | 148 |
| 28 | 0.33 | Drill | 164 |
| 29 | 0.35 | Drill | 180 |

**图 12.9** 在表 12.8 的准备后,点击确定生成一张战略区域图,给出了与各种尝试的有石油先验概率相对应的最优行动和期望收益。

**马克斯的反应**

**马克斯:**战略区域表显示了一个相当清晰的图像。我想我已经对这个问题有了更好的把握。

**杰妮弗:**很好。

**马克斯:**当有石油的概率低于 23.75% 时,我应该出售这块地。如果概率大一点,我就该进行钻探。对吗?

**杰妮弗:**完全正确。

**马克斯:**那它完全受到它的约束。

**杰妮弗:**是的。

**马克斯:**它证实了我所一直怀疑的。这是一个很好的决策依据,它完全取决于选择适当的有石油的概率。我希望除了咨询地质学家的数据外我能够得到更多的信息。

**杰妮弗:**前面你谈到过花 3 万美元进行细致的地震勘探的可能性。

**马克斯:**是的,我可能会那样做。但是 3 万美元! 我仍然不能肯定这是否值得。

**杰妮弗:**我有一个解决这个问题的很快速的方法。这个方法称为全情报价值(Expected Value of Perfect Information, EVIP)。全情报价值是指如果地震勘探能够很肯定地告诉你那里是否有石油的话,你所得到的期望收益的增加量。

**马克斯:**但是地震勘探不能肯定地告诉你。

**杰妮弗:**是的,我知道。找出那里是否确实有石油就是我们所说的全情报。因此,你得到的确实信息所带来的期望收益的增加值就是全情报价值。这个信息要好于实际进行地震勘探所提供的信息。

**马克斯:**没错。

**杰妮弗:**好,假设我们发现全情报价值低于 3 万美元。由于全情报比我们进行地震勘探得到的信息要好,这明确地告诉我们做地震勘探不值得。

**马克斯:**我懂了。但是如果全情报价值高于 3 万美元呢?

**杰妮弗:**这时你就无法知道是否值得做地震勘探,除非你进行进一步的分析。这个分析将会花费一些时间,但是它能够很快速算出全情报价值。简单地检查一下全情

报价值是否低于 3 万美元是很值得的，这将会节省大量的工作。

**马克斯**：好，那我们开始吧。

## 问题回顾

1. 为什么使用贝叶斯决策规则进行敏感性分析会有一定帮助？
2. 当准备进行敏感性分析时，将包含决策树的电子表格中的数据和结果相结合的优点有哪些？
3. 当被用来进行敏感性分析时，数据表中显示了哪些内容？
4. 关于决策如何取决于有石油的先验概率的高富布鲁克公司问题得出了什么结论？

## 12.5　检查是否需要获得更多的信息

先验概率为自然状态的真实概率提供了某种程度的不精确估计。对于马克斯来说花一些钱进行地震勘探以获得更好的估计是否值得呢？解答这个问题的最快的方法是假设用进行实际勘探相同数量的钱来找出真实的自然状态（“全情报”），然后决定是否值得为这些信息花费金钱。如果不值得获取全情报，显然花钱找出更多关于某种自然状态可能性的信息就不值得。

进行这种分析的关键数量为：

EP（无更多信息）= 以原始的先验概率用贝叶斯决策规则得到的期望收益
= 100（正如图 12.6 所给出的那样）

EP（拥有全情报）= 如果知道真实的自然状态进行决策得到的期望收益

EVPI = 全情报价值

$C$ = 获取更多信息的成本
= 30（进行地震勘探的成本，单位：千美元）

全情报价值计算为：

$$\text{EVPI} = \text{EP(拥有全情报)} - \text{EP(无更多信息)}$$

在计算出 EP（拥有全情报）和 EVPI 后，最后一步是比较 EVPI 和 $C$：

如果 $C > \text{EVPI}$，不值得获取更多的信息。

如果 $C \leqslant \text{VPI}$，值得获取更多的信息。

为了计算 EP（拥有全情报），我们假设在了解到真实的自然状态后再进行决策。给定了真实的自然状态，我们会自动地选择具有最大收益的备择方案。这样，如果有石油我们就进行钻探，否则如果没有石油我们则会出售土地。图 12.10 找出了在两种可能的自然状态下的最大的收益（C7：D7）。如果那里有石油，我们就会钻探并获得了最大收益 700。如果那里没有石油，我们就会出售土地获得最大收益 90。先验概率仍然提供了每一种自然状态真实发生情况的概率。因此，EP（拥有全情报）就是每种自然状态最大收益的加权平均，即各个状态最大收益乘以与其相对应的各自然状态的先验概率。这个计算过程在图 12.10 中的电子表格里的单元格 D11 中被执行，公式是：

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Expected Payoff with Perfect Information** | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | **Payoff Table** | **State of Nature** | | |
| 4 | | Alternative | Oil | Dry | |
| 5 | | Drill | 700 | -100 | |
| 6 | | Sell | 90 | 90 | |
| 7 | | Maximum Payoff | 700 | 90 | |
| 8 | | | | | |
| 9 | | Prior Probability | 0.25 | 0.75 | |
| 10 | | | | | |
| 11 | | | EP (with perfect info) | 242.5 | |

| | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 7 | Maximum Payoff | =MAX(OilPayoff) | =MAX(DryPayoff) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| DryPayoff | D5:D6 |
| MaximumPayoff | C7:D7 |
| OilPayoff | C5:C6 |
| PriorProbability | C9:D9 |

| | C | D |
|---|---|---|
| 11 | EP (with perfect info) | =SUMPRODUCT(PriorProbability,MaximumPayoff) |

**图 12.10** 计算全情报下期望收益。D11 等于先验概率(C9:D9)和最大化收益(C7:D7)的 SUMPRODUCT 函数值。

$$\begin{aligned} \text{EP(拥有全情报)} &= \text{SUMPRODUCT(先验概率,最大收益)} \\ &= (0.25)(700) + (0.75)(90) \\ &= 242.5 \end{aligned}$$

> 以一个事件节点来开始一个决策树,其树枝为各种自然状态,相当于在真实自然状态的全情报下进行。

TreePlan 也可用图 12.11 所示的形式构建、求解决策树来计算 EP(拥有全情报)。这里的技巧是以一个事件节点来开始一个决策树,其树枝为各种自然状态(有石油或干涸)。由于每一条树枝后是决策节点,决策就在关于真实自然状态的全情报下进行。因此,TreePlan 中单元格 A11 给出的 242.5 的期望收益就是全情报下的期望收益。

由于 EP(拥有全情报) = 242.5,我们现在可以计算全情报价值:

$$\begin{aligned} \text{EVPI} &= \text{EP(拥有全情报)} - \text{EP(没有更多信息)} \\ &= 242.5 - 100 \\ &= 142.5 \end{aligned}$$

**结论:**由于 142.5 > 30,故 EVPI > $C$。因此,或许值得进行地震勘探。

**马克斯的反应**

**马克斯:**于是你告诉我如果地震勘探可以明确表明那里是否有石油的话,进行这样的勘探可以使我的平均收益增加大约 142500 美元。

**杰妮弗:**是的。

**马克斯:**减去 3 万美元的勘探费用,我还可以得到 112500 美元。

**杰妮弗:**没错。但请记住 112500 美元是一个平均收益。这仅仅是如果你对这块相似的

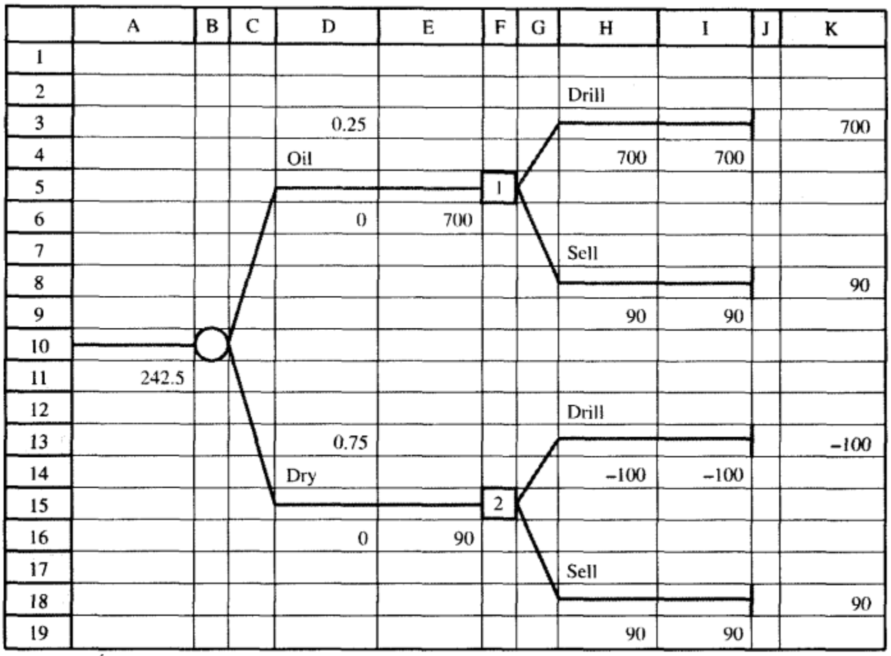



**图12.11**　通过从一个涉及自然状态的事件节点开始，TreePlan使用这个决策树获得高富布鲁克公司第一个问题在全情报下的期望收益。

土地上进行地震勘探所能得到的粗略的平均收益。对于这块土地的收益却没有任何保证。但它的确表明我们需要获得更多的信息。

**马克斯：**好。但是地震勘探并不那么令人如意。事实上，它们并不完全可靠。

**杰妮弗：**请说得详细些。它们有多大的可靠度？

**马克斯：**这取决于地震探测回波。如果地震探测回波好，则有石油的可能性大。如果不好，就很有可能没有石油。但是你无法确定。

**杰妮弗：**好。假设那里有石油。你得到好的地震探测回波的次数是多少？

**马克斯：**噢，略多于一半。

**杰妮弗：**你能给我一个百分比吗？

**马克斯：**我无法给你确切的数据。大约是60%。

**杰妮弗：**很好。现在假设这块土地是干涸的。你仍然得到好的地震探测回波的次数是多少？

**马克斯：**很多！地震勘探告诉我那里有石油而实际上什么也没有。我已经为此损失了很多钱。这就是我为什么不愿意花30000美元的原因。

**杰妮弗：**当然。因此在接近一半的时候它告诉你应该钻探，而实际上你不应该进行钻探？

**马克斯：**不，并没有那么严重。但经常如此。

**杰妮弗：**你能给我一个百分比吗？

**马克斯：**我不喜欢给出这些数据。我不像那些咨询地质学家那样擅长于此。

**杰妮弗：**我明白。但是大概的数据可以起到帮助作用。

**马克斯**:好吧,大约20%。

**杰妮弗**:好,谢谢。我想现在我们可以为是否值得做地震勘探的决策进行一些分析了。

**马克斯**:你将如何进行分析?

**杰妮弗**:我很快就会详细介绍这个过程。这是一个通常的做法。我们将在地震探测回波出现好的情况下,计算找出有石油的概率到底是多少,然后在地震回波不好的情况下再计算这个概率。

**马克斯**:你真的可以做吗?

**杰妮弗**:是的。贝叶斯定理可以使我们完成这项工作。

**马克斯**:嗯,又是那个贝叶斯?

**杰妮弗**:是的。

**马克斯**:相当聪明的家伙。

**杰妮弗**:的确很聪明。我们将用他的定理结合地震勘探得到的每一种结果来改进咨询地质学家对有石油的概率的估计。

**马克斯**:很好。

**杰妮弗**:我们将咨询地质学家提供的数据称为先验概率,因此它们是在得到更多的信息之前获得的。经过改进的数据称为后验概率(Posterior Probabilities)。

**马克斯**:好的。

**杰妮弗**:如果我们进行地震勘探,在减去3万美元的费用后,我们用后验概率来计算平均收益。如果这个收益大于不进行地震勘探的收益,我们就应当做地震勘探。反之就不要做。

**马克斯**:有点意思。

**杰妮弗**:我们可以开始了吗?

**马克斯**:可以。

### 问题回顾

1. 一种自然状态的全情报表示什么意思?
2. 在拥有全情报时如何从损益表中计算得到期望收益?
3. 如何构建决策树并求解拥有全情报时的期望收益?
4. 计算全情报价值的公式是什么?
5. 如果获得更多的信息的成本高于全情报价值,结论会是什么?
6. 如果获得更多的信息的成本低于全情报价值,结论会是什么?
7. 在高富布鲁克公司的问题中出现了以上的哪种情况?

## 12.6 使用新的信息更新概率

可能的自然状态的先验概率通常带有相当大的主观性,因此它们只是对真实概率的非常粗略的估计。幸运的是,很多情况下有可能以进一步的测试或勘探(花费一些费用)来改进这些估计。这些经过改进的估计称为后验概率(Posterior Probabilities)。

在高富布鲁克公司情况中,改进估计可通过花费3万美元进行细致的地质勘探实现。

勘探的可能结果总结如下。

**地震勘探的可能结果**

FSS：好的地震勘探回波；很有可能有石油。

USS：地震勘探回波不好；很可能没有石油。

使用任何一种结果来计算有石油（或干涸）的后验概率，估计在每一种自然状态下出现地震勘探结果的概率是必需的。在上一节对话快要结束的时候，杰妮弗从马克斯处得到了这些估计值，如表 12.7 所示（马克斯实际上仅仅估计了出现好的地震探测回波的概率，通过用 1 减去这个概率就可以得到出现不好的地震探测回波的概率）。表中使用的表示这些估计概率的符号是：

$P$（勘探结果|自然状态）＝在给定自然状态下出现特定勘探结果的概率。

这种概率形式称为条件概率（Conditional Probability），因为它有给定的自然状态的限制。

**表 12.7　对于高富布鲁克公司的问题，在给定自然状态下地震勘探可能发生的结果的概率**

| 自然状态 | $P$（勘探结果\|自然状态） | |
|---|---|---|
| | 好（FSS） | 不好（USS） |
| 有石油 | $P$（FSS\|有石油）＝0.6 | $P$（USS\|有石油）＝0.4 |
| 干涸 | $P$（FSS\|干涸）＝0.2 | $P$（USS\|干涸）＝0.8 |

回想先验概率，它们是：

$$P(\text{有石油})=0.25$$
$$P(\text{干涸})=0.75$$

下一步是使用这两个概率以及表 12.7 所示的概率得到一个组合概率，称为联合概率（Joint Probability）。任何一种自然状态和地震勘探结果的组合都会得到一个有如下公式计算得到的联合概率：

$$P(\text{自然状态并且勘探结果})=P(\text{自然状态})P(\text{勘探结果}|\text{自然状态})$$

例如有石油并且出现好的地震勘探结果（FSS）的概率是：

$$\begin{aligned}P(\text{有石油并且 FSS})&=P(\text{有石油})P(\text{FSS}|\text{有石油})\\&=0.25(0.6)\\&=0.15\end{aligned}$$

> 在概率树图中第三列里的每一个联合概率是前两列里相应概率的乘积。

所有这些联合概率的计算都显示在如图 12.12 所示的概率树图（Probability Tree Diagram）的第三列中。所有可能出现的情况写在了树枝的下方，概率写在了树枝的上方。第一列给出了先验概率，表 12.7 中的概率写在了第二列中。第一列和第二列的概率相乘得到第三列所示相应的联合概率。

在找到了特定的自然状态和地震勘探结果组合的每一个联合概率后，下一步是用这些概率找出在没有确定自然状态发生的情况下特定的地震勘探结果出现的概率。由于在任何自然状态下任何地震勘探的结果都会发生，特定的勘探结果出现的概

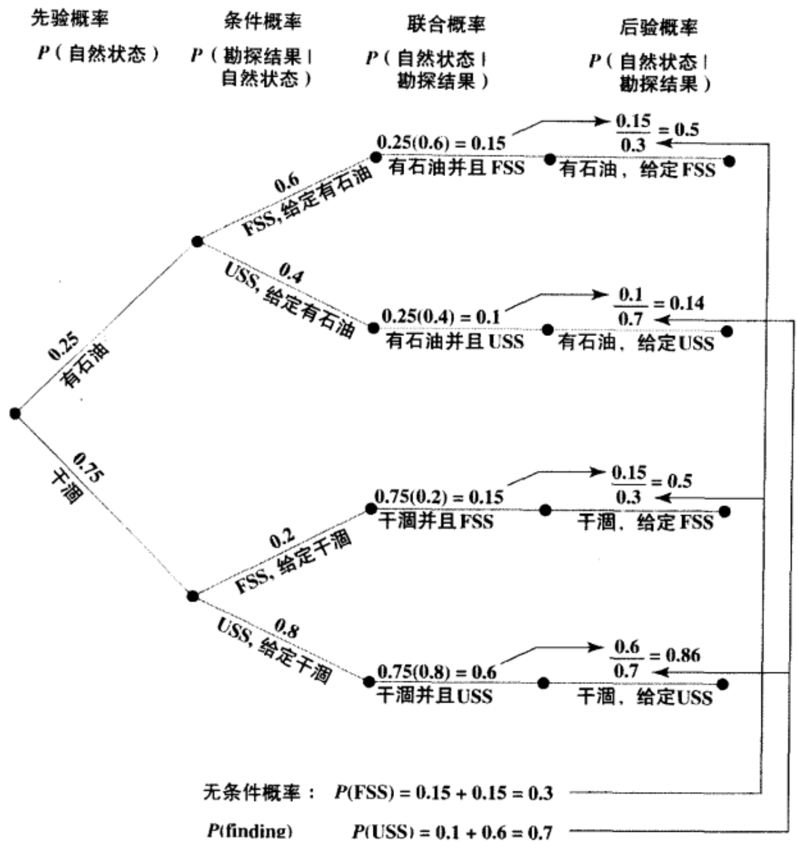



图 12.12 高富布鲁克公司问题的概率树图，显示了在给定了地震勘探结果的情况下，用于计算每一种自然状况的所有后验概率。

率计算公式是

$$P(\text{勘探结果}) = P(\text{有石油并且勘探结果}) + P(\text{干涸并且勘探结果})$$

例如，出现好的勘探结果（FSS）的概率是：

> 勘探结果的概率是概率树图中第三列里的相关联合概率的和。

$$P(\text{FSS}) = P(\text{有石油并且 FSS}) + P(\text{干涸并且 FSS})$$
$$= 0.15 + 0.15 = 0.3$$

这里等式右边的两个联合概率可在概率树图第三列的第一和第三条树枝上找到。P（FSS）和 P（USS）的计算显示在图的底部（它们被称为无条件概率，以区别第二列所示的在给定自然状态下的条件概率）。

最后，我们就可以计算在给定特定的勘探结果后出现特定自然状态发生的后验概率。联系第三列的联合概率和图底部的无条件概率的公式如下所示：

$$P(\text{自然状态} \mid \text{勘探结果}) = \frac{P(\text{自然状态并且勘探结果})}{P(\text{勘探结果})}$$

例如，在地震勘探结果是好的（FSS）情况下，实际自然状态是有石油的后验概率是：

$$P(\text{有石油} \mid \text{FSS}) = \frac{P(\text{有石油并且 FSS})}{P(\text{FSS})} = \frac{0.15}{0.3} = 0.5$$

勘探结果的概率是概率树图中第三列里的相关联合概率的和。

概率树图的第四列显示了所有后验概率的计算。箭头显示的分子来自于第三列相应的联合概率,分母来自于图底部相应的无条件概率。

使用前面给出的联合概率和无条件概率的公式,每一个后验概率可以直接从先验概率(第一列)和条件概率(第二列)中计算得到,如下所示:

$$P(\text{自然状态}|\text{勘探结果})=\frac{P(\text{自然状态})P(\text{勘探结果}|\text{自然状态})}{P(\text{有石油})P(\text{勘探结果}|\text{有石油})+P(\text{干涸})P(\text{勘探结果}|\text{干涸})}$$

例如,在给定出现好的地震勘探结果(FSS)的情况下,有石油的后验概率是:

$$\begin{aligned}P(\text{有石油}|\text{FSS})&=\frac{P(\text{有石油})P(\text{FSS}|\text{有石油})}{P(\text{有石油})P(\text{FSS}|\text{有石油})+P(\text{干涸})P(\text{FSS}|\text{干涸})}\\&=\frac{0.25(0.6)}{0.25(0.6)+0.75(0.2)}\\&=0.5\end{aligned}$$

这个用于计算后验概率的公式称为贝叶斯定理(Bayes' Theorem),以此来纪念其发现者雷弗兰・贝叶斯(Reverend Bayes)。聪明的贝叶斯发现,任何决策分析问题的后验概率都可以通过这种方法得到,不管它有多少种自然状态。公式的分母包含了所有这些自然状态。注意概率树图也是应用了贝叶斯定理,只不过是用简单一些的形式而不是一个很长的公式罢了。

表 12.8 对图 12.12 的后验概率进行了总结。

**表 12.8　对于高富布鲁克公司的问题,在给定地震勘探结果的情况下各自然状态的后验概率。**

| 勘探结果 | P(自然状态\|勘探结果) | |
|---|---|---|
| | 有石油 | 干　涸 |
| 好(FSS) | P(有石油\|FSS) = 1/2 | P(干涸\|FSS) = 1/2 |
| 不好(USS) | P(有石油\|USS) = 1/7 | P(干涸\|USS) = 6/7 |

在你学会了计算后验概率的方法后,我们建议你使用计算机来进行这些冗长的计算。在管理科学课件中的本章 Excel 文件中,我们提供了一个 Excel 模板(标记为后验概率)来完成这项任务。图 10.20 显示了将这个模板应用于高富布鲁克公司的问题的情况。你所要做的一切就是将图 10.19 前面两列的先验概率和条件概率输入到模板的上半部分。后验概率就会立即显示在下半部分中(E 列到 H 列单元格中的公式与图的底部 D 列中的类似)。

**马克斯的反应**

**马克斯:**这说明即使地震勘探的结果不错,我也只有一半的机会可以发现石油。

**杰妮弗:**是的。假设你从咨询地质学家给出的 1/4 的机会出发,这是正确的。

**马克斯:**难怪在过去我得到好的地震勘探结果后进行钻探给了我这么多的失望。我原以为这些勘探会可靠的多。现在我更不愿意花 30000 美元进行这项勘探。

**杰妮弗:**但是有 1/2 的概率有石油。这已相当不错了。

**马克斯:**是的。但是我很可能花费 30000 美元换来一个糟糕的勘探结果。

**杰妮弗:**我的计算表明这有 70% 的可能性。

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Template for Posterior Probabilities** | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | **Data:** | | | | *P*(Finding \| State) | | |
| 4 | | State of | Prior | | | Finding | | |
| 5 | | Nature | Probability | FSS | USS | | | |
| 6 | | Oil | 0.25 | 0.6 | 0.4 | | | |
| 7 | | Dry | 0.75 | 0.2 | 0.8 | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |
| 12 | | **Posterior** | | | | *P*(State \| Finding) | | |
| 13 | | **Probabilities:** | | | | State of Nature | | |
| 14 | | Finding | *P*(Finding) | Oil | Dry | | | |
| 15 | | FSS | 0.3 | 0.5 | 0.5 | | | |
| 16 | | USS | 0.7 | 0.14286 | 0.85714 | | | |
| 17 | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | |

| | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 12 | **Posterior** | | *P*(State \| Finding) |
| 13 | **Probabilities:** | | State of Nature |
| 14 | Finding | *P*(Finding) | =B6 |
| 15 | =D5 | =SUMPRODUCT(C6:C10,D6:D10) | =C6*D6/SUMPRODUCT(C6:C10,D6:D10) |
| 16 | =E5 | =SUMPRODUCT(C6:C10,E6:E10) | =C6*E6/SUMPRODUCT(C6:C10,E6:E10) |
| 17 | =F5 | =SUMPRODUCT(C6:C10,F6:F10) | =C6*F6/SUMPRODUCT(C6:C10,F6:F10) |
| 18 | =G5 | =SUMPRODUCT(C6:C10,G6:G10) | =C6*G6/SUMPRODUCT(C6:C10,G6:G10) |
| 19 | =H5 | =SUMPRODUCT(C6:C10,H6:H10) | =C6*H6/SUMPRODUCT(C6:C10,H6:H10) |

**图 12.13** 管理科学课件中的后验概率模板可以用来高效地计算后验概率，这里展示的是高富布鲁克公司问题。

**马克斯：**明白我的意思了吗？

**杰妮弗：**但即使是糟糕的勘探结果也会告诉你许多。如果有石油的概率是 1/7。这可能导致不进行钻探。

**马克斯：**是的，在这种情况下我不会花钱进行钻探。

**杰妮弗：**因此地震勘探确实降低了有石油的概率的猜测性，无论是 1/2 的概率还是 1/7 的概率都要比咨询地质学家提供的粗略的 1/4 的概率更科学。

**马克斯：**是的，我想这是对的。我确实想对咨询地质学家提供的数据进行改进。好像你建议我们进行地震勘探。

**杰妮弗：**实际上我也不是十分肯定。我们还需要做更多的分析。然后我想我们就会拥有所有需要的信息来充满自信地决策了。我先前说过的我们要找到如果进行地震勘探平均收益是多少，然后再将这个平均收益和不进行地震勘探的平均收

益相比较，记得吗？

**马克斯：**是的，我记得。但是我还是不明白我们该怎么做。

**杰妮弗：**我们所要做的是画出决策树，表示出是否进行地震勘探的决策和进行钻探还是出售土地的决策。然后我们在决策树上计算出这些决策的平均收益。

**马克斯：**好的。我们就开始吧，我想很快就作出决策。

## 问题回顾

1. 什么是自然状态的后验概率？
2. 高富布鲁克公司进行地震勘探的可能结果是什么？
3. 为了计算后验概率，除了先验概率外还需要估计什么概率？
4. 概率树图讨论了哪五种概率？
5. 计算 $P$(自然状态并且勘探结果)的公式是什么？
6. 计算 $P$(勘探结果)的公式是什么？
7. 用 $P$(自然状态并且勘探结果)以及 $P$(勘探结果)计算后验概率 $P$(自然状态|勘探结果)的公式是什么？
8. 计算后验概率的著名定理的名称是什么？

# 12.7　用决策树分析系列决策问题

现在我们在决策树的帮助下把注意力转向完整高富布鲁克公司问题。对于这个完整问题，需要做两个系列决策。第一个，是否应该进行地震勘探？第二个，在获得了地震勘探的结果后(如果采取的话)，公司应该钻探石油还是出售土地？

正如 12.3 节所描述的，决策树提供了对问题的决策顺序和随机事件的图形表示。那一节中的图 12.2 显示了仅考虑一项决策即进行钻探还是卖出土地时高富布鲁克问题的决策树。图 12.5 显示了用 TreePlan 构建和求解时相同的决策树。

### 构建决策树

现在首先需要进行是否做地震勘探的决策，相同形式的决策树要以图 12.14 的方式进行扩展(未写入数据)。决策树中的每一个方块表示一个决策节点，在这里需要进行决策。每一个圆圈表示一个事件节点，在这里随机事件会发生。

因此，第一个决策(是否应当进行地震勘探)以图 12.14 的决策节点 $a$ 表示，从此节点伸展出的两条树枝对应两个备择方案，节点 $b$ 是一个事件节点，表示地震勘探出现的随机结果。从 $b$ 伸展出的两条树枝代表勘探的两种可能结果。接下来是有两个可能选择的第二个决策(节点 $c$、$d$、$e$)。如果决策时进行钻探，我们将转向另一个机会节点(节点 $f$、$g$、$h$)，这里两条树枝对应两种可能的自然状态。

下一步是如图 12.15 所示在决策树上加上数据。树枝上面或下面不在括号中的数据是在每条树枝上发生的现金流(单位：千美元)。对于从节点 $a$ 到最后树枝的每一条路径，这些所添加的相同数据用来获得树枝右边的黑体字所示的总收益。最后一组数据是随机事件

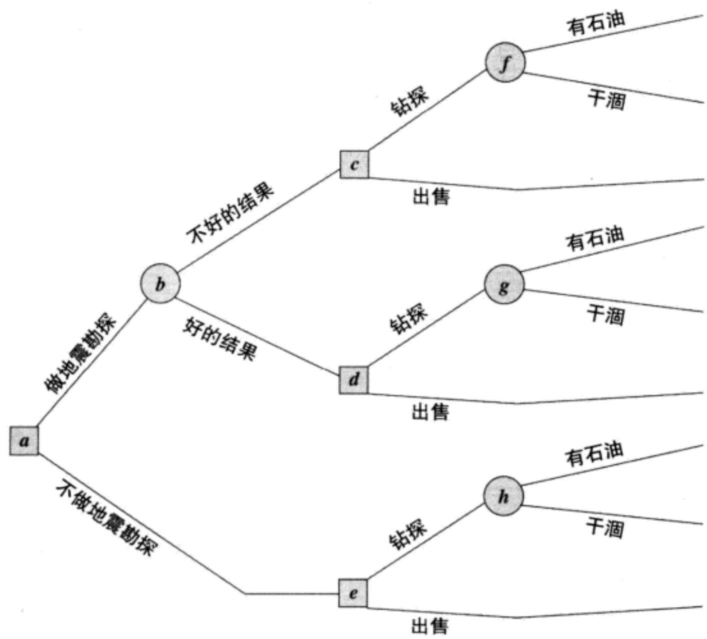



图 12.14 当第一步决定是否进行地震勘探时完整高富布鲁克公司问题的决策树（未写入数据）。

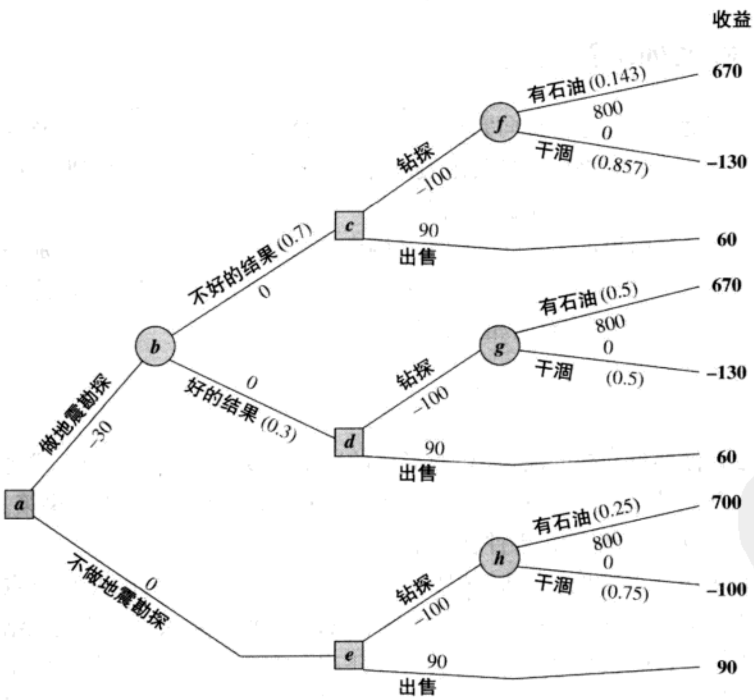



图 12.15 图 12.14 中加上随机事件的概率和收益后的决策树。

的概率。特别地，由于从事件节点伸出的每一条树枝代表了可能的随机事件，在这个节点上发生的事件的概率写在了树枝上的括号中。在这里，从事件节点 $h$ 开始，由于没有用地震勘探来获取更多的信息，其概率为自然状态的先验概率。然而，事件节点 $f$ 和 $g$ 来自于进行地震勘探的决策（然后进行钻探）。因此在给出地震勘探的结果的基础上，这些事件节点给出

的概率是所表示的自然状态的后验概率，可以从表 12.8 或者表 12.13 的单元格 D15：E16 中看到。最后，我们看到从事件节点 $b$ 伸展出的两条树枝。树枝上的数据是地震勘探结果的概率，如图 12.12 中概率树图下方或图 12.13 的单元格 C15：C16 所示的好的（FSS）或不好的（USS）结果。

## 进行分析

在构建了决策树并添入了数据后，现在我们就可以用下面的步骤对问题进行分析了。

1. 从决策树的右边开始，每次向左移动一列。对于每一列，根据节点是事件节点还是决策节点进行步骤 2 或步骤 3 的工作。
2. 对于每一个事件节点，将每一条树枝的期望收益（在树枝的右边用黑体字显示）和其概率相乘后再相加得到节点的期望收益。用黑体字在事件节点的右边记下这个期望收益，也将这个量作为伸向这个节点的树枝的期望收益。

> 每一个事件节点都要计算其期望收益。

3. 对于每一个决策节点，比较其树枝的期望收益，选择期望收益最大的备择方案。对于每一种情况，在决策树上记录这个选择。

要开始这个过程，首先要考虑最右端的节点，也就是事件节点 $f$、$g$、$h$。应用步骤 2，计算其期望收益为：

对于节点 $f$　$\text{EP}=\frac{1}{7}(670)+\frac{6}{7}(-130)=-15.7$

对于节点 $g$　$\text{EP}=\frac{1}{2}(670)+\frac{1}{2}(-130)=270$

对于节点 $h$　$\text{EP}=\frac{1}{4}(700)+\frac{3}{4}(-100)=100$

然后将这些期望收益写在节点的上方，如图 12.16 所示。

接下来，我们向左移一列，这一列包括决策节点 $c$、$d$、$e$。指向决策节点的树枝的期望收益用黑体字记录在事件节点的上方。因此，步骤 3 的应用如下：

节点 $c$：钻探备择方案的 EP = −15.7
　　出售备择方案的 EP = 60
　　60 > −15.7，因此选择出售备择方案。

节点 $d$：钻探备择方案的 EP = 270
　　出售备择方案的 EP = 60
　　270 > 60，因此选择钻探备择方案。

节点 $e$：钻探备择方案的 EP = 100
　　出售备择方案的 EP = 90
　　100 > 90，因此选择钻探备择方案。

每一种选择的备择方案的期望收益用黑体字记录在其决策节点的上方，如图 12.16 所示。被选中的备择方案还可以通过在被拒绝的树枝上画上双划线表明。

接下来，再向左移一列到节点 $b$。由于这是一个事件节点，因此要使用步骤 2。每一条

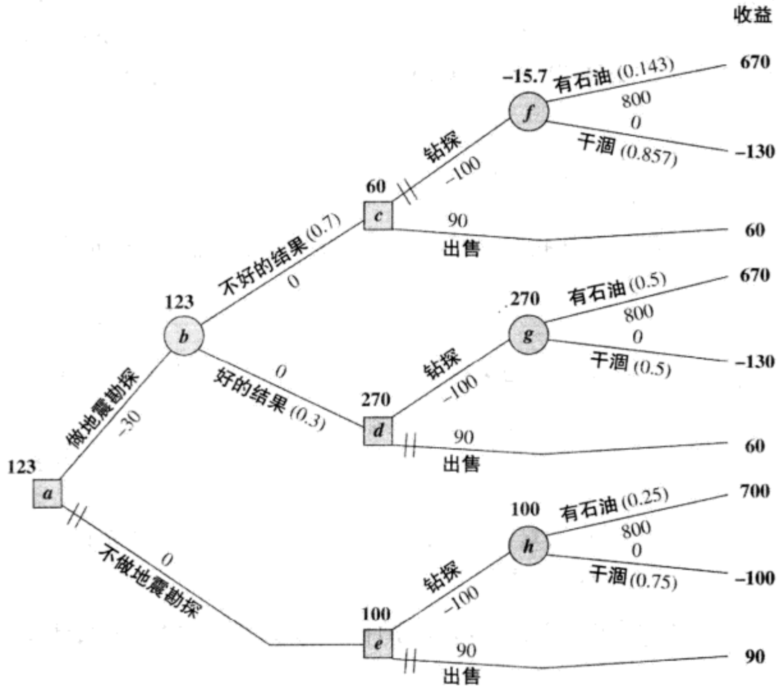



图 12.16 当使用货币收益时记录并分析完整高富布鲁克公司问题的最终决策树。

树枝的期望收益记录在了接下来的决策节点的上方。因此期望收益是：

对于节点 $b$：$EP = 0.7(60) + 0.3(270) = 123$

显示在图 12.16 这个节点的上方。

最后，我们向左移到节点 $a$，一个决策节点。应用步骤 3：

节点 $a$：进行地震勘探的 EP = 123

不进行地震勘探的 EP = 100

123 > 100，选择进行地震勘探。

现在这个期望收益 123 记录在节点的上方，并且将双划线划在被拒绝的树枝上，如图 12.16 所示。

> 通路（无双划线）提供了每个节点上的最佳策略。

应用这个步骤我们从右到左进行了分析。通过用这个方法完成决策树，决策者现在可以从左到右看到事件实际的过程。双划线去掉了不能使人满意的途径。因此，通过给出右边显示的最终结果，贝叶斯决策规则告诉我们只有从左到右的通路能够实现最大可能期望收益。

根据贝叶斯决策规则，图 12.16 中从左到右的通路产生了如下的最佳策略：

**最佳策略**

进行地震勘探。

如果勘探结果不好则出售土地。

如果勘探结果好则钻探石油。

期望收益(包括地震勘探费用)是 123(123000 美元)。

## 使用 TreePlan

通过使用在 12.3 节中描述的步骤，TreePlan 可以用来构建和求解与电子表格相同的决策树。图 12.17 显示了采用 TreePlan 的结果。尽管形式有所不同，但注意，这个决策树与图

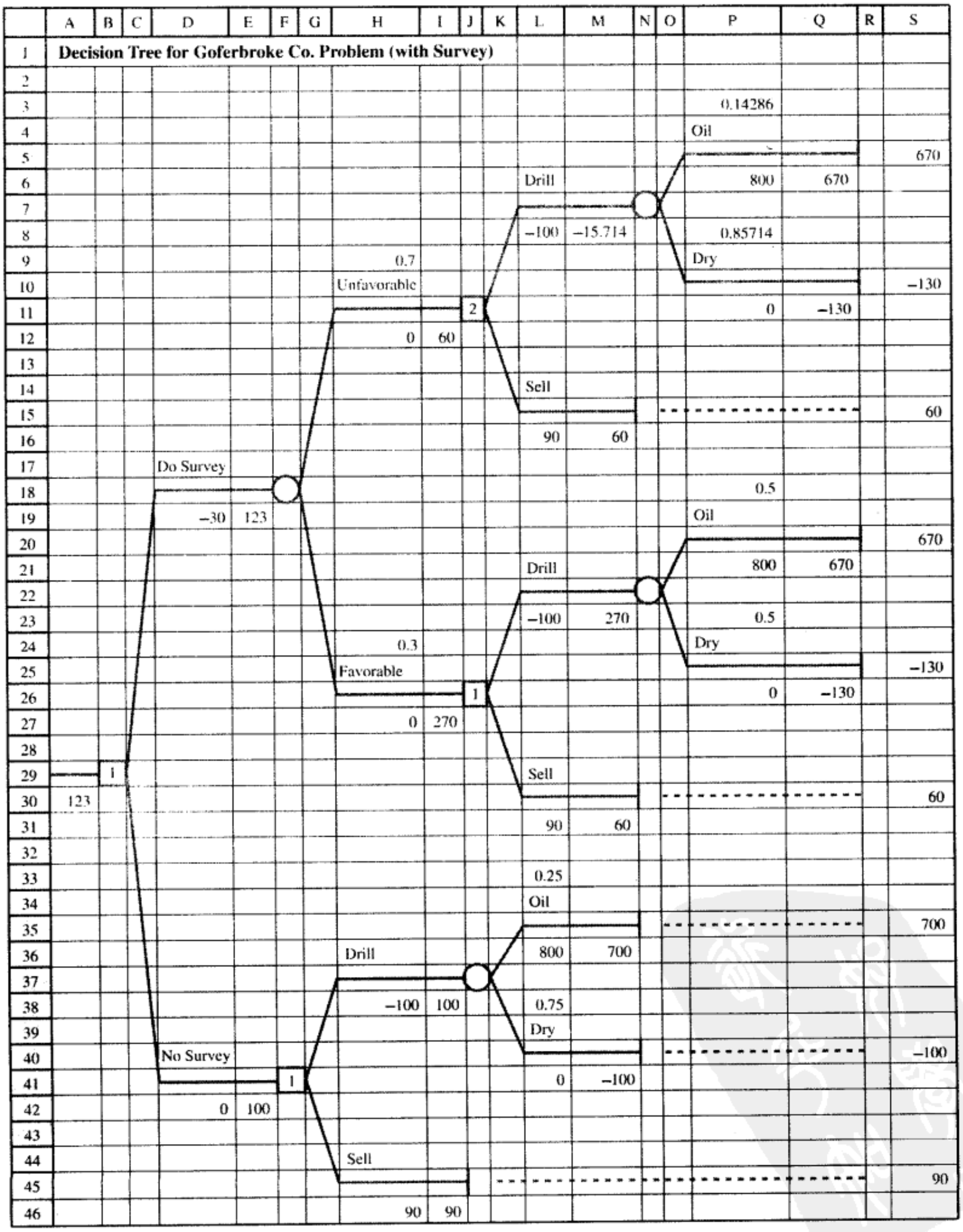



**图 12.17**　用 TreePlan 构建并求解的完整高富布鲁克问题的决策树，包含是否进行地震勘探。

12.16 的决策树是完全等价的。除了在电子表格上直接构建决策树的便利外，TreePlan 还提供了一个重要的优点，就是能够自动地求解决策树。与图 12.16 中依靠手算所不同，TreePlan 在构建决策树的同时就同步地计算出决策树任一步骤的期望收益，显示在每个节点的右下方。TreePlan 不使用双划线，而是在每个决策节点里面生成一个数字，它代表了应该选择哪一条树枝（假设从这个节点出发的树枝按从上到下的顺序连续编号）。

**马克斯的反应**

**马克斯：**我看到了这种决策树给了我一些用于比较备择方案的数据。但是这些数据的可靠性有多高呢？

**杰妮弗：**你必须意识到在决策节点的备择方案的平均收益是以右边的收益和事件节点的概率为基础的。这些概率又基于咨询地质学家的数据和你给我的当你能够发现石油或土地是干涸的情况下你得到好的地震探测回波的可能性数据。

**马克斯：**听起来好像不那么好。你知道我对咨询地质学家的数据的看法。并且我给你的数据是相当粗略的估计。

**杰妮弗：**的确是这样。因此决策树中显示的平均收益仅仅是大概值。这就是敏感性分析可以大显神威的地方，就像前面我们考虑是否要进行地震勘探一样。

**马克斯：**那么我们现在为什么不做敏感性分析呢？

**杰妮弗：**这是个好主意，进行敏感性分析直到你对决策满意为止。

**马克斯：**好的，那我们开始吧。

## 问题回顾

1. 决策树显示了哪些信息？
2. 决策节点会发生什么情况？
3. 事件节点会发生什么情况？
4. 在进行分析前决策树中应该输入哪些数据？
5. 当进行分析时，从决策树的什么地方入手？处理节点时应该向哪个方向移动？
6. 每个事件节点如何计算？
7. 每个决策节点需要做什么比较？

## 12.8 系列决策问题的敏感性分析

12.4 节描述了如何用 TreePlan 创建的决策树（图 12.5 和 12.6）用来进行高富布鲁克问题的敏感性分析，这个问题仅有单一的决策，即决策是钻探石油还是出售土地（在不进行地震勘探的情况下）。焦点是数据的特别重要的部分，即有石油的先验概率，所以分析中涉及的是检查是否应该改变决策，如果先验概率的初始值（0.25）改变为各种其他的不同尝试值。新的尝试值首先在反复试验法中被使用（图 12.7），然后通过构建数据表（表 12.9）系统地研究了这些尝试值。

既然马克斯在决定是钻探石油还是出售土地前要考虑是否要进行地震勘探，那么相应的决策树也由图 12.5 变为图 12.17。系列决策需要获得并应用后验概率，则敏感性分析也变得更加复杂。让我们看看如何做。

## 组织电子表格

> 电子表格中将数据和结果相结合对于敏感性分析是很重要的。

正如我们在 12.4 节中所做的,先以图 12.18 的形式建立一个电子表格来总结所有的数据和结果会显得很有用。因此决策树中的数据单元格与这个决策树右边的数据单元格(单元格 V4:V11)相关联。相似地,决策树右边的总结结果也与决策树中的输出单元格相关联(单元格 B29、F41、J11 和 J26 中的决策节点,还有单元格 A30 中的期望收益)。

在决策树中的概率数据是很复杂的,因为每当任何一个先验概率数据发生变化时,后验概率也将会被更新。幸运的是,计算后验概率的模板(如图 12.13)可以处理这种计算。模板的相关部分(B3:H19)已经被复制到(用编辑菜单中的复制和粘贴命令)图 12.18 的电子表格中(现在出现在 U30:AA46)。模板中的数据来自于数据单元格有石油的先验概率(V9)、有石油状态下 FSS 的概率(V10)和干涸状态下 USS 的概率(V11)中的概率数据,如图 12.18 底部的单元格 V33:X34 中的公式所示。模板会自动地计算每种勘探结果下的概率,以及基于这些数据的后验概率(单元格 V42:X43)。当需要这些数据时,决策树可以调用这些计算出的概率,如图 12.18 的单元格 P3:P11 中的公式所示。

> 组织电子表格实现任一条数据只需在一个位置改变。

尽管将数据和结果相结合需要花费时间和努力,包括必须的交叉关联,但是这一步对于执行敏感性分析是必需的。在决策树中的几个位置往往使用了多条数据。例如,如果高富布鲁克公司发现石油的收益在单元格 P6、P21 和 L36 中表示。进行这条数据的敏感性分析需要改变这个收益时只要改变一个位置(单元格 C6),而不是改变三个单元格(P6、P21 和 L36)。将数据和结果相结合的益处对于概率数据就更加重要了。改变任何一个先验概率可能会导致所有的后验概率的变化。使用包含后验概率的模板,先验概率的变化只需要改变一个单元格位置,然后所有其他的概率就可以被正确地计算和更新。

在图 12.18 中的成本数据、收益数据或者是概率数据发生变化后,电子表格可以很好地总结新的结果,这个结果是立刻通过后验概率模板和决策树计算出的。所以,用反复试验法对可变数据值的实验是执行敏感性分析的一种有效方法。

> **Excel 窍门:**
> SensIt 加载宏既可以独立地使用,也可以和 TreePlan 结合使用。它可以通过简单地打开管理科学课件中的 SensIt 文档安装,也可以使用课件中的安装文件来加载。

但是,还有另外一种更系统地进行敏感性分析的理想的方法。使用图 12.14 所描述的数据表就是这样的一种方法。无论如何,数据表有一定的缺陷,特别当处理大规模问题时。例如,一个主要的缺陷是每一个数据表只考虑了一个或两个数据单元格的变化。

幸运的是,你的管理科学课件中包含了一个名为 SensIt 的 Excel 加载宏,它能克服上述缺陷,提供了一种简单的方法来创建提供信息的敏感性分析图,在图中显示了改变任意几个数据单元格后的效果。SensIt 由迈克尔 · 密德唐教授所开发,并且他还开发了 TreePlan 软件,因此 SensIt 被设计来和 TreePlan 相整合使用(尽管它也可以执行其他类型的敏感性分析,但是那时并不需要使用 TreePlan)。

## 使用 SensIt 创建三种类型的敏感性分析图

安装 SensIt 加载宏后会在 Excel 的工具菜单中增加敏感性分析菜单。这个菜单有一个

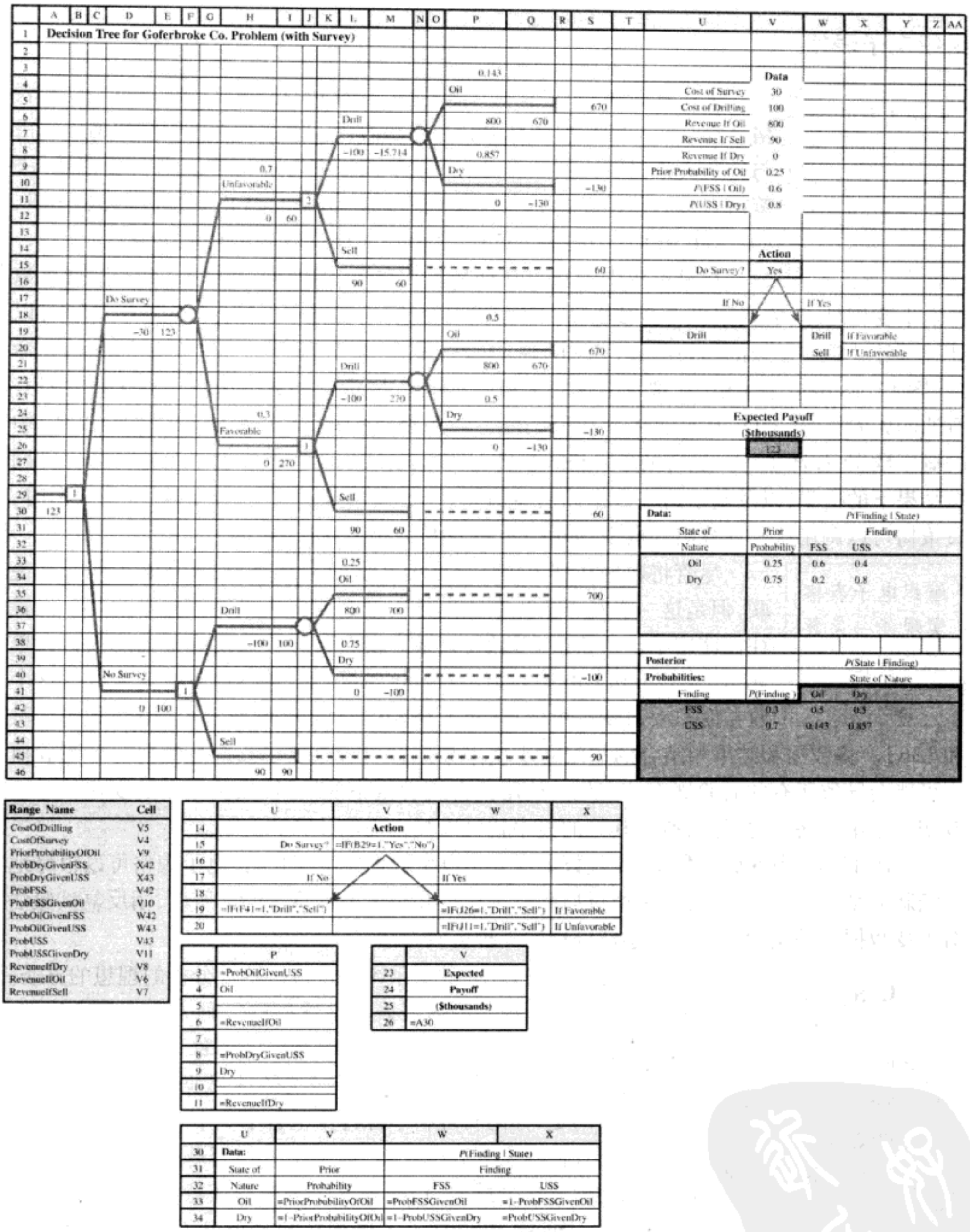



**图 12.18** 完整高富布鲁克公司问题的敏感性分析准备，数据和结果已经在决策树右边的电子表格中相结合。

子菜单，给出了三种不同的敏感性分析图选择：单因素图（Plot）、蛛网图（Spider）和旋风图（Tornado）（后面跟着一个帮助选项）。让我们看看每种类型图是如何用来进行敏感性分析的。

单因素图用来生成一种图形，显示了输出单元格对应于单一数据单元格的不同数值如

何变化。选择这个选项，就会出现如图 12.19 所示的单因素对话框。对话框左边部分用来指定发生变化的数据单元格（单元格 V9 中有石油的先验概率）和输出目标单元格（单元格 V26 中的期望收益）。含有标签的单元格也可以随意地指定标签（单元格 U9 和 V24）。这些标签用来指明所创建图中的坐标轴标签。这个对话框右边则用来指定所考虑的数据单元格（有石油的先验概率）的变化范围。这样，在 0 和 1 之间的所有值（以 0.05 为间隔）都会被使用。点击确定按钮就会生成如图 12.20 所示的图，其中显示了有石油的先验概率和给定概率下使用最佳策略所获得的期望收益之间的关系。

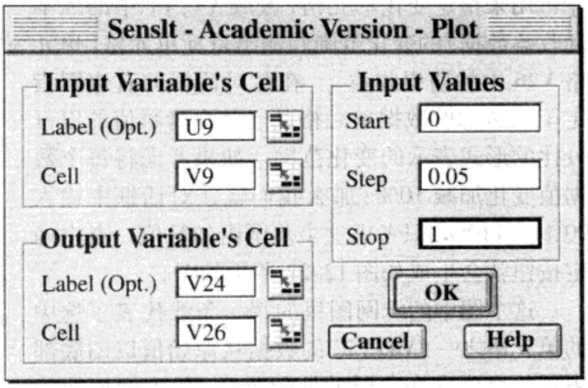



图 12.19　使用 SensIt 的单因素图选项对话框。

这个图表明，当先验概率略大于 0.15 时期望收益开始上升。当先验概率在 0.3 附近时期望收益开始以更快的速度上升。这就暗示了最优策略会随着先验概率的变化而变化。为了证明这一点，图 12.18 所示的电子表格可用来展示当有石油的先验概率在这些值附近缓慢上升时结果会发生怎样的变化。这种试验的方法立即就得出了最优策略是如何依赖这些概率的以下结论。

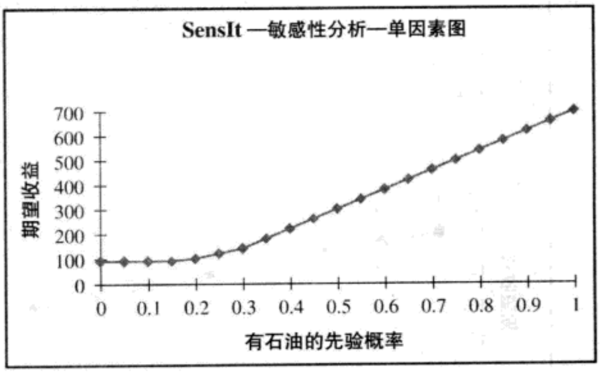



图 12.20　由 SensIt 的单因素图选项所生成的完整高富布鲁克公司问题的单因素敏感性分析图，显示了期望收益取决于有石油的先验概率（使用贝叶斯决策规则）。

**最佳策略**

设　$p$ = 有石油的先验概率

如果 $p \leqslant 0.168$，则出售土地（不进行地震勘探）。

如果 $0.169 \leqslant p \leqslant 0.308$，则进行地震勘探：结果好则钻探，结果不好则出售土地。

如果 $p \geqslant 0.309$，则钻探石油（不进行地震勘探）。

> **SensIt 窍门：**
> 在敏感性分析子菜单中选择蛛网图之前，蛛网图中变化的数据单元格需要放在相邻的单元格中。并且要保证数据单元格中含有初始的案例数据。

这个敏感性分析着重于分析找到石油的真实概率与原始的先验概率 0.25 不同时所产生的影响。类似的分析可以使用图 12.18 中的单元格 V10：V11 里的概率。然而，由于单元格 V4：V8 中一些成本和收入相关的数据带有很大的不确定性，所以我们下一步将对这些数据进行敏感性分析。

假设我们要考察如果单元格 V4：V7 中的一项成本或收益以加减 10% 的方式改变时期望收益会发生怎样的变化。蛛网图（Spider graph）（工具菜单里敏感性分析子菜单下的第二个选项）就是用来进行这类分析的。SensIt 蛛网图对话框（如图 12.21）的

左边用来指定变化单元格(区域 V4:V7 中的成本和收益数据)的变化范围和输出目标单元格(单元格 V26 中的期望收益)。在此对话框的右边则指定了所考虑的数据单元格基于其本身数值的以百分比的形式表示的变化范围。如果考虑将每个数据值变化加减 10%,那么我们就在对话框中输入 90% 和 110%,只考虑这个范围内的数值。点击确定按钮就会生成如图 12.22 所示的图。

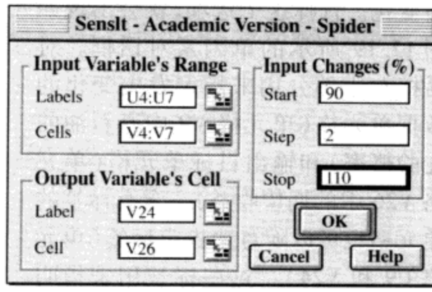



图 12.21 使用 SensIt 中的蛛网图选项弹出的对话框。

这个图中的蛛网图里的每一条线代表了选中的单元格之一(V4:V7)的数据从原始值以图底部表示的百分率变化时的期望收益(代表勘探费用线的菱形隐藏在代表钻探成本线的方块的后面)。有油的收入线是最陡的,这表明期望收益对发现石油时收益的估计值特别敏感,因此所有使估计值更加精确的进一步工作都必须聚焦于此。

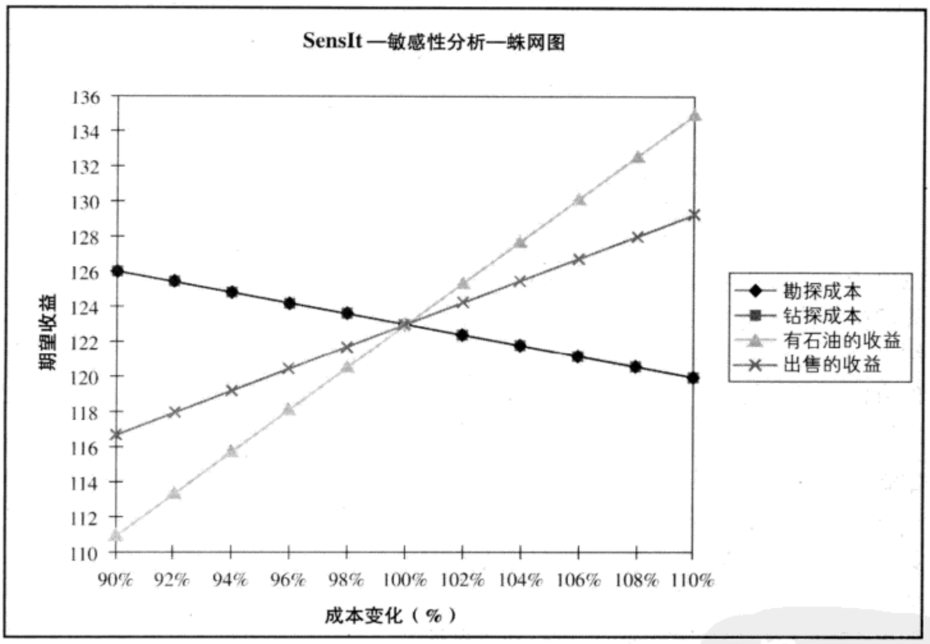



图 12.22 由 SensIt 的蛛网图选项所生成的完整高富布鲁克公司问题的蛛网图,显示了改变一定百分比的成本或收益估计时期望收益如何变化(使用贝叶斯决策规则)。

旋风图允许不同的数据单元格有不同的变化程度。

SensIt 的蛛网图的一个缺陷是它假设每一个数据都以同样的数量发生变化。例如,我们考虑这样的一种情况,成本或收益数据中任一条的变化都可能是上升或是下降 10%。其中的某些数据可能会比其余的数据更不确定(或者更可靠)。旋风图(Tornado Diagram)可以克服这个缺陷。不过,它需要一些原始电子表格(图 12.18)额外的数据。如图 12.23 所示,每一个发生变化的数据单元格变成三列,包括最小值、基数和最大值。勘探成本和如果马克斯出售土地时的收益相对容易预测(所以变化范围也相对较小,分别是 28 ~ 32 和 85 ~

95)，但是钻探成本和如果有石油时的收益更加易变(所以变化范围也较大，分别是 75 ~ 140 和 600 ~ 1000)。

| | U | V | W | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | **Data** | Low | Base | High |
| 4 | Cost of Survey | 30 | 28 | 30 | 32 |
| 5 | Cost of Drilling | 100 | 75 | 100 | 140 |
| 6 | Revenue If Oil | 800 | 600 | 800 | 1000 |
| 7 | Revenue If Sell | 90 | 85 | 90 | 95 |
| 8 | Revenue If Dry | 0 | | | |
| 9 | Prior Probability of Oil | 0.25 | | | |
| 10 | P(FSS I Oil) | 0.6 | | | |
| 11 | P(USS I Dry) | 0.8 | | | |

图 12.23　图 12.18 中的电子表格的扩展，为生成 SensIt 旋风图做准备。

**SensIt 窍门：**
在旋风图中变化的数据单元格应该相邻，并且要给出最小值、基数和最大值三列。在选择敏感性分析子菜单中的旋风图之前，要按这种方式重新组织电子表格。

SensIt 的旋风图对话框(选择工具菜单中敏感性分析子菜单里的第三个选项所弹出的)如图 12.24 所示。它用来指定哪一个是变化数据单元格、哪一个是输出单元格，还指定了数据单元格变化范围(最小值、基数和最大值)的单元格位置。点击确定按钮，就会生成一个如图 12.25 所示的图。图中的每一条横杠表示相应的成本或者收益在横杠两端所标数字之间变化时的期望收益的变化范围。每条横杠的宽度衡量了期望收益对横杠的成本或者收益的敏感性。此图再次说明，有石油时的收益比其他成本或收益会对期望收益引起更大的敏感性。

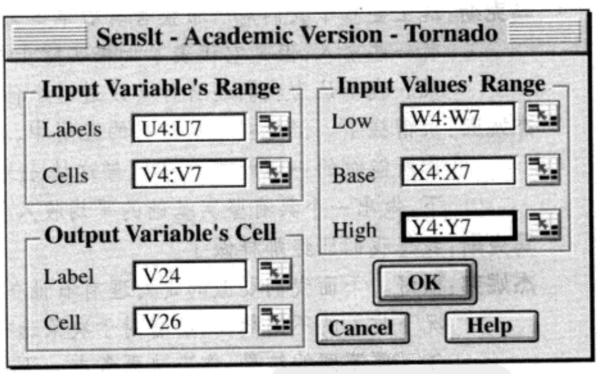



图 12.24　使用 SensIt 中的旋风图选项弹出的对话框。

**马克斯的反应**

**马克斯：** 非常有趣。我特别喜欢我们能够使用敏感性分析电子表格来立即显示当我们改变一些数据时发生的情况。有一点我发现特别令人鼓舞。

**杰妮弗：** 是什么？

**马克斯：** 当我们改变有石油的先验概率时，结果始终相同：进行地震勘探，并在勘探结果好的情况下进行钻探，否则就卖掉这块地。咨询地质学家的数据起的作用大大减小，而我们始终在做着应该做的事。

**杰妮弗：** 是的，这就是关键的发现，不是吗？你对涉及到成本和收入数据的敏感性分析有何看法？

**马克斯：** 这些蛛网图和旋风图非常聪明。然而，它们所提供的信息并没有使我特别惊奇。与其他因素相比，我的收益当然更大程度上取决于如果发现石油我们所能得到的收入。

**杰妮弗：** 但是它告诉我们，更好地控制收益的不确定性尤其重要。

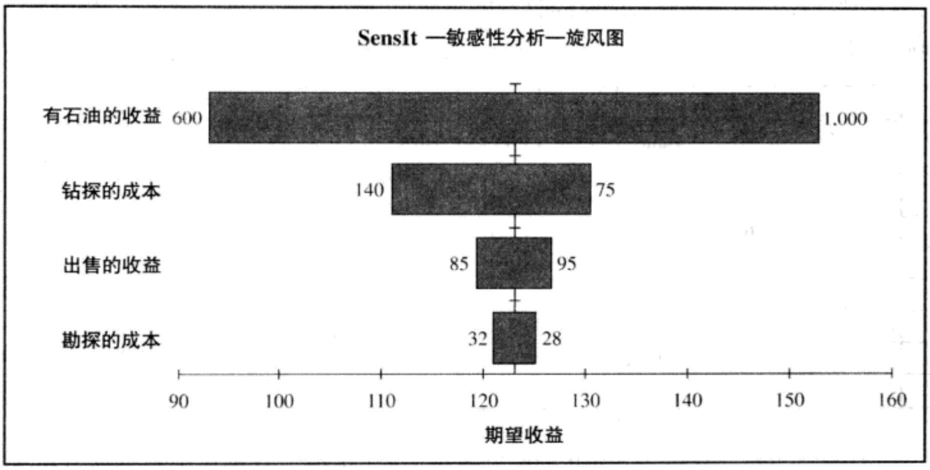



图 12.25　由 SensIt 的旋风图选项所生成的完整高富布鲁克公司问题的旋风图，显示了任何一个成本或收益可能的变化范围内期望收益的变化程度(使用贝叶斯决策规则)。

**马克斯**:是的,我已经意识到了。不幸的是,要控制收入数据的不确定性是非常困难的。地质学告诉我们如果我们在那里有什么东西的话,那一定是大量的石油。但是如果你很幸运找到了石油的话,你也不会确切知道那里有多少石油。当然收入取决于石油量。

**杰妮弗**:那么 800000 美元的收入估计是从哪儿来的呢?

**马克斯**:这主要基于我们对所希望含有石油的地区石油储量的估计。这个估计可能会有一些出入,但是它代表了如果实际上那里有石油,我们所认为的最可能的结果。我不认为我们还有什么改进这个估计的方法。

**杰妮弗**:太糟糕了。但是在决策分析的应用中,数据中带有这种不确定性是很普遍的。你所能做的一切就是假设在与这块土地情况类似,而且石油已经找到的情况下,做出一个具有坚实基础的平均收入估计。

**马克斯**:我想我们已经那样做了。

**杰妮弗**:很好。下面我们要做的是处理有石油的先验概率。试一试在发现了石油的情况下收入的不同数据,看看对于决策选择的回答是否相同。如果我们很快得到了一些不同的结果,你应该再考虑一下收入估计,在你作出决策之前好好考虑这些备择方案。相反,如果结果基本上保持一致,我们就使用在发现石油的情况下收入估计为 800000 美元。

**马克斯**:有道理。

**杰妮弗**:好,在做这项工作时我可以为你节省一些时间。基于我们从决策树和敏感性分析得到的结论,我现在可以告诉你即使我们对发现石油时的收入估计做出大的变化,敏感性分析电子表格也会为我们提供相同的结果。决策树中采用和不采用地震勘探时的平均收益(分别如图 12.17 和图 12.18 中的单元格 E19 和 E42 所示)表明建议的策略绝对不是侥幸。如果有石油时的收入大大低于 800000 美元,问题就会成为是否做地震勘探或立即出售这块土地。然而旋风图告诉我们在有石油时的收入低于估计值 800000 美元达 25% 时,从建议策略得到的期

望收益仍然高于立即出售土地得到的 90000 美元。

**马克斯**:不太可能收入会低于我们的估计。因此将 800000 美元作为我们的估计值我感到满意。

**杰妮弗**:好。这是否意味着你会决策进行地震勘探,然后基于勘探结果决定钻探或出售这块土地?

**马克斯**:不是这样的。还有一件事困扰着我。

**杰妮弗**:是什么?

**马克斯**:假设地震勘探给了我们一个好的地震探测回波,于是我们进行了钻探。如果钻探结果土地是干涸的,我会损失 130000 美元!就像我开始所说的,这会把我们推向破产的边缘,实在令我害怕。

**杰妮弗**:没错。这会有 3/20 的机会发生。但是你有相同的概率会获得好的勘探结果并找到石油。如果这发生了,你会拥有 670000 美元,这将给我们的公司带来一个大发展。大约有 70% 的概率你会得到不好的地震勘探结果,这种情况下你会将其卖掉并得到 60000 美元。这是一个不错的利润。这个方法主要说明了出现各种可能结果的概率,包括得到 670000 美元的概率,为你提供的最佳的赌博。

**马克斯**:是的,这的确像一个好的赌博。我并不在意在有很大的概率获得大得多的收益时承担一个具有小的概率的损失。对于这种生意来说,这很正常。但这也是我的关键之处。目前我比正常情况下拥有较少的资金。因此损失 130000 美元对于现在来说会比正常情况下带来更大的伤害。这个问题的解决途径好像并没有将此考虑在内。

> 当发生令人焦虑的巨大损失时,只考虑平均货币价值并不够理想。

**杰妮弗**:你说的对。它确实没有包括。这个方法提供的是平均货币价值。在处理你这样一个大问题时这并不够。你不想用抛硬币的方式决定你会赢还是损失 130000 美元,是不是?

**马克斯**:当然不想。

**杰妮弗**:那么好,这就是一个提示。就像我们第一次谈论到这个问题时我所说的,我想现在的情况表明,我们不能仅仅用钱的眼光看待可能的结果。幸运的是,决策分析通过介绍效用这个概念为解决这个问题提供了一种方法。

**马克斯**:是的,我记得你提到过效用。那什么是效用呢?

**杰妮弗**:一种结果的效用是用来衡量这种结果对你的真实价值而不是货币价值。因此通过用效用表达收益,决策树分析会得到每一个节点的平均效用来代替平均货币价值。这样决策将给你带来基于最大可能平均效用的选择。换句话说,它们会给你带来平均意义上的最大的真实价值。

**马克斯**:听起来有点道理。但是我还是不太明白什么是效用。

**杰妮弗**:好吧,准备好了,我将介绍一些有关效用的知识。

## 问题回顾

1. 当准备进行敏感性分析时,应该如何组织含有决策树的电子表格?
2. 进行敏感性分析时,如果需要改变某一条数据,应该在电子表格中的几个位置进行修改?
3. 使用数据表进行复杂问题的敏感性分析的缺陷是什么?
4. 当使用 SensIt 中的单因素图时,一次可以改变几个数据单元格?

5. SensIt 中的蛛网图在一次分析中是不是比单因素图考虑了更多的数据单元格?
6. 被旋风图所克服的蛛网图的一个缺陷是什么?

## 12.9 用效用更好地反映收益的价值

在使用贝叶斯决策规则时,我们假设货币形式的期望收益是对采取的行动产生的后果进行度量的适当标准。然而,在许多涉及大量资金的情况下,这个假设是不恰当的。

例如,假设一个人有以下的选择(1)有五五开概率获得 100000 美元;(2)确定获得 40000 美元。尽管五五开获得 100000 美元的期望收益是 50000 美元,许多人还是会选择 40000 美元。如果有投资损失并且导致近乎破产的可能,一个公司不愿意在新产品上投资很多的钱,尽管期望收益非常可观。即使从期望收益的角度看保险是很划不来的投资,人们仍然会购买保险。

这些例子是否使得贝叶斯规则失效了呢? 幸好不是。因为这里有一个将货币价值转化为反映决策者偏好的正确标度的方法。这个标度称为货币效用函数。

### 货币效用函数

图 12.26 显示了典型的货币 $M$ 的效用函数 $U(M)$ [Utility Function $U(M)$ for Money $M$]。直觉解释是,这表明一个拥有这样的效用函数的人得到 30000 美元的价值是 10000 美元的两倍,获得 100000 美元的价值是 30000 美元的 2 倍。这反映了这样一个事实:这个人最高优先级的需求会有最先的 10000 美元满足。随着货币数量的增加,函数的斜率递减,这被称为递减的货币边际效用。这样的人被称为风险回避者(Risk Averse)。

然而,并不是所有的人都有递减的货币边际效用。一些人是风险偏好者(Risk Seekers)而不是风险回避者,他们用一生追求想成为“大赢家”。他们的效用函数的斜率随着货币数

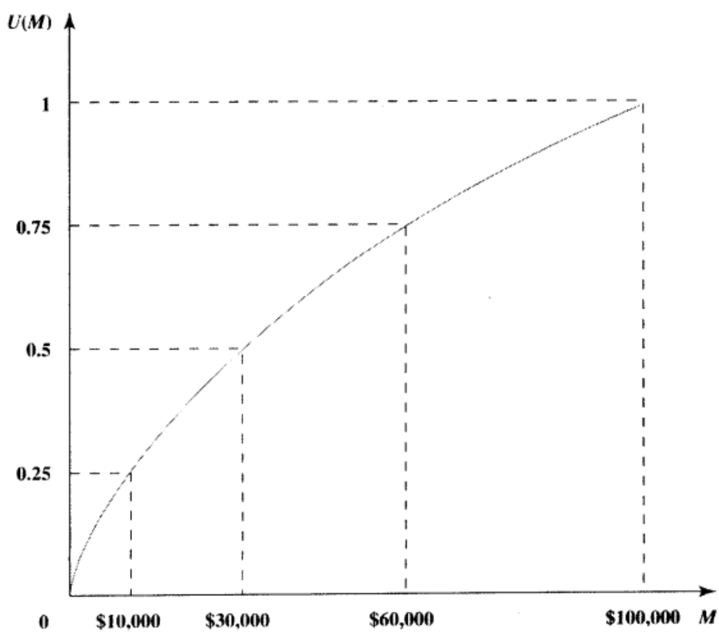



**图 12.26** 典型的货币效用函数,这里 $U(M)$ 是获得 $M$ 数量的货币的效用。

量的增加而增大，因此他们具有递增的货币边际效用。

图 12.27 比较了货币风险回避者和风险偏好者的效用函数的斜率。同时显示了中间类型的风险中性者（Risk-neutral）的效用函数，他们认为钱的价值等同于其货币价值。这些人的货币效用简单地与货币的数量呈直线关系。尽管一些人在涉及到很少量的钱时体现出风险中性，但在涉及到大量的货币时很少表现出真正的风险中性。

还可能找到同时具有这几种风险行为的人。例如，在涉及到少量钱的时候一个人可能基本上是风险中性的，在对待中等数量的钱时是风险偏好的，在对待大量的钱时是风险回避的。另外，一个人对待风险的态度会随着环境的变化随时间而改变。

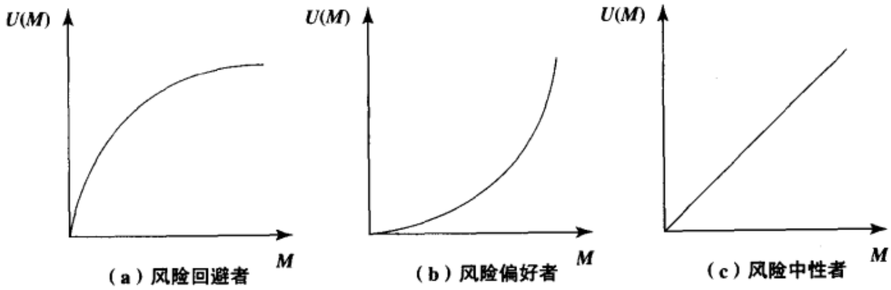



**图 12.27**　(a) 风险回避者、(b) 风险偏好者、(c) 风险中性者货币效用函数图的形状。

在进行管理决策时对待风险的态度上，企业管理人员需要考虑企业的环境并且要使用高层管理人员的集体智慧。

不同的人具有不同的货币效用函数这个事实为解决不确定性的决策提供了一个重要的暗示。

> 当用货币效用函数解决决策分析问题时，这个效用函数必须以符合所涉及的决策者的偏好和价值来构建（决策者可以是个人或集体）。

构建适合决策者的货币效用函数的关键是如下的效用函数的基本属性：

> **基本属性**（Fundamental Property）：在效用理论的假设下，决策者的货币效用函数具有这样的属性：如果两个备择方案具有相同的期望效用，则决策者在这两个备择方案上是无差异的。

为了说明这一点，假设决策者拥有如图 12.26 所示的效用函数。进一步假设决策者有下面的机会：

> **提供的机会**（Offer）：以概率 $p$ 获得 100000 美元（效用 =1）或以概率 $(1-p)$ 什么也得不到（效用 =0）。

于是，将概率作为两个可能的效用（1 和 0）的权重，这个机会的期望效用是：

$$E(\text{效用}) = p + 0(1-p)$$
$$= p$$

> 在所有的这三组案例中，具有如图 12.26 所示货币效用函数的决策者，当他们具有相同的期望效用时，在两个备择方案上是无差异的。

因此对于下面三对备择方案来说，上面的基本属性表明决策者在第一和第二个备择方案上是无差异的。

1. 第一个备择方案：提供的机会 $p=0.25$，因此 $E$(效用) = 0.25
   第二个备择方案：肯定获得 10000 美元，因此效用 = 0.25
2. 第一个备择方案：提供的机会 $p=0.5$，因此 $E$(效用) = 0.5
   第二个备择方案：肯定获得 30000 美元，因此效用 = 0.5

3. 第一个备择方案：提供的机会 $p=0.75$，因此 $E$(效用) $=0.75$
   第二个备择方案：肯定获得 60000 美元，因此效用 $=0.75$

这个例子还展示了构建决策者货币效用函数第一步的一种方法。决策者通过相同的假定机会以概率 $p$ 获得大量的钱(例如 100000 美元)，以概率 $(1-p)$ 什么也得不到。然后对于每一种较少数量的钱(例如 10000 美元、30000 美元和 60000 美元)，决策者要选择一个使得他或她在提供的机会和获得确定数量的钱上是无差异的 $p$ 值。较少数量的钱的效用是用 $p$ 乘以较多数量的钱的效用。当较大数量的钱的效用设定为 1 时，如图 12.26 所示，这方便地使较小数量的钱的效用等于 $p$。图 12.26 中的效用值表示决策者的货币 $M=10000$ 时他选择了 $p=0.25$，当 $M=30000$ 时决策者选择了 $p=0.5$，当 $M=60000$ 时选择了 $p=0.75$(用这种方法构建效用函数是在这节后面所描述的博彩程序的一个例子)。

效用函数的刻度是无关紧要的。换句话说，不管图 12.26 虚线所指示的效用值 $U(M)$ 是 0.25、0.5、0.75、1(如图所示)还是 10000、20000、30000、40000 或其他，这并不重要。重要的是第二、第三、第四个效用值 $U(M)$ 应当分别用 2、3、4 乘以第一个值得到。所有的效用值可以乘以任何正数而不影响哪一个决策备择方案具有最大期望效用。因此除了 $U(0)=0$，效用值 $U(M)$ 可以是一个非零常数表示 $M$ 的价值(对于正的 $M$ 具有正的效用，对于负的 $M$ 具有负的效用)。由于在上一段结尾所描述的原因，将考虑中的最大值 $M$ 对应的 $U(M)$ 设定为 1 是很方便的，但不是必需的。

将一个常数(正的或负的)加到所有的效用上也是可能的，这不会影响哪一个决策备择方案具有最大的期望效用。无论如何，既然自然而然地认为当 $M=0$ 时的效用是零，我们在整个章节里就使用 $U(0)=0$。

现在我们就可以总结效用函数在决策分析中的基本作用了：

> 当决策者的货币效用函数被用来衡量各种可能货币结果的相关价值时，贝叶斯决策规则将货币收益替换为相应的效用。因此最优决策(或系列决策)是使得期望效用最大的决策。

这里将只讨论货币效用函数。然而，我们必须说明当一些或全部的重要决策备择方案的结果实质上不是货币形式时，有时仍然可以构造效用函数(例如医生的治疗决策备择方案的结果涉及到病人以后的健康)。由于它要求对相关的无形结果的满意度进行价值判断，建立效用函数并不简单。然而，在这些情况下，将价值判断引入到决策过程中是很重要的。

## 处理高富布鲁克公司的问题

回想由于高富布鲁克公司没有大量的资金，因此 100000 美元的损失将会是非常严重的。作为公司的所有人，马克斯已经在严重负债经营。最差的情况是进行地震勘探花费 30000 美元，而如果钻探结果是没有石油又会再损失 100000 美元。这个情况不会使公司破产，但是很明显将会使公司在财务上捉襟见肘。

另一方面，找到石油则是令人兴奋的期望，因为获得 700000 美元可以使公司处于一个稳健的财务状况中。

马克斯是这个问题的决策者。因此为了准备使用效用来分析问题，我们必需构建马克斯的货币效用函数 $U(M)$，这里货币量 $M$ 的单位是千美元。

开始时，很自然要将零货币量的效用设置为零，因此 $U(0)=0$。由于我们将 $U(M)$ 的值作为非零值 $M$ 的效用值，我们要依此设置 $M$ 的最小可能值——也就是 $M=-130$(损失 130000 美元)——的效用：

$$U(-130) = -150$$

尽管选择 -150 完全是任意的(除了要选的是负数之外),但这仍是一个很方便的选择,因为当 M 在 0 附近时,它使得 $U(M)$ 近似等于 $M$。这能够让我们较好地看到在 $M$ 的整个范围内效用与货币量的比较。

要决定其他可能货币收益的效用,必须要调查马克斯对风险的态度。特别重要的是他对最糟糕的可能损失(130000 美元)和最好的可能收益(700000 美元)的感受,以及他如何比较这些结果。让我们听听杰妮弗对马克斯这些感受的调查。

## 与马克斯的面谈

**杰妮弗:**现在效用将用来反映这些可能收益的实际价值给你的感受。因此为了得到你的效用,我们需要讨论一下你对这些收益和它们给公司带来的后果的感受。

**马克斯:**好的。

**杰妮弗:**考虑最好和最坏可能情况是很好的入手之处。即考虑获得 700000 美元或损失 130000 美元的可能性。

**马克斯:**这是很大一笔钱。

**杰妮弗:**好,假设你不花钱进行地震勘探就开始钻探石油,并且你发现了石油,你的利润大约是 700000 美元。这会对公司产生什么影响?

**马克斯:**影响很大。这将会带给我所需要的资金,成为业内更主要的竞争者,然后我会致力于发现大油田,那就是我所提到的大发现。

**杰妮弗:**是的,那一直是你的梦想,不是吗?找到你的大发现。

**马克斯:**当然是这样。这就是为什么我要熬过这段艰难日子的原因。虽然当我们找到一些小油田时很令人兴奋,但当我们发现一些地块没有石油时我们也很痛苦。幸运的是我有一些运气,因此维持了下来。但是我并没有满足,除非我获得大发现。

**杰妮弗:**你认为在这次勘探中获得 700000 美元就是你要得到的大发现?

**马克斯:**相当不错的大发现。那就是你能从这个行业中获得的一切。

**杰妮弗:**好的。现在让我们谈谈如果你遭受到最大可能损失带来的后果。假设你花钱进行地震勘探,然后你钻探石油,结果发现那块地没有石油。这样你将会损失 130000 美元。这将会糟糕到什么程度?公司的未来将会面临什么状况呢?

**马克斯:**我可以这样来说明。这将会使公司面临相当困难的财务状况。我们将要花费很大的精力来获得更多的资金。然后我们需要改变我们的工作方式,找一些合伙人进行一些低风险、低产出的钻探。但我想我们能够支撑下来。过去我们已经经历过这种状况好几次了,但我们熬过来了。我们不会有事的。

**杰妮弗:**好像只要你有一个合理的可能会获得很大收益的机会,对在这种情况下遭受的损失就并不会过分担心。

**马克斯:**是这样的。

**杰妮弗:**现在我们来谈谈这些机会。我要做的是假设一个比较简单的情况。假设你没有出售土地的选择,所以下面是你的一些备择方案。一个选择是钻探。如果你发现石油,你可以获得 700000 美元。如果这块地是干涸的,你损失 130000 美元。另一个选择是什么也不做,你没有任何收益或损失。我知道这不是你实际的状况,但我们就这样假设吧。

**马克斯:**我不明白为什么你要谈论这些与我们所面临的不相同的情况。

**杰妮弗:**请相信我,这将能使我确定你的效用。

**马克斯:**好吧。

**杰妮弗:**可以假定如果你有五五开的概率获得700000美元或损失130000美元,你将会钻探。

**马克斯:**当然。

**杰妮弗:**但是如果你只有很小的机会即10%的机会获得700000美元,而有90%的可能性会损失130000美元,可以假设你不会钻探。

**马克斯:**当然也是这样。

**杰妮弗:**好,让我们改进一下这些可能性。假设你有15%的概率获得700000美元。在这种情况下,如果你看看平均收益,将会在盈亏平衡点附近。如果你拥有无限量的钱,而正好处在盈亏平衡点,你会发展并进行钻探。

**马克斯:**我当然不会有无限量的钱!我需要比盈亏平衡点做得更好,来抵消损失130000美元而使公司削弱的风险。

**杰妮弗:**我猜到了你会那样想。让我们进一步改进这些可能性。假设你有25%的概率获得700000美元,75%的概率损失130000美元。你会钻探吗?

**马克斯:**我有点明白这些可能性了。700000美元是130000美元的5倍多,75%只是25%的三倍,因此你一直说的平均收益在这种情况下会相当大。

**杰妮弗:**是的,超过75000美元。

**马克斯:**那很多了。是的,700000美元肯定会使我们公司在未来带来巨大的发展。如果我们损失130000美元也并不意味着我们会重新经历过去那些艰难的日子。但我认为有25%的可能性获得700000美元是值得冒这个风险的。在这个行业里你必须面对这样机会。

> 无差异点就是决策者认为两种假设的备择方案无差异的那一点。

**杰妮弗:**现在我们知道了那个使你再继续勘探或不再继续勘探的决策上无差异的点了,它落在获得700000美元而不是损失130000美元的概率为15%到25%的区间内。让我们在15%到25%的区间内看看能否找到你的无差异点(Point of Indifference)在什么地方。试试20%,在获得700000美元的概率是20%,损失130000美元的概率是80%的情况下你是否会继续进行钻探呢?

**马克斯:**嗯,不是很清楚。这种情况下平均收益会是多少?

**杰妮弗:**36000美元。

**马克斯:**还不错。有1/5的机会得到700000美元,有点诱惑力。但是考虑到所有牵涉的问题,有4/5的概率会损失130000美元,我不知道,这很难抉择。

**杰妮弗:**好,让我们这样做。假设获得700000美元的概率略大于20%,你会钻探吗?

**马克斯:**我想会的。

**杰妮弗:**如果概率略低于20%呢?

**马克斯:**我想我不会去钻探。

**杰妮弗:**好的。你使我相信你的无差异点是20%。这就是我想知道的。

## 寻找 $U(700)$

马克斯实际上已经给了杰妮弗所需的信息来确定 $U(700)$,即马克斯获得700(得到

700000 美元）收益的效用。由于 $U(-130)$ 已经被设为 $U(-130)=-150$，找到 $U(700)$ 的过程总结如下：

决策者（马克斯）有两个选择，$A_1$ 和 $A_2$：

$A_1$：以概率 $p$ 获得 700 的收益。
以概率 $(1-p)$ 获得 $-130$ 的收益。
$A_2$：获得确定收益 0。

决策者面临的问题：哪一个 $p$ 值使得你在这两个选择上表现出无差异？
决策者选择 $p=0.2$。
设 $E(A_1$ 的效用$)=E(A_2$ 的效用$)$
求解这个等式，得到未知的 $U(700)$。
由于 $U(0)=0$，我们有 $E(A_2$ 的效用$)=0$。$A_1$ 的期望效用是：

$$\begin{aligned} E(A_1 \text{ 的效用}) &= pU(700)+(1-p)U(-130) \\ &= 0.2U(700)+0.8(-150) \\ &= 0.2U(700)-120 \end{aligned}$$

因为效用函数的基本属性告诉我们在决策者的无差异点 $p=0.2$ 上，两种选择的期望效用是相同的，于是有：

$$\begin{aligned} 0.2U(700)-120 &= 0 \\ 0.2U(700) &= 120 \\ U(700) &= 600 \end{aligned}$$

## 寻找效用的一般步骤

上面找到 $U(700)$ 的步骤说明关键是要让决策者找到在两个备择方案上的无差异点，这里选择之一（$A_1$）涉及一个博彩问题。下面是博彩程序（Lottery Procedure）的一般形式：

**博彩程序**

1. 我们有三个可能的货币收益——$M_1, M_2, M_3$（$M_1<M_2<M_3$）——我们知道其中两个收益的效用，我们希望找到第三个的收益。
2. 决策者有以下两个假定的备择方案：

   $A_1$：以概率 $p$ 获得收益 $M_3$。
   以概率 $(1-p)$ 获得收益 $M_1$。
   $A_2$：获得确定收益 $M_3$。

3. 决策者面对的问题：哪一个 $p$ 值使得你在这两个选择上无差异？
4. 使用这个 $p$ 值，写下基本属性等式：

$$E(A_1 \text{ 的效用}) = E(A_2 \text{ 的效用})$$

于是

$$pU(M_3)+(1-p)U(M_1)=U(M_2)$$

5. 解这个方程得到未知效用。

在寻找 $U(700)$ 的步骤中，我们以 $M_1=-130$、$M_2=0$、$M_3=700$ 来使用这个博彩程序。在寻找后面两个效用时，我们在第一种情况下使用 $M_3=0$，在第二种情况下使用 $M_1=0$（尽管没有做出要求，为了能够更好地比较其他两个收益，将 0 作为三种收益之一是很普遍的）。我们还要将中间收益 $M_2$ 作为未知效用，尽管任何一个位置（最小、中间、最大）都是允许的。

## 寻找 $U(-100)$

现在我们将一步步地使用博彩程序来寻找高富布鲁克公司另一个可能的收益 -100（损失 100000 美元）的效用。然而，这次我们不需要再去听杰妮弗与马克斯的面谈来确定在这两个假设备择方案上的无差异点了。

我们现在有三种已知效用的收益（-130、0、700），可以选择其中的任意两个。由于 -130 和 0 比 700 更容易地与 -100 进行比较，实际我们选择了 -130 和 0。

1. 三种给出的收益是：

   $M_1=-130$，已知 $U(-130)=-150$
   $M_2=-100$，$U(-100)$ 未知
   $M_3=0$，已知 $U(0)=0$

2. 两个假设选择是：

   $A_1$：以概率 $p$ 获得收益 0。
   以概率 $(1-p)$ 获得收益 -130。
   $A_2$：获得确定收益 -100。

3. 马克斯选择 $p=0.3$ 作为这两个备择方案的无差异点。
4. 基本属性方程是：

$$pU(0)+(1-p)U(-130)=U(-100)$$

   于是：

$$0.3(0)+0.7(-150)=U(-100)$$

5. 结果是 $U(-100)=-105$

## 寻找 $U(90)$

除了 $U(0)=0$，我们已经找到了马克斯对高富布鲁克公司可能负收益（-130 和 -100）以及最大可能正收益（700）的效用。作为我们最后的一项计算，我们要在这个过程中使用 0 和 700 作为已知效用的两个收益，找到相对较小的正收益（90）的效用。

1. 三种给出的收益是：

   $M_1=0$，已知 $U(0)=0$
   $M_2=90$，$U(90)$ 未知
   $M_3=700$，已知 $U(700)=600$

2. 两个假设选择是：

   $A_1$：以概率 $p$ 获得收益 700。
   以概率 $(1-p)$ 获得收益 0。

$A_2$：获得确定收益 90

3. 马克斯选择 $p=0.15$ 作为这两个备择方案的无差异点。
4. 基本属性方程是：

$$pU(700)+(1-p)U(0)=U(90)$$

于是：

$$0.15(600)+0.85(0)=U(90)$$

5. 结果是 $U(90)=90$

## 构造马克斯的货币效用函数

现在我们已经找到了高富布鲁克公司五个有代表性的可能收益（−130、−100、0、90、700）的效用。将这些数据与货币收益 $M$ 描绘在效用 $U(M)$ 图上，然后通过这些点画一条光滑的曲线，如图 12.28 所示。

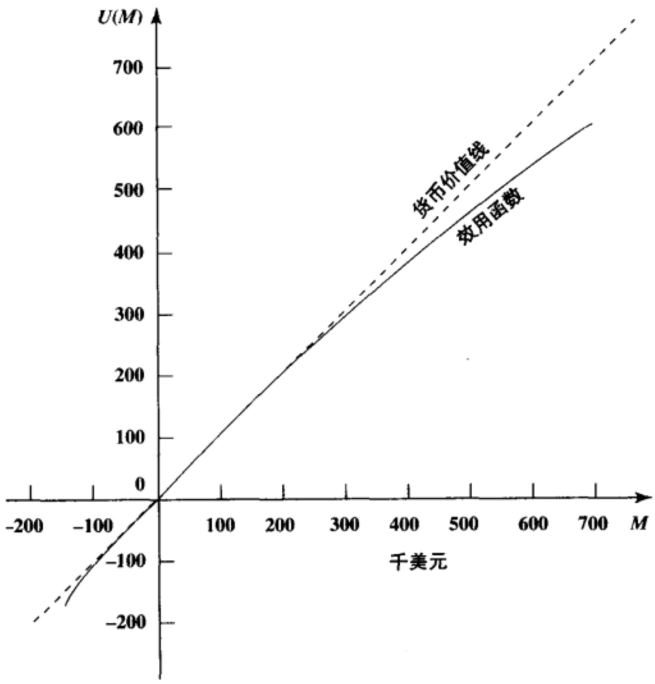



**图 12.28　高富布鲁克公司所有人马克斯的货币效用函数。**

这条曲线是我们对马克斯的货币效用函数的最佳估计。对于最后两种可能收益，这条曲线上 $M=60$ 和 $M=670$ 对应的值提供了相应的效用 $U(60)=60$ 和 $U(670)=580$（博彩程序也可用来找到这些效用，但没有这个必要，因为这些收益与其他已知效用的收益很接近）。表 12.9 给出了全部的可能收益和它们的效用。

为了进行比较，图 12.28 的虚线显示了对应横轴上的收益为 $M$ 时在纵轴上的货币价值（单位：千美元）（由于这条线的倾角是 45°，所以线上任何一点在纵轴上的值与横轴上的值相等）。如果马克斯是完全风险中性的，由于货币收益等于效用值，所以这条虚线就是效用函数 $U(M)=M$。然而，注意光滑曲线表示的实际效用函数 $U(M)$ 在 $M$ 较小的时候（正的或负的）等于 $M$，对于较大的 $M$，$U(M)$ 逐渐低于 $M$。这对于一个中等的风险回避者来说是非

常典型的。

**表 12.9 高富布鲁克公司问题的效用**

| 货币收益,$M$ | 效用,$U(M)$ |
|---|---|
| -130 | -150 |
| -100 | -105 |
| 0 | 0 |
| 60 | 60 |
| 90 | 90 |
| 670 | 580 |
| 700 | 600 |

本质上,马克斯是一个风险偏好者。但在他的公司有财政困难,他又没有什么好的解决方法的情况下,在进行目前的决策时,他不得不成为了一个中等的风险回避者。

## 构建 $U(M)$ 步骤的总结

下面是我们在构建马克斯的效用函数 $U(M)$ 时遵循的一般步骤的总结。

**构建一个货币效用函数的步骤:**

1. 列出问题中所有可能的货币收益,包括0(不论是否可能)。
2. 设 $U(0)=0$,然后任意选择另一个收益的效用(负的收益取负值,正的收益取正值)。
3. 选择三个收益值,其中有两个收益的效用是已知的。
4. 将博彩程序应用于求解第三个收益的效用。
5. 重复步骤 3 和 4,获得对应其他收益的未知效用。
6. 把得到的效用与收益 $M$ 画在效用 $U(M)$ 图上。通过这些点画出一条光滑的曲线就得到效用函数。

## 使用决策树以效用分析问题

现在在表 12.9(图 12.17)中我们已经构造出了马克斯的货币效用函数,这个信息可以像下面总结的那样使用在决策树中:

用决策树来分析问题的过程与 12.7 节介绍的过程相同,只是用效用来代替货币收益。因此用于评估决策树中每一个节点的值现在是期望效用而不是期望(货币)收益。于是用贝叶斯决策规则得到的最优策略将使得整个问题的期望效用最大。

> 在每一条结束树枝上,输入对应结果的效用值作为其"现金流",而不用改变前面树枝上的默认值为0的"现金流"。

因此,通过再一次使用 TreePlan,如图 12.29 所示,我们最终的效用决策树与 12.7 节的图 12.17 的决策树类似。节点和树枝以及从机会节点伸展出的树枝的概率完全相同。然而,与图 12.17 的关键不同在于每一个结束节点右边的货币收益被表 12.9 中相应的效用所代替了(这通过在 TreePlan 中最后的树枝上用相同的效用作为"现金流",并在前面的树枝上将"现金流"改为 0 实现)。TreePlan 就是使用这些效用来计算后面所有节点的期望效用的。

除了底部单元格 F41 中的节点以外,这些期望效用导致在所有其他的决策节点上的决

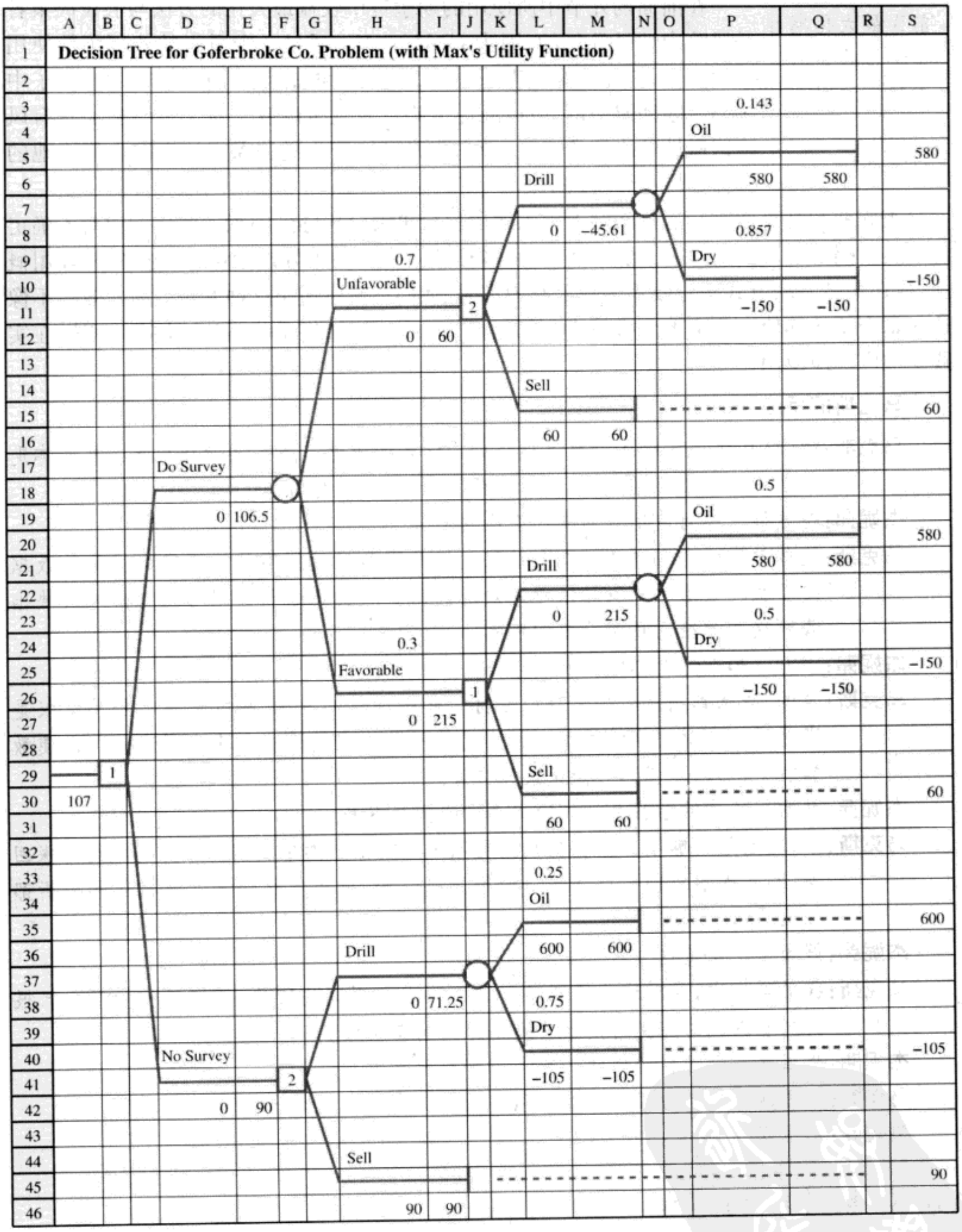



**图 12.29**　当使用马克斯的货币效应函数来最大化期望效用时，由 TreePlan 构建和求解的完整高富布鲁克公司问题的最终决策树。

策与图 12.17 相同。这个节点上的决策现在变为出售土地而不是进行钻探。然而就像单元格 B29 以“1”表示的一样，求解的过程还是使得这个节点处于断路上。因此，整个的最优策略与图 12.17 得到的是相同的（做地震勘探；结果不好则出售土地；结果好则进行钻探）。

前面最大化期望货币收益的求解方法假设了决策者是风险中性的。

在前面的几节中所使用的期望货币收益最大化的方法与假设决策者是风险中性是等价的，因为 $U(M)=M$。通过一个适当的效用函数使用效用理论，最佳方案体现了决策者对风险的态度。因为马克斯选择了中等的风险回避态度，所以最优策略没有发生改变。对于一些更加具有风险回避性的决策者来说，最优策略可能变为更加保守地立即出售土地的选择（不进行地震勘探）。

杰妮弗和马克斯对在这个问题上引入效用进行决策分析感到满意。效用为面对不确定性的决策提供了一个理性的方法。然而，许多管理人员不能很好地理解相对抽象的效用概念，或在用概率的方式构建效用函数上有困难时，他们不愿意使用这种方法。因此效用不像这一章介绍的其他一些决策分析技术包括贝叶斯决策规则（货币收益）和决策树那样在实践中被广泛地使用。

**马克斯的反应**

**马克斯**：嗨，自从我上学起还没有进行过如此深入的思考。是那些管理科学人员使你走上了一条非常有规律的、非常有逻辑性的道路，对吗？

**杰妮弗**：是这样。你对使用效用有什么看法？

**马克斯**：这些效用对我来说还是有点神秘。但是那些通过使用效用而最终得到的数据给了我一些启示。我可以看到效用的用意。我想这些效用可以更好地反映出我对这些收益的真实价值的感受。

**杰妮弗**：很好。那么你对你的决策满意吗？

**马克斯**：是的，我感到满意。由于我们进行了非常细致的考虑，我的感觉已经不仅仅是满意了。我对决策结果对实际情况并不是非常敏感这一事实很喜欢。即使数据有些出入，这仍然可能是最佳方案。

**杰妮弗**：是的。不然的话我会让你做更多的敏感性分析。

**马克斯**：不，这已经足够了。很明显我们要做地震勘探。如果我们得到好的地震勘探回波，它会提示我们进行钻探。如果没有得到，就出售这块地。所有这些分析都证明了我的想法。

**杰妮弗**：好极了。就是这样。

**马克斯**：我必须指出，我对这些管理科学工作留下了深刻的印象，即使工作量很大。很高兴看到我为你支付的学费是如此的物有所值。

**杰妮弗**：我很喜欢管理科学课程。很多内容都很有用。

**马克斯**：你用这些知识为我完成了一项伟大的工作。谢谢你，亲爱的。

**杰妮弗**：不用客气，爸爸。

## 估计 $U(M)$ 的另一个方法

以上构建 $U(M)$ 的步骤要决策者反复使用博彩程序，这要求他（或她）每次都进行关于什么概率使得他在两个选择上表现出无差异的困难的决定。许多管理人员不太喜欢做出这种决定。因此，有时要使用另一种方法来估计货币效用函数。

这个方法是假设效用函数有一个特定的数学形式，然后通过调整其形式使其尽可能准确地反映决策者对待风险的态度。例如，一个广泛使用的形式（因为它相对比较简单）是指数效用函数（Exponential Utility Function）：

$$U(M)=R(1-e^{-\frac{M}{R}})$$

这里 $R$ 是决策者的风险容忍度。这个效用方程拥有图 12.27(a)所示的图形形状，因此它被用来反映风险回避者的情况。很大的风险回避性对应较小的 $R$ 值(这会使得图中的曲线发生很大程度的弯曲)，风险回避性小对应较大的 $R$ 值(这使得图中的曲线弯曲变得慢得多)。

由于 $R$ 衡量的是决策者的风险容忍度，随着 $R$ 的增加，风险回避程度减小。

由于马克斯拥有相对较小的风险回避性，图 12.28 所示他的效用函数曲线弯曲得很慢。给出马克斯的效用值 $U(670)=580$ 和 $U(700)=600$ 的 $R$ 值大约为 $R=2250$。另一方面，当可能发生大的损失时，马克斯变得更加具有风险回避性，因为这可能导致破产，因此给出他的效用值 $U(-130)=-150$ 的 $R$ 值只有大约 $R=465$。

不幸的是，在一个效用函数中不能同时使用两个不同的 $R$ 值。指数效用函数的一个缺点是假设一个恒定的风险回避性($R$ 值固定)，不管决策者现在拥有多少钱。这不符合马克斯的情况，目前资金的短缺使得他比平常更关心发生大的损失。这就是为什么杰妮弗没有使用指数效用函数的原因。

在其他潜在损失结果不是那么严重的情况下，假定指数效用函数或许可以提供一个合理的近似。这时有一个简单的方法来估计适当的 $R$ 值。决策者要选择使得他在下面的两个选择中无差异的 $R$ 值：

$A_1$：一个五五开的投机，以 0.5 的概率获得 $R$ 美元，以 0.5 的概率损失 $R/2$ 美元。

$A_2$：没得到什么也没损失什么。

## 指数效用函数下使用 TreePlan

**TreePlan 窍门：**
对话框中的选项让你指定是使用期望收益还是指数效用函数来应用贝叶斯决策规则。对话框也允许你指定是最大化利润(如本章所使用的)还是最小化成本。

TreePlan 包含了使用指数效用函数的选项。首先，$R$ 值需要在电子表格中指定。含有这个值的单元格需要给定它一个行标签 RT(TreePlan 把这个值作为风险容忍度)。然后在 TreePlan 对话框中点击“选项(Option)”并选择“使用指数效用函数(Use Exponential Utility Function)”选项。点击确定并修改决策树来合并指数效用函数。

图 12.31 显示了风险容忍度 $R=1000$($R=2250$ 和 $R=465$ 之间的某个值，等价于马克斯效用函数的不同区域)的决策树。现在在每个节点的下面和左边都有两个期望收益。位置较低的那个数值代表决策树中那个阶段的期望效用值，上面的数字代表等价于期望效用值的相应收益。例如，单元格 A31 表示的是指数效用函数的期望效用值是

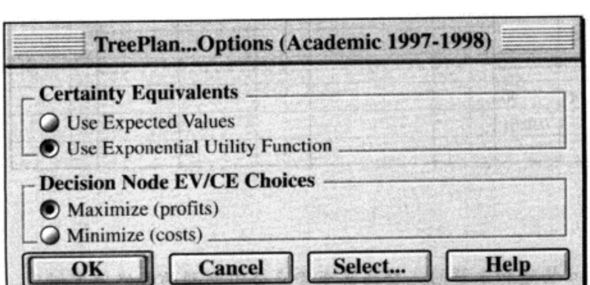
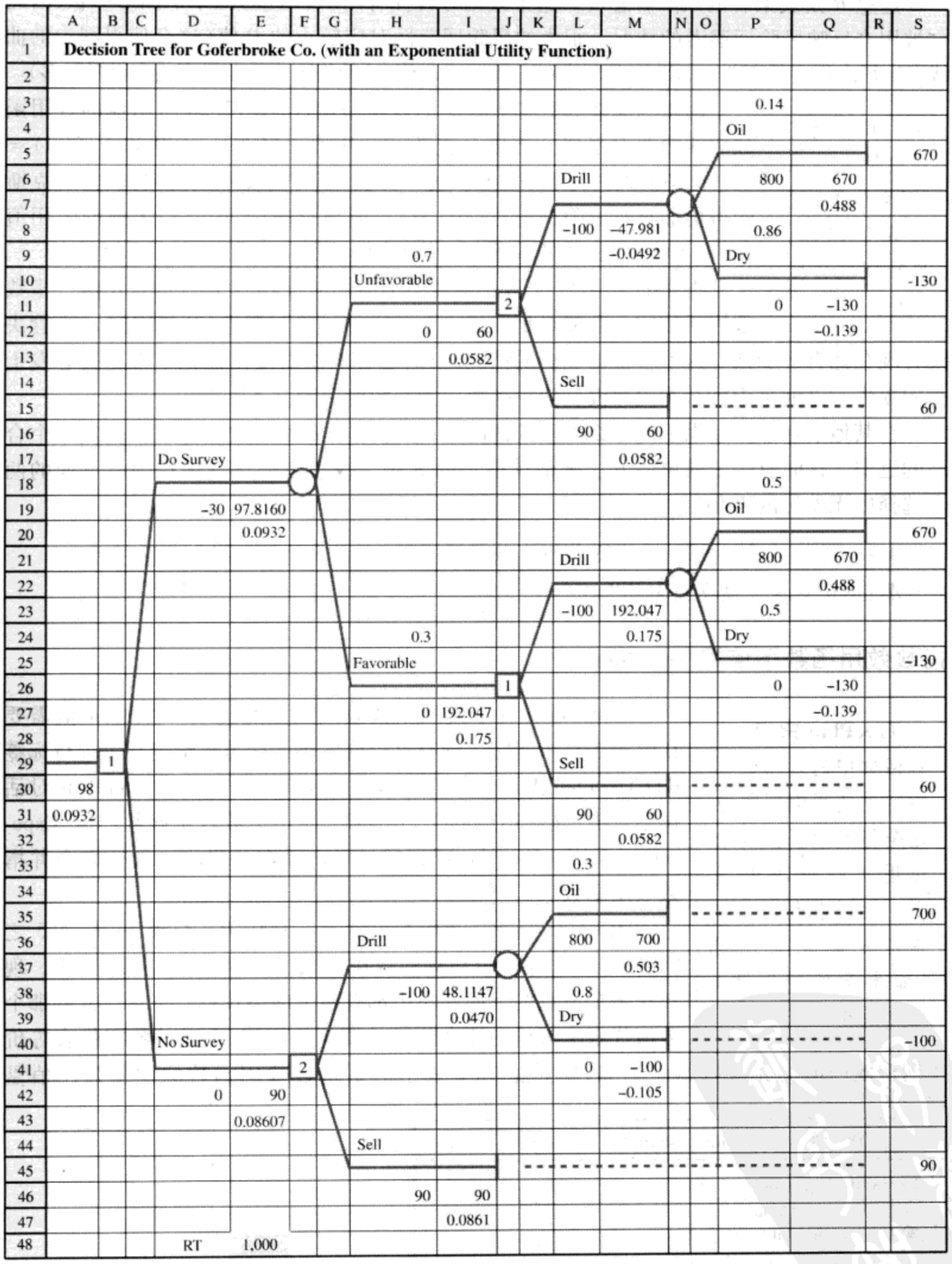



**图 12.30** 点击 TreePlan 对话框的选项按钮弹出的对话框，其中提供了使用指数效用函数的选项。

0.0932。这等价于单元格 A30 中显示的期望收益 98000 美元。

指数效用函数如图 12.29 所示得到了一个同样的决策。完整的最佳策略是进行地震勘




| Range Name | Cells |
|---|---|
| RT | E48 |

图 12.31 当使用指数效用函数时，由 TreePlan 构建和求解的完整高富布鲁克公司问题的最终决策树。

探；如果勘探结果不好就出售土地；如果结果好就钻探。然而，当 $R$ 值减少时最佳策略会发生变化。当 $R$ 值小于 728 时，最佳策略就会转向不进行地震勘探而是直接出售土地。这样，一个风险回避更加严重的决策者将会对高富布鲁克公司作出一个更加安全的决策——出售土地确保获得 90000 美元的收益。

**问题回顾**

1. 效用反映了什么？
2. 对于风险回避者来说，其货币效用函数图的形状是什么样的？风险偏好者呢？风险中性者呢？
3. 效用函数的基本属性是什么？
4. 博彩程序涉及的是什么样的博彩？
5. 给定两个假设选择，其中一个具有概率 $p$，这两个选择的无差异点表示了什么？
6. 在决策树中使用效用时，使用什么值来得到树中每一个节点的评估？
7. 对于高富布鲁克公司的问题，马克斯作出了怎样的决策？

## 12.10　决策分析的实际应用

高富布鲁克公司的问题从某种意义上讲是决策分析的一个十分典型的应用。与其他应用一样，马克斯要面对很大的不确定性进行决策（是否要做地震勘探？钻探石油还是出售土地？）。作这些决策很困难，因为它们的收益是无法预测的。其结果取决于马克斯无法控制的因素（这块土地是否含有石油？）。在这种不确定的环境下，他需要一种进行理性决策的框架和方法。这些是决策分析应用通常具有的特点。

然而，另一方面，高富布鲁克问题又不是一个特别典型的应用。由于只包含两种可能的自然状态（有石油或干涸），这个问题过于简单，而通常情况下决策分析要考虑大量不同的可能性。例如，实际状况可能是干涸、有少量石油、有中等数量的石油、大量的石油、极大量的石油，加上油层的深度、土壤状况等影响钻探成本的因素有不同的可能性。马克斯在两次决策中都只考虑了两个备择方案。通常实际的应用涉及到更多的决策，每次决策有更多的备择方案，还有许多可能的自然状态。

像高富布鲁克这样小的问题可以手工分析并解决。而典型的实际应用涉及到大型的决策树，需要使用软件包（如本章介绍的 TreePlan）来构建和分析。在一些应用中，决策树有上千条末端树枝，需要开发特殊的代数方法并将其结合到软件中来处理如此大规模的问题。[①]

敏感性分析在大规模问题中也变得十分笨拙。尽管通常计算机软件支持这一功能，（如使用 SensIt），所生成的大量数据也会令分析者或决策者不知所措。因此一些图形技术，如图 12.22 和图 12.25 介绍的蛛网图和旋风图，被开发出来以容易理解的方式来组织数据。[②]

其他的图形技术也可以用来在表达和解决决策分析问题中对决策树进行补充。其中使

① 例如，见 C. W. Kirkwood，"An Algebraic Approach to Formulating and Solving Large Models for Sequential Decisions under Uncertainty，" *Management Science* 39（July 1993），pp. 900 – 13。

② 更多的信息见 T. G. Eschenbach，"Spiderplots versus Tornado Diagrams for Sensitivity Analysis，" *Interface* 22（November-December 1992），pp. 40 – 46。

用非常广泛的一个是影响图(Influence Diagram),研究者还继续开发了其他的一些图形。[1]

尽管高富布鲁克问题只涉及一个分析者(杰妮弗)协助下的单一决策者(马克斯),但许多经营战略决策是由管理层集体做出的。群体决策的一种技术被称为决策讨论会(Decision Conferencing)。这是一个群体在决策讨论会上在一个分析师和一名群体协调人员的帮助下进行决策的过程。协调人员和群体一起工作,帮助他们识别并构建问题、带有创造性地思考问题、提出假设以及阐述所有相关的议题。分析师使用决策分析来帮助群体考察各种备择方案的效果。在计算机的群体决策支持系统的辅助下,分析师建立并求解各种模型,并用敏感性分析来回答群体的 what-if 问题。[2]

决策分析的应用通常涉及到管理决策者(无论是个人还是群体)和分析师(无论是个人还是团队)在管理科学训练中的合作伙伴关系。一些管理人员不像马克斯那样幸运有一个杰妮弗那样的工作人员(且不论她是马克斯的女儿)有能力作为分析师进行工作。因此,大量从事于决策分析的管理咨询公司提供这一服务。

决策分析在全世界范围内得到了广泛的应用。由于所有权的原因(及其他原因),公司通常不会在专业期刊上发表文章讲述它们对管理科学技术的应用,包括决策分析。幸运的是,这样的文章也会偶尔出现,有一些出现在 Interfaces 的期刊中。这些关于决策分析的文章提供了这项技术实际应用方面很有价值的观点。

表 12.10 简短地总结了出现在 Interfaces 中的一些决策分析实际应用的例子。最右边的一栏列出了所介绍的每一个应用的期刊号,注意其他几栏列出了许多不同的组织和应用(大量的应用者是公共机构)。对于每一个特定的应用,考虑一下在对应情况下的不确定性如何使得决策分析自然地成为解决问题的技术。

如果你想阅读更多的决策分析实际应用方面的文章,一个很好的入手之处是 Interfaces 1992 年 11 ~ 12 月这一期。这是一期关于决策分析和相关领域风险分析的专刊。它包括了许多有意思的文章,包括基本模型的介绍、敏感性分析以及决策讨论会。同时也包含了一些在表 12.10 中列出的实际应用方面的文章。

## 问题回顾

1. 如何将高富布鲁克公司的问题与决策分析的典型应用相比较?
2. 影响图的目的是什么?
3. 哪些是决策讨论会的典型参与者?
4. 如果在雇员中没有合格的分析师,管理人员应当到哪里去寻求专业化帮助来进行决策分析?
5. 决策分析实际使用的广泛程度如何?

---

① 例如,见 P. P. Schnoy, "A Comparison of Graphical Techniques for Decision Analysis," *European Journal of Operational Research* 78(October 13, 1994), pp. 1 - 21。也可以参考 Z. Covaliu 和 R. M. Oliver, "Representation and Solution of Decision Problems Using Sequential Decision Diagrams," *Management Science* 41 (December 1995), pp. 1860 - 81,以及 K. T. Marshall 和 R. M. Oliver 的 *Decision Making and Forecasting* (New York: McGraw-Hill, 1995)。

② 更多的信息,见 Interface1992 年 11 ~ 12 月号关于决策讨论会的两篇文章,一篇介绍了在澳大利亚的一个应用,另一篇总结了在匈牙利的 26 个决策讨论会的经验。

**表 12.10　决策分析的一些应用**

| 组　　织 | 应　　用 | Interfaces 期刊号 |
|---|---|---|
| 美国石油公司 (Amoco Oil Co.) | 使用效用评估在所有设施服务站销售产品的战略 | 12 月,1982 |
| 俄亥俄艾迪逊公司 (Ohio Edison Co.) | 为火力发电厂评估并选择特定的排放控制设备 | 2 月,1983 |
| 新英格兰电气系统 (New England Electric System) | 为获得打捞沉船的权利决定适当的标价 | 3~4 月,1984 |
| 国家气象服务局 (National Weather Services) | 开发一种洪水预测警报计划 | 5~6 月,1984 |
| 国家森林管理局 (National Forest Administrations) | 为了改善森林和牧场的生态系统提供火灾预警 | 9~10 月,1984 |
| 托姆科石油集团 (Tomco Oil Corp.) | 在 74 种自然状态下从两个地点选择一个钻油井 | 3~4 月,1986 |
| 个人决策公司 (Personal decision) | 使用无概率决策准则从浮动利率抵押和固定利率抵押中选择 | 5~6 月,1986 |
| 美国邮政服务公司 (U. S. Postal Service) | 为实现邮政自动化,在六个备择方案中进行选择,节约了 2 亿美元 | 3~4 月,1987<br>1~2 月,1988 |
| 桑塔克拉拉大学 (Santa Clara University) | 决定是否对校际运动员进行药物检查 | 5~6 月,1990 |
| 独立生活中心 [Independent Living Center(Australia)] | 一个决策讨论会决定了中心重组的战略 | 11~12 月,1992 |
| 杜邦公司 (DuPont Corp.) | 战略计划编制中的许多应用,其中之一为企业增加了 1.75 亿美元价值 | 11~12 月,1992 |
| 不列颠哥伦比亚水电管理局 (British Columbia Hydro and Power Authority) | 对许多战略问题应用效用函数度量价值 | 11~12 月,1992 |
| 美国国防部 (U. S. Department of Defense) | 为开发武器系统改进决策过程 | 11~12 月,1992 |
| 电气效用工业公司 (Electric utility industry) | 在处理公共系统产生的固体垃圾和废气排放中考虑健康和环境风险 | 11~12 月,1992 |
| 一家匿名国际银行 (An anonymous international bank) | 开发相依计划项目,处理火灾及断电对业务的影响 | 11~12 月,1992 |
| 通用汽车 (General Motors) | 在五年中开展了超过 40 个主要的决策分析项目 | 11~12 月,1992 |
| 南部集团(电气部) [Southern Company(electric utility)] | 对汽车和建设设备的预防性维护项目进行评估 | 5~6 月,1993 |
| 英国化学工业公司美洲分公司 (ICI Americas) | 在几乎没有数据可以评估的情况下,选择研发项目 | 11~12 月,1993 |
| 联邦国民抵押协会 (Federal National Mortgage Association) | 使用效用选择房产抵押投资组合 | 5~6 月,1994 |
| 奥格雷索普电力公司 (Oglethorpe Power Corp.) | 评估是否向一个主要的输电系统投资以及如何投资 | 3~4 月,1995 |
| 飞利浦石油公司 (Phillips Petroleum Co.) | 在固定的风险政策下评估石油开采机会 | 11~12 月,1995 |
| 能源电气系统 (Energy Electric System) | 评估发电机组预防性维护计划 | 7~8 月,1996 |

（续表）

| 组　　织 | 应　　用 | Interfaces 期刊号 |
|---|---|---|
| 个人决策公司<br>(Personal decision) | 使用决策树等来决策是否以及何时动手术来矫正近视 | 3～4 月,1997 |
| 杜克大学<br>(Duke University) | 一项医疗测验的阳性结果有一个很高的非阳性的先验概率 | 5～6 月,1999 |
| 西屋公司<br>(Westinghouse Corp.) | 评估很有潜力的工程的研究和开发 | 11～12 月,1999 |

## 12.11　本章小结

决策分析是面对巨大不确定性时进行决策的很有价值的工具。它提供了当结果不确定时进行理性决策的框架和方法。

在一个典型的应用中,一个决策者需要作出单个或一个较短系列的决策(在各项决策之间可能会有附加的信息)。每一项决策有若干备择方案。无法控制的随机因素影响了从决策备择方案中获得的收益。随机因素的可能结果称为可能的自然状态。

哪种自然状态会实际发生只有在决策过后才能知道。然而,在决策前通常有可能对各个自然状态分别估计先验概率。

在制定决策时有大量的可选择的决策准则。一种广泛使用的决策准则是贝叶斯决策规则,它使用先验概率决定每一个决策备择方案的期望收益,并从中选出具有最大期望收益的方案。这就是实际应用最多的准则(连同敏感性分析),因此这是本章大量内容讨论的重点。

有时候可能可以花些钱进行测试或调查以获取关于各种自然状态出现概率的更多的信息。计算全情报价值提供了一个检查这样做是否值得的便捷的方法。

当拥有更多的信息时,更新过的概率称为后验概率。计算这些新的概率时概率树图十分有用。

对于涉及一系列决策的问题(可能包含是否要获取更多信息的决策),决策树通常被用来以图形的方式来显示决策和随机事件的演进。使用贝叶斯决策规则的计算能够在决策树上直接进行,一次处理一个事件节点或决策节点。电子表格软件包,如 TreePlan,对构建和求解决策树很有帮助。

当问题涉及产生巨大损失的可能性时,效用提供了一个结合决策者对待风险的态度进行分析的方法。然后可以用效用代替货币价值作为收益,应用贝叶斯决策规则。

决策分析应用广泛。针对个人计算机的大量软件包已经成为决策分析实践应用的一个不可分割的组成部分。

## 专业术语

**备择方案**(Alternatives):决策者在决策时所考虑的可供使用的选择。(12.1 节)

**贝叶斯决策规则**(Bayes' decision rule):一个应用广泛的决策准则,先使用概率来计算每一个决策备择方案的期望收益,然后选择期望收益最大的方案。(12.2 节)

**贝叶斯定理**(Bayes' theorem):一个用于计算自然状态后验概率的公式。(12.6 节)

**树枝**(Branch):一条从决策树节点伸展出来的线。(12.3 节)

**决策讨论会**(Decision conferencing):用于群体决策的过程。(12.10 节)

**决策者**(Decision maker)：负责进行决策的人或群体。(12.1 节)

**决策节点**(Decision node)：决策树上需要进行决策的点。(12.3 节)

**决策树**(Decision tree)：对所考虑的决策和随机事件过程的图形表示。(12.3 节,12.7 节)

**事件节点**(Event node)：决策树中表示随机事件发生的一个点。(12.3 节)

**期望收益**(Expected payoff,EP)：对于一种备择方案，将自然状态的概率作为权重计算出的加权平均收益。(12.2 节)

**全情报价值**(Expected value of perfect information, EVPI)如果能够在决策前知道实际的自然状态，所带来的期望收益的增加量。(12.4 节,12.5 节)

**指数效用函数**(Exponential utility function)适合于风险回避者的效用函数。(12.9 节)

**影响图**(Influence diagram)为表示和分析决策树问题而对决策树进行补充的一张图。(12.10 节)

**博彩程序**(Lottery procedure)：通过比较两种假设的选择，其中一种涉及投机，寻找特定数量的货币对决策者的效用的过程。(12.9 节)

**乐观准则**(Maximax criterion)：一个非常乐观的决策准则，它没有使用先验概率，只是简单地选择提供最大可能收益的决策备择方案。(12.2 节)

**悲观准则**(Maximin criterion)：一个非常悲观的决策准则，它没有使用先验概率，只是简单地选择提供获得最小可能收益保证的决策备择方案。(12.2 节)

**最大可能性准则**(Maximum likelihood criterion)：一种使用概率并聚焦于最有可能出现的自然状态的决策准则。(12.2 节)

**节点**(Node)：决策树上的交汇点。(12.3 节)

**收益**(Payoff)：用于衡量决策备择方案和自然状态导致的结果的量。(12.1 节)

**损益表**(Payoff table)：给出了每一种决策选择和自然状态组合的收益的表。(12.1 节)

**单因素**(Plot)：SensIt 提供的一个选项，用来生成一张图，其中显示了对应单一数据单元格不同值的输出单元格如何变化。(12.8 节)

**无差异点**(Point of indifference)：在博彩程序中，决策者在两种假设选择上表现出无差异的点。(12.9 节)

**后验概率**(Posterior probabilities)：为了改进先验概率，在做了测试或调查后得到的自然状态的修正概率。(12.5 节,12.6 节)

**先验概率**(Prior probabilities)：在测试或调查以获得额外信息前估计的自然状态概率。(12.1 节)

**概率树图**(Probability tree diagram)：对计算自然状态的后验概率很有用的一张图。(12.6 节)

**风险回避者**(Risk-averse individual)：具有在货币数量上升的同时斜率下降的货币效用函数的人。(12.9 节)

**风险中性者**(Risk-neutral individual)：对货币量的需求与获得货币效用成比例的人。(12.9 节)

**风险偏好者**(Risk-seeking individual)：具有在货币数量上升的同时斜率上升的货币效用函数的人。(12.9 节)

**敏感性分析**(Sensitivity analysis)：对于自然状态(或收益)的概率的变化如何对建议的决策选择产生影响的研究。(12.4,12.8 节)

**蛛网图**(Spider graph)：为敏感性分析的比较提供帮助的图。(12.8 节)

**自然状态**(States of nature)：影响备择方案获得收益的随机事件的可能结果。(12.1 节)

**旋风图**(Tornado diagram)：用可以理解的方式组织从敏感性分析中获得的数据的图。(12.8 节)

**效用**(Utility)：一种结果的效用用于衡量这个结果对决策者的真实价值。(12.1,12.9 节)

**货币效用函数**[Utility function for money, $U(M)$]：某一点的效用与获得的货币量相对照的图。(12.9 节)

## 本章管理科学课件的学习辅助

"Ch. 12—**决策分析**"Excel **文件**：

- 高富布鲁克问题的贝叶斯决策规则
- 高富布鲁克问题的决策树
- 高富布鲁克问题的数据表
- 全情报下高富布鲁克问题的期望收益
- 全情报下高富布鲁克期望收益的决策树
- 后验概率的模板
- 完整高富布鲁克问题的决策树(带有 SensIt 图)
- 使用马克斯效用函数的完整高富布鲁克问题的决策树
- 使用指数效用函数的完整高富布鲁克问题的决策树

Excel **加载宏**：

TreePlan(学术版本)
SensIt (学术版本)

CD-ROM 上本章的补充材料:

决策准则

"Ch. 12—补充材料"Excel 文件:

乐观准则模板
悲观准则模板
现实主义准则模板
最小机会损失准则模板
等可能性准则模板

# 习 题

在下面习题(或习题的一部分)的左边,我们插入符号"A"(加载宏)表示可以使用以上列出的 Excel 加载宏,符号"T"表示计算后验概率的 Excel 模板会有帮助。几乎所有的习题都可以方便地使用电子表格规划求解。在题号前带有星号的问题书后至少给出了部分的答案。

12.1. 考虑下面的无概率决策分析问题的损益表。

| 备择方案 | 自然状态 | | |
|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| $A_1$ | 6 | 2 | 4 |
| $A_2$ | 3 | 4 | 3 |
| $A_3$ | 8 | 1 | 5 |

a. 使用乐观准则时,应该选择哪一个备择方案?

b. 使用悲观准则时,应该选择哪一个备择方案?

12.2. 如果 12.1 中的损益表变成下面的这个表,则结果会如何变化?

| 备择方案 | 自然状态 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
| $A_1$ | 25 | 30 | 20 | 24 |
| $A_2$ | 17 | 14 | 31 | 21 |
| $A_3$ | 22 | 22 | 22 | 22 |
| $A_4$ | 29 | 21 | 26 | 27 |

12.3. 简·克拉克是米德城(Midtown)食品杂货店的经理。她现在需要补充草莓的供应。她要多少,固定供应商就可以供应多少。但是这些草莓已经熟透了,她要在明天把它们卖出去,剩下没有卖掉的将全部扔掉。简估计明天她可以卖掉 10、11、12、或 13 箱。她可以以每箱 3 美元的价格买进草莓,以 8 美元的价格卖出。简现在需要决定应该购买多少箱。

简已经检查过了店里的草莓日销售量记录。在此基础上,她估计明天销售 10、11、12、13 箱草莓的先验概率为 0.2、0.4、0.3、0.1。

a. 用备择方案、自然状态和损益表来表述对这个问题的决策分析。

b. 如果简对这些先验概率的准确性表示怀疑,选择忽略它们并使用乐观准则,她应当购买多少箱草莓?

c. 如果简使用悲观准则,她应当买进多少箱草莓?

d. 如果简使用最大可能性准则,应当购买多少箱草莓?

e. 根据贝叶斯决策规则,应当购买多少箱?

f. 简认为销售 10 箱和 13 箱的先验概率是正确的,但不知道应该如何在 11 箱和 12 箱之间分配先验概率。当 11 箱和 12 箱的先验概率为(i)0.2 和 0.5,(ii) 0.3 和 0.4,(iii) 0.5 和 0.2 时重新使用贝叶斯决策规则进行决策。

12.4.* 沃伦·巴菲(Warren Buffy)是一个非常富有的投资家,他用其传奇般的投资智慧获得了大量的财富。现在他有三个主要的投资项目,并且想选择其中一个。第一个是保守投资,在经济上升时会表现得很好,且在经济下滑时也只会遭到很小的损失。第二个是投机投资,在经济上升时会表现得特别好,但在经济下滑时会非常差。第三个是逆循环投资,在经济上升时会遭受到一些损失,在经济下滑时会表现得很好。

沃伦相信在这些潜在投资的生命周期中,有三种可能的情形会出现:(1)经济上升,(2)经济稳定,(3)经济下滑。他对经济发展趋势持有悲观态度,因此他将这三种情形的先验概率分别设置为 0.1、0.5、0.4。他还估计这三种情形下他的收

益如下表所示(单位:百万美元):

| | 经济上升 | 经济稳定 | 经济下滑 |
|---|---|---|---|
| 保守投资 | 30 | 5 | -10 |
| 投机投资 | 40 | 10 | -30 |
| 逆循环投资 | -10 | 0 | 15 |
| 先验概率 | 0.1 | 0.5 | 0.4 |

根据下面的几种准则,沃伦应当进行何种投资?

a. 乐观准则。

b. 悲观准则。

c. 最大可能性准则。

d. 贝叶斯决策规则。

12.5. 再考虑 12.4。沃伦认为贝叶斯决策规则是最可靠的决策准则。他觉得 0.1 是合适的经济上升的先验概率,但是他不能确定如何在经济稳定和经济下滑中分配剩下的概率。因此他希望对后两个先验概率使用敏感性分析。

a. 当经济稳定的先验概率为 0.3,经济下滑的先验概率为 0.6 时,再次使用贝叶斯决策规则进行决策。

b. 当经济稳定的先验概率为 0.7,经济下滑的先验概率为 0.2 时,再次使用贝叶斯决策规则进行决策。

c. 以原始的先验概率用手工构建这个问题的决策树。

A　d. 以原始的先验概率用 TreePlan 构建和求解这个问题的决策树。

A　e. 准备进行敏感性分析,在和问题 d 中构建的决策树同样的电子表格中将数据和结果相结合(如案例学习中的图 12.6 所示)。

A　f. 使用由问题 d 得到的含有决策树的电子表格完成 a 和 b。

A　g. 根据需要将电子表格扩展,生成一张数据表,其中显示了当经济稳定的先验概率分别是:0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9 时,沃伦应该选择哪种投资,以及这种投资带来的期望收益。

h. 对于这三种投资中的任一种,找到经济稳定的先验概率在 0 和 0.9 时它们各自的期望收益(经济上升的先验概率保持 0.1 不变)。绘制一张单一的期望利润图,以期望利润为纵轴,以经济稳定的先验概率为横轴。画一条线段联结图中的两点以显示期望利润如何随着经济稳定的先验概率的变化而变化。使用这个图来描述投资选择如何取决于经济稳定的先验概率。

i. 使用代数方法求解经济稳定的先验概率值,当这个先验概率值增加的时候投资选择会发生变化。

12.6.* 考虑一个决策分析问题,收益如下面的损益表所示(单位:千美元):

| 备择方案 | 自然状态 | |
|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ |
| $A_1$ | 80 | 25 |
| $A_2$ | 30 | 50 |
| $A_3$ | 60 | 40 |
| 先验概率 | 0.4 | 0.6 |

a. 在乐观准则下,应当选择哪一个方案?

b. 在悲观准则下,应当选择哪一个方案?

c. 在最大可能性准则下,应当选择哪一个方案?

d. 在贝叶斯决策规则下,应当选择哪一个方案?

A　e. 使用 TreePlan 构建和求解这个问题的决策树。

A　f. 根据需要扩展包含决策树的电子表格,当 $S_1$ 的先验概率是 0.2 和 0.6 时,用决策树进行敏感性分析。

A　g. 现在通过生成一张战略区域图系统地进行敏感性分析,图中显示了当 $S_1$ 的先验概率从 0.2 到 0.6 以 0.04 的增量变化时的最佳策略(根据贝叶斯决策规则)和结果的期望收益。

12.7. 你有一个决策分析问题的损益表,如下所示(单位:千美元):

| 备择方案 | 自然状态 | | |
|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| $A_1$ | 220 | 170 | 110 |
| $A_2$ | 200 | 180 | 150 |
| 先验概率 | 0.6 | 0.3 | 0.1 |

a. 在乐观准则下,应当选择哪一个方案?

b. 在悲观准则下,应当选择哪一个方案?

c. 在最大可能性准则下,应当选择哪一个方案?

d. 在贝叶斯决策规则下，应当选择哪一个方案？

e. 用手工为这个问题构建决策树。

A f. 使用 TreePlan 构建和求解这个问题的决策树。

A g. 现在通过生成一张战略区域图用决策树进行敏感性分析，图中显示了当 $S_1$ 的先验概率从 0.3 到 0.7 以 0.05 的增量变化而 $S_3$ 的先验概率保持原始值不变时会发生什么样的情况。然后使用代数的方法求解 $S_1$ 的先验概率值，当这个先验概率值增加时最优选择会发生变化。

A h. 当 $S_2$ 的先验概率保持原始值不变时重复 g。

A i. 当 $S_1$ 的先验概率保持原始值不变而 $S_2$ 的先验概率从 0 到 0.4 以 0.05 的增量变化时重复 g。

j. 如果你知道自然状态的真实概率应该在给定的先验概率 10% 范围内，你会选择哪一个备择方案？

12.8. 德怀特・墨迪(Dwight Moody)是一个拥有 1000 英亩可耕地的大农场的经理。为了达到更高的效率，德怀特总是一次只在这块农场上种植一种作物。现在他需要决策在即将来临的生长季节里应该种植四种作物中的哪一种。对于每一种作物，德怀特已经得到了在各种天气状况下作物产量和每蒲式耳净收入的估计，如下所示：

| 天气 | 期望产量，蒲式耳/英亩 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 作物 1 | 作物 2 | 作物 3 | 作物 4 |
| 干旱 | 20 | 15 | 30 | 40 |
| 温和 | 35 | 20 | 25 | 40 |
| 潮湿 | 40 | 30 | 25 | 40 |
| 每蒲式耳净收入(美元) | 1.00 | 1.50 | 1.00 | 0.50 |

在参考了历史气象数据后，德怀特还估计了如下生长季节天气状况的先验概率：

干旱 0.3

温和 0.5

潮湿 0.2

a. 用备择方案、自然状态和损益表来表述对这个问题的决策分析。

A b. 为这个问题构建决策树。

c. 使用贝叶斯决策规则决定种植哪种作物。

d. 在贝叶斯决策规则下，当温和天气的先验概率为 0.2、0.3、0.4、0.6 时使用温和天气和潮湿天气的先验概率进行敏感性分析（不改变干旱天气的先验概率）。

12.9. 芭芭拉・米勒根据贝叶斯决策规则进行决策。对于当前的问题，芭芭拉建立了下面的损益表(单位：百美元)。她现在希望使得期望收益最大化。

| 备择方案 | 自然状态 | | |
|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| $A_1$ | $2x$ | 50 | 10 |
| $A_2$ | 25 | 40 | 90 |
| $A_3$ | 35 | $3x$ | 30 |
| 先验概率 | 0.4 | 0.2 | 0.4 |

目前 $x$ 的值是 50，但现在有一个花一些钱使 $x$ 上升的机会。

为了将 $x$ 提升到 75，芭芭拉最多需要花多少钱？

12.10. 你有一个决策分析问题的损益表，如下所示(单位：千美元)：

| 备择方案 | 自然状态 | | |
|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| $A_1$ | 4 | 0 | 0 |
| $A_2$ | 0 | 2 | 0 |
| $A_3$ | 3 | 0 | 1 |
| 先验概率 | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

a. 在贝叶斯决策规则下，应当选择哪一个方案？

b. 求全情报价值。

A c. 在决策树的帮助下检验 b 的结果。

d. 你有一个机会，花 1000 美元获得哪一种自然状态较可能发生的更多的信息。根据 b 的结果，是否值得花这笔钱？

12.11. * 贝茜・皮泽(Betsy Pitzer)根据贝叶斯决策规则进行决策。对于目前的问题，她构建了下面的损益表(单位：美元)：

| 备择方案 | 自然状态 | | |
|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| $A_1$ | 50 | 100 | −100 |
| $A_2$ | 0 | 10 | −10 |
| $A_3$ | 20 | 40 | −40 |
| 先验概率 | 0.5 | 0.3 | 0.2 |

PDG

a. 贝茜应当选择哪种方案？

b. 求全情报价值。

A　c. 在决策树的帮助下检验 b 的结果。

d. 关于花钱得到哪种自然状态更可能出现的更多信息，贝茜最应当考虑什么因素？

12.12. 使用贝叶斯决策规则，考虑一个具有如下损益表的决策分析问题（单位：千美元）：

| 备择方案 | 自然状态 | | |
|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| $A_1$ | -100 | 10 | 100 |
| $A_2$ | -10 | 20 | 50 |
| $A_3$ | 10 | 10 | 60 |
| 先验概率 | 0.2 | 0.3 | 0.5 |

a. 应当选择哪种方案？期望收益是多少？

b. 你有一个获得明确告诉你第一种自然状态 $S_1$ 是否会出现的信息的机会。你会为这个信息最多花费多少？假设你得到了这个信息，你将如何用它来选择方案？期望收益是多少（不包括获得信息的费用）？

c. 如果信息是关于 $S_2$ 而不是 $S_1$ 的，重复 b 的工作。

d. 如果信息是关于 $S_3$ 而不是 $S_1$ 的，重复 b 的工作。

A　e. 现在假设你有一个机会得到一个信息，这个信息将明确告诉你哪种自然状态会出现（全情报）。为了这个信息你最多会花费多少？假设你已经得到了这个信息，你将会如何使用它选择方案？期望收益是多少（不包括获得信息的费用）？

f. 如果你有一个机会进行一些测试，这将会给你关于自然状态的部分信息（非全情报），为了这个信息你最多会花费多少？

12.13. 再考虑高富布鲁克公司的案例分析中 12.6 节和 12.7 节的分析过程。在咨询地质学家的帮助下，杰妮弗现在有了一些历史数据，这将会提供比马克斯提供的关于在类似土地上得到好的地震探测回波的可能性更加准确的信息。特别地，当这块土地含有石油时，获得好的地震探测回波的概率是 80%。这个百分比在土地是干涸的时候是 40%。

a. 修改图 12.12，找到新的后验概率。

T　b. 使用相应的 Excel 模板检验 a 的结果。

c. 修改图 12.16，做出新的决策树。得到的最优策略是什么？

A　d. 使用 TreePlan 构建并求解这个新的决策树。

12.14. 再考虑 12.13。马克斯对他的估计（60% 和 20%）和杰妮弗得到的估计（80% 和 40%）相差如此之远感到怀疑。他要求对这些百分比进行敏感性分析。

a. 用图 12.18 所示的电子表格（在本章的 Excel 文件中含有）并使用杰妮弗的概率来求解结果。

b. 使用 SensIt 来生成两张敏感性图（如 12.20 所示的图），其中一张图的横轴是单元格 W33 里的概率 $P$（FSS | 有石油），另一张图的横轴是单元格 W34 里的概率 $P$（FSS | 干涸）。

c. 当用杰妮弗的概率代替马克斯的概率使用时，画出蛛网图和旋风图。

12.15.* 文森特·考莫是精良织造工厂（Fine Fabrics Mill）的信用部经理。她现在面临一个问题：是否允许给一个潜在新顾客，即一家服装生产企业，100000 美元的赊账。文森特将公司的信用度划分为三类——低、平均、高——但是他不知道哪一类适合这个潜在顾客。经验表明类似的服装生产企业 20% 具有低信用度，50% 具有平均信用度，30% 具有高信用度。如果允许赊账，低信用度的期望收益是 -15000 美元，平均信用度 10000 美元，高信用度 20000 美元。如果不允许赊账，这家服装生产企业将转向另一家公司。文森特可以花 5000 美元向一个信用等级评定组织咨询一个公司的信用状况。对于与这个公司的实际赊账记录表明信用度归为以上三类之一的公司，下面的表格显示了由信用等级评定组织给出的三种可能信用度评价的百分比。

| 信用度评价 | 实际赊账记录 | | |
|---|---|---|---|
| | 低 | 平均 | 高 |
| 低 | 50% | 40% | 20% |
| 平均 | 40% | 50% | 40% |
| 高 | 10% | 10% | 40% |

a. 当不借助于信用等级评定组织时，用备择方案、自然状态和损益表来表述对这个问题的决策分析。

b. 假设不借助于信用等级评定组织，使用贝叶斯决策规则决定采用哪一个选择。

A c. 求出全情报价值。这个结果是否表明应当借助于信用等级评定组织？

d. 假设使用信用等级评定组织提供的信息。建立一张概率树图，对于这个潜在顾客的任何一种可能的信用评价，分别找出各种自然状态的后验概率。

T e. 使用相应的 Excel 模板得到 d 的答案。

f. 对于整个问题，手工画出决策树。使用这个决策树决定文森特的最优策略。

A g. 使用 TreePlan 构建并求解这个决策树。

12.16. 你有如下的损益表（单位：美元）

| 备择方案 | 自然状态 | |
|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ |
| $A_1$ | 400 | -100 |
| $A_2$ | 0 | 100 |
| 先验概率 | 0.4 | 0.6 |

你有一个花 100 美元进行调查得到哪一种自然状态会出现的更好的估计。当真实自然状态是 $S_1$ 时，这项调查会有 60% 的概率准确估计到 $S_1$ 会出现（但是会有 40% 的概率预测到 $S_2$ 会出现）。当真实自然状态是 $S_2$ 时，这项调查会有 80% 的概率准确估计到 $S_2$ 会出现（但是会有 20% 的概率预测到 $S_1$ 会出现）。

a. 如果没有做这个调查，请使用贝叶斯决策规则决定应当选择哪一个方案。

A b. 在决策树的帮助下，找出全情报价值。这个结果是否表明值得做这个调查？

c. 如果做了这个调查，对于下面每一种组合求出联合概率：(i) 自然状态是 $S_1$，调查预测为 $S_1$；(ii) 自然状态是 $S_1$，调查预测为 $S_2$；(iii) 自然状态是 $S_2$，调查预测为 $S_1$；(iv) 自然状态是 $S_2$，调查预测为 $S_2$。

d. 分别求出调查预测为 $S_1$ 和 $S_2$ 的无条件概率。

e. 如果做了这个调查，用 c 和 d 的结果决定在调查的每一种可能预测结果下出现自然状态的后验概率。

T f. 使用相应的 Excel 模板得到 e 的结果。

g. 如果调查估计 $S_1$ 会出现，用贝叶斯决策规则决定应当选择哪一个方案，并求出期望收益。

h. 如果调查估计 $S_2$ 会出现，重复 g。

i. 如果做了这个调查，当使用贝叶斯决策规则的时候期望收益是多少？

j. 使用以上的结果，对是否要做调查和选择备择方案做出最优策略。

A k. 构建并求解决策树来体现对整个问题的分析（可以使用 TreePlan）。

12.17. 一个运动队对其运动员作药检，10% 的运动员服用药物。然而这个药检只有 95% 的可靠度。也就是说一个服用药物的运动员有 0.95 的概率被检测出呈阳性，0.05 的概率被检测出呈阴性。没有服用药物的运动员有 0.95 的概率被检测出呈阴性，0.05 的概率被检测出呈阳性。

用一张概率树图求出下面每一种药检结果的后验概率。

a. 运动员服用药物，药检呈阳性。

b. 运动员不服用药物，但药检呈阳性。

c. 运动员服用药物，但药检呈阴性。

d. 运动员不服用药物，药检呈阴性。

T e. 使用相应的 Excel 模板检验上面的结果。

12.18. 贴利多公司（Telemore）的管理层正考虑开发并销售一种新产品。估计成功的可能性是不成功的两倍。如果成功，期望收益为 1500000 美元。如果不成功，期望损失为 1800000 美元。可以花 100000 美元做一次营销调查，预测产品是否会成功。过去的调查经验表明，成功的产品有 80% 的概率被预测到成功，不成功的产品有 70% 的概率被预测到不成功。

a. 当不做营销调查时，用备择方案、自然状态和损益表来表述对这个问题的决策分析。

b. 假设不做营销调查，使用贝叶斯决策规则决定选择哪一个方案。

c. 求出全情报价值。其结果是否表明应当进行营销调查？

T d. 假设做营销调查。找出任一营销调查可能结果下每一种自然状态的后验概率。

A e. 使用 TreePlan 为整个问题构建并求解决策树。

A　f. 使用 SensIt 来生成将收益、损失、成本数据向两个方向变动 25% 的蛛网图和旋风图。

12.19. H&M 制造公司(Hit-and-Miss)生产一种不合格品率为 $p$ 的产品。生产批量为 150。过去的经验表明对于整批产品,$p$ 是 0.05 或者是 0.25。而且在生产的各批次中 80% 的 $p$ 等于 0.05(因此 20% 的 $p$ 等于 0.25)。这些产品被用于流水线,在最终产品离开工厂前进行质量检验。公司可以以每一件 10 美元的成本对每一个产品进行照射,找出不合格产品并替代掉。或者直接使用这些产品而不照射。如果选择后一种做法,返工的成本是每一件不合格产品 100 美元。由于照射需要安排检验员和设备,进行照射或不进行照射的决策需要提前两天做出。然而,可以从一批中抽取一个产品送到实验室检验,其质量报告(合格或不合格)可以在照射/不照射决策前做出。这种初始检验的费用是 125 美元。

a. 如果没有提前检验单个产品,用备择方案、自然状态和损益表来表述对这个问题的决策分析。

b. 假设没有提前检验单个产品,使用贝叶斯决策规则决定选择哪一种方案。

c. 求出全情报价值。其结果是否表明应当提前进行单个产品的检验?

T　d. 假设提前检验单个产品。找出任一检验可能结果下每一种自然状态的后验概率。

A　e. 为整个问题构建并求解决策树。

12.20. *硅谷动力公司(Silicon Dynamics)开发了一种新的计算机芯片,公司如果愿意的话可以制造并销售个人电脑。另一种选择是公司可以将计算机芯片的所有权作价 1500 万美元卖出。如果公司选择制造计算机,其盈利能力取决于公司在第一年销售计算机的能力。公司有一个能够保证 10000 台计算机销售量的零售渠道。另一方面,如果这种计算机适销对路,公司可以卖出 100000 台。为了进行分析,这两种水平的销售量将作为两种可能的销售计算机的结果。但不知道它们的先验概率。建立生产线的费用是 600 万美元。每一台计算机的销售价格和可变成本之差为 600 美元。

a. 用备择方案、自然状态和损益表来表述对这个问题的决策分析。

b. 对这个问题手工建立一个决策树。

A　c. 假设两种销售量水平的先验概率都是 0.5,用 TreePlan 来构建并求解这个决策树。根据这样的分析,请问应当选择哪一个方案?

A　d. 使用 SensIt 画出期望收益(使用贝叶斯决策规则)与销售 10000 台计算机的先验概率的敏感性图。

e. 画出每一种备择方案的期望收益与销售 10000 台计算机的先验概率的战略区域图。

f. 根据这张战略区域图,用代数方法求出销售 10000 台计算机的先验概率值,这一点是两条直线的交叉点。说明这个点的重要性。

12.21. *再考虑 12.20。硅谷动力的管理层现在考虑进行成本为 100 万美元的完全合格的市场调研,来预测两种需求水平中哪种可能出现。以前的经验说明这种市场调研的正确性是 2/3。

a. 求出此问题的全情报价值。

b. 结果 a 说明了进行市场调研是值得的吗?

c. 构建概率树图来求取每种市场调研结果对应的两种需求水平的后验概率。

T　d. 使用相关的 Excel 模板检查问题 c 的结果。

A12.22. *再考虑 12.21。硅谷动力的管理层现在想用决策树来表示整个问题。

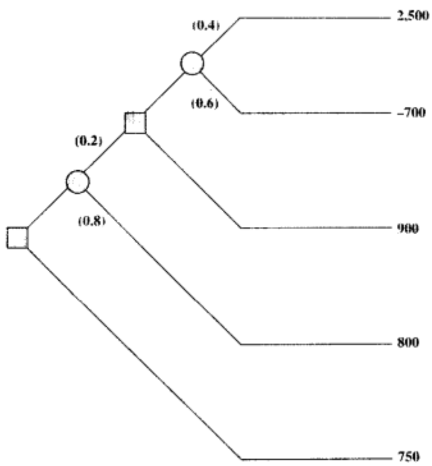
a. 使用 TreePlan 构建并求解这个决策树。

b. 问题 12.20 中的财务数据(1500 万美元、600 万美元、600 美元)有一些不确定性,每一个可以左右变动 10%。对于每一个数据进行敏感性,来查看这些数值在变化范围的两端时会发生什么情况(其他的数据不发生任何变化)。为八个可变数据在两端时的情况作同样的分析。

c. 由于 b 中所描述的不确定性,使用 SensIt 来生成战略区域图,它显示了每个财务数据变化范围内的期望收益(其他的两个数据没有任何变化的情况下)。

d. 作出相应的蛛网图和旋风图。

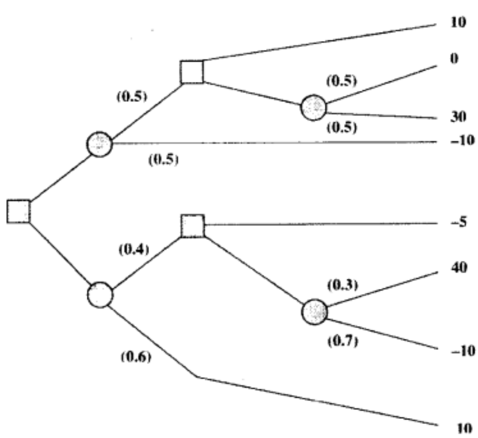
12.23. 有如下所示决策树。括号内的数表示概率,右边的数是末端的收益。




a. 分析这个决策树,作出最优策略。

A b. 使用 TreePlan 构建并求解相同的决策树。

12.24. 有如下决策树。括号中显示了事件节点的概率,末端的收益显示在右边。分析这个决策树,作出最优策略。




12.25. * 里兰德(Leland)大学体育系正考虑是否要在下一年组织一个大型运动,为新的运动场募集资金。组织运动与否很大程度上取决于今年秋天橄榄球队的胜利。在过去,橄榄球队在 60% 的赛季中获得了胜利。如果今年秋天橄榄球队在这个赛季中胜利($W$),会有许多校友会捐资,这个运动将筹集到300 万美元。如果球队在这个赛季中失利($L$),几乎没有人会捐资,这个运动将损失200 万美元。如果不开展运动,不会有任何费用发生。在 9 月 1 日赛季开始前,体育系需要对是否要在下一年组织这个运动进行决策。

a. 用备择方案、自然状态和损益表来表述这个问题的决策分析。

b. 根据贝叶斯决策规则,是否应当组织这个运动?

c. 全情报价值是多少?

d. 一个著名的橄榄球教练威廉·沃什,将帮助评估这个赛季球队是否会获得胜利。他将通过春训和赛季前的工作仔细评估这个队伍,为此他将得到 100000 美元。然后威廉将在 9 月 1 日提供这个赛季的预测,$W$ 或 $L$。在过去类似的情况中,当评估有 50% 胜率的队伍时,他的估计的准确度是 75%。考虑到这支球队胜利的次数较多,如果威廉预测这个赛季将获得胜利,那么这支球队会赢得这个赛季的后验概率是多少?这个赛季失利的后验概率是多少?如果威廉预测这个赛季球队将失利,获得胜利的后验概率是多少?失利的后验概率是多少?如何从概率树图中得到这些问题的解答?

T e. 使用相应的 Excel 模板得到 d 的解答。

f. 手工绘制整个问题的决策树。分析这个决策树,作出是否雇用威廉和是否组织运动的最优策略。

A g. 使用 TreePlan 构建并求解这个决策树。

12.26. Macrosoft 公司的审计员发现有 1 亿美元多余的资金可供投资。有人建议她将所有资金投资于股票或债券一年(只选择一种),然后将所有资金在股票或债券(只选择一种)上再投资一年。目标是在第二年末使得这些资金的期望货币价值最大化。

这些投资的年回报率取决于经济环境,如下表所示:

| 经济环境 | 回报率 | |
|---|---|---|
| | 股票 | 债券 |
| 增长 | 20% | 5% |
| 衰退 | -10% | 10% |
| 萧条 | -50% | 20% |

第一年增长、衰退、萧条的概率分别是 0.7、0.3、0。如果第一年经济增长,那么第二年这些概率保持不变。然而,如果

第一年经济衰退，那么第二年这些概率将分别变为 0.2、0.7、0.1。

a. 手工为这个问题绘制决策树。

b. 分析这个决策树，作出最优策略。

A c. 使用 TreePlan 构建并求解决策树。

12.27. 星期一，一支股票以每股 10 美元收盘。星期二，你预期股票每股以 9 美元、10 美元、11 美元收盘的概率分别为 0.3、0.3 和 0.4。星期三，你预期股票和星期二相比将会低于 10%，不变和或高于 10% 收盘的概率如下表所示：

| 今日收盘 | 下跌 10% | 平盘 | 上涨 10% |
|---|---|---|---|
| 9 美元 | 0.4 | 0.3 | 0.3 |
| 10 美元 | 0.2 | 0.2 | 0.6 |
| 11 美元 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |

星期二，有人建议你在星期四之前买进 100 股这支股票。因为所有的买进活动都发生在收盘时，所以知道那一天的收盘价。因此你的选择是在星期二或星期三收盘时买进。在知道了星期二的收盘价的情况下，你想就星期二买进还是在星期三买进作出最优策略，使得期望买入价格最小。

a. 手工绘制并求解决策树，找出最优战略。

A b. 使用 TreePlan 构建并求解决策树。

A12.28. 在加利福尼亚的一个不太富裕的地方圣乔斯(San Jose)，乔西・莫雷斯管理着一个大型的室外水果摊。为了补充供应，乔西每天早晨从圣乔斯南部的种植者那里成箱买进水果。大约有 90% 的水果有着令人满意的质量，10% 不令人满意。在令人满意的一箱中有 80% 的水果是佳品，能够为乔西带来 200 美元的利润。在不令人满意的一箱中有 30% 的水果是佳品，会使乔西遭受 1000 美元的损失。在乔西决定购买一箱时，他有机会从一箱中抽出一个，检验是否是佳品。在那个样本的基础上，他可以不付钱，不买这一箱。乔西不知道：(1)是否要向这个种植者继续购买；(2)如果是这样，是否值得从一箱中仅抽出一个水果进行检验；(3)如果值得，在检验结果的基础上，他应当拒绝还是接收这一箱。

使用 TreePlan(以及后验概率的 Excel 模板)构建并求解这个问题的决策树。

12.29. *莫顿・沃德公司正考虑推出一种新产品，这个新产品有五五开的概率可以获得成功。一种选择是在决定推出前以 200 万美元的成本在一个实验市场试销这种产品。过去的经验表明产品的最终成功有 80% 的概率为实验市场接受，而不成功的产品只有 25% 的概率为试验市场接受。如果产品成功，会为公司带来 4000 万美元的净利润，如果失败则会给公司带来 1500 万美元的损失。

a. 不进行市场试销时，用备择方案、自然状态和损益表来表述对这个问题的决策分析。然后用贝叶斯决策规则找出最优策略。

b. 求出全情报价值。

A c. 现在有在实验市场试销产品的选择，使用 TreePlan(以及后验概率的 Excel 模板)为这个问题构建并求解决策树。

A d. 利润和损失(4000 万美元和 1500 万美元)有一定的不确定性，都可以在基本值左右 25% 的范围内变动。对于每一个财务数据，如果其到达变化范围的两端时(不改变其他的财务数据)，进行敏感性分析来查看 c 的结果如何变化。然后对于每个财务数据在其两端变化的四种情况作同样的分析。

A e. 由于 d 中所描述的不确定性，使用 SensIt 在期望收益的变化范围内为两个财务数据作出敏感性图(不改变其他数据的情况下)。

A f. 做出相应的蛛网图和旋风图，并解释。

A12.30. 切尔西・布什正在争取她所在的政党提名她为美国总统候选人。现在她考虑是否要冒一个大风险参加超级星期二(Super Tuesday)候选人选拔会。如果她参加超级星期二候选人选拔会(S.T.)，她和参谋们认为会分别有 0.4 和 0.6 的概率表现得很好(以第一名或第二名结束)或表现得不好(以第三名结束)。在超级星期二表现得好，候选人竞选活动会得到大约 1600 万美元的新资助，表现不好会为了支付巨额电视广告费损失 1000 万美元。或者她可以选择不参加超级星期二候选人选拔会，那么将不会有任何成本。

切尔西的参谋们意识到在超级星期二候选人选拔会上胜出的机会受到超级

星期二前三个星期的一个较小规模的 New Hampshire 候选人选拔会结果的影响。政治分析家们感到 New Hampshire 候选人选拔会(N. H.)有 2/3 的概率可以正确预测到超级星期二候选人选拔会的结果。在切尔西的参谋中有一个决策分析专家,他使用这个信息计算出下面的概率:

P(在 N. H. 候选人选拔会表现好的情况下,切尔西在 S. T. 候选人选拔会中也表现得好) = $\frac{4}{7}$

P(在 N. H. 候选人选拔会表现不好的情况下,切尔西在 S. T. 候选人选拔会中也表现得好) = $\frac{1}{4}$

P(在 N. H. 候选人选拔会表现好) = $\frac{7}{15}$

参加 New Hampshire 候选人选拔会的费用估计为 160 万美元。

切尔西感到获得提名胜利的机会很大程度上取决于在超级星期二候选人选拔会后获得大量的资金支持以后的各种竞选活动。因此她需要进行战略选择(是否参加 New Hampshire 候选人选拔会,然后是否参加超级星期二候选人选拔会)以使得在这些候选人选拔会后她的期望资金数量最大化。

a. 为这个问题构建并求解决策树。

b. 对于获得 1600 万美元和损失 1000 万美元后一定的不确定性,这取决于在超级星期二上的表现。它们都会在估计值左右 25% 的范围内变动。对于这两个财务数据中的每一个,如果其到达变化范围的两端时(不改变其他的财务数据),进行敏感性分析来查看 a 的结果如何变化。然后对于每个财务数据在其两端变化的四种情况作同样的分析。

A c. 由于 b 中所描述的不确定性,使用 SensIt 在切尔西的期望资金变化范围内为两个财务数据作出敏感性图(不改变其他数据的情况下)。

d. 做出相应的蛛网图和旋风图,并解释。

A12. 31. 猎头(Headhunters)公司为西部银行(Western Bank)寻找执行官的工作即将有结果。要填补的是一个关键职位——信息处理副总裁——因为这个人将负责建立一套专业级的管理信息系统,这个系统可以将西部银行的许多支行连接起来。然而,Headhunters 公司感到他们已经找到了合适的人选,他就是马绍·方顿。他在纽约的一家中等规模的银行中在类似的职位上有出色的记录。

经过一轮的面试,西部银行的主席认为马绍有 70% 的机会能够成功地设计这个管理信息系统。如果马绍成功了,公司将会获得 2000000 美元的利润(除去马绍的工资、培训费、招聘成本和费用)。如果他不成功,公司将会损失 600000 美元。

再支付 40000 美元,Headhunters 将进行一个细致的调查(包括进一步的背景调查、专业知识和心理测试等)来进一步查明马绍获得成功的潜力。这个过程有 90% 的可靠度。也就是说能够成功设计管理信息系统的候选人将有 0.9 的概率通过测试,不能成功设计系统的候选人会有 0.9 的概率无法通过测试。

西部银行的最高管理层需要决定是否雇用马绍以及是否在作出决策前要求 Headhunters 进行详细调查。

a. 构建这个问题的决策树。

b. 找出从事件节点伸出的树枝的概率。

c. 分析决策树,作出最优策略。

d. 现在假设 Headhunters 为进行细致的调查所收取的费用是可以商量的。西部银行最多愿意支付多少?

12. 32. 再考虑高富布鲁克公司的案例分析,包括 12.9 节的效用应用。马克斯现在认为由于公司资金紧张,需要在这个问题上采取更多风险回避做法。因此他如下所示修改了表 12.9 中的效用:$U(-130) = -200, U(-100) = -130, U(60) = 60, U(90) = 90, U(670) = 440, U(700) = 450$。

a. 分析手工修改过的图 12.29 中的决策树,做出新的最优策略。

A b. 使用 TreePlan 构建并求解修改过后的决策树。

12. 33. * 你生活在一个有可能发生剧烈地震的地区,因此你考虑为你的房子买地震保险,年保险费用为 180 美元。一年中地震毁坏你的房子的概率是 0.001。如果发生这种情况,你估计毁坏赔付将为 160000 美元(全额赔付)。你的所有财产(包括房子)值 250000 美元。

a. 应用贝叶斯决策规则进行决策(是否买保险),使得一年后你的财产期望价值最大。

b. 你用一个效用函数衡量 $x$ 美元($x \geq 0$)的全部财产具有多少价值。这个效用函数是 $U(x)=\sqrt{x}$。比较购买地震保险带来的全部财产下降的效用和不买下一年地震保险的期望效用。你是否应当买保险呢?

12.34. 为了祝贺你刚从大学毕业,你的父母给你两个选择。一个选择是将 19000 美元作为礼物送给你。另一个选择是以你的名义作一项投资。这个投资很快会有如下两种可能结果:

| 结果 | 概率 |
|---|---|
| 得到 10000 美元 | 0.3 |
| 得到 30000 美元 | 0.7 |

得到 $M$ 千美元的效用由效用函数 $U(M)=\sqrt{M+6}$。为了期望效用最大化你会作出何种选择?

12.35.* 再考虑 12.34。你不能肯定得到一定数量钱的真实效用函数,因此你将构建一个效用函数。到目前为止,你发现得到 19000 美元和 30000 美元的效用是 $U(19)=16.7$,$U(30)=20$。你还发现父母给出的两种选择对你是无差异的。使用这些信息求出 $U(10)$。

12.36. 你希望构建得到 $M$ 千美元的效用函数。设置 $U(0)=0$ 后,你又设置 $U(1)=1$ 作为得到 1000 美元的效用。下一步你想找出 $U(10)$ 和 $U(5)$。

a. 你给自己假定了下面两个选择:

$A_1$:以概率 $p$ 获得 10000 美元。
以概率 $(1-p)$ 获得 0。
$A_2$:一定能获得 1000 美元。

然后你问自己这样一个问题:什么样的 $p$ 使得这两个选择对你来说无差异?你的回答是 $p=0.125$。求出 $U(10)$。

b. 然后将第二个选择改为确定能获得 5000 美元,重复 a。使得两种选择无差异的 $p$ 值为 $p=0.5625$。求出 $U(5)$。

c. 使用你个人对 $p$ 的选择,重复 a 和 b。

12.37. 你有如下的损益表:

| 备择方案 | 自然状态 | |
|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ |
| $A_1$ | 25 | 36 |
| $A_2$ | 100 | 0 |
| $A_3$ | 0 | 49 |
| 先验概率 | $p$ | $(1-p)$ |

a. 假设你的收益效用函数为 $U(x)=\sqrt{x}$。在一张图中画出不同 $p$ 值对应的每一种备择方案的期望效用。对于每一种备择方案,找出使得这个方案带来期望效用最大化的 $p$ 值的范围。

A　b. 现在假设你的效用函数是指数效用函数,风险容忍度 $R=50$。以 $p=0.25$、$p=0.5$、$p=0.75$ 使用 TreePlan 构建并求解决策树。

12.38. 斯威则医生有一个病得很重的病人,但是查不出是什么病。医生已经将病症的范围缩小到两个选择,疾病 A 和疾病 B。基于目前所拥有的证据,她认为这两种选择可能性相同。

除了已经做过的测试,没有其他测试可以证明这个病是 B。有一个可以检测 A 的测试方法,但是有两个主要问题。第一,这个测试非常贵。第二,这个测试具有一定的不可靠性,只有 80% 的准确度。因此对于生有疾病 A 的患者,它有 80% 的概率得到阳性的检测结果。对于实际上生有疾病 B 的患者,它有 20% 的概率得到阳性的检测结果。

疾病 B 是一种非常严重的疾病,没有治疗方法。它有时是致命的,而那些生存下来的人在糟糕的身体状况中忍受痛苦的折磨。其预诊的结果与疾病 A 相似。然而对于患有疾病 A 的病人来说,治疗并脱离险情的费用十分昂贵。这种治疗可以使他们恢复健康。不幸的是,这是一种相对激进疗法。如果患者实际患有疾病 B,它总是会导致死亡。

这个病人预诊每一种结果的概率分布如下表所示。每一列的标题(除了第一列)表示了病人患有的疾病:

| 结　果 | 概　率 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 不治疗 | | 接受对疾病 A 的治疗 | |
| | A | B | A | B |
| 死亡 | 0.2 | 0.5 | 0 | 1.0 |
| 活下来,但身体糟糕 | 0.8 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| 恢复健康 | 0 | 0 | 0.5 | 0 |

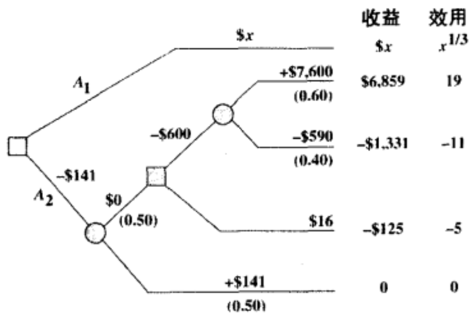
病人对于各种可能结果的效用如下:

| 结　果 | 效　用 |
|---|---|
| 死亡 | 0 |
| 活下来,但身体糟糕 | 10 |
| 恢复健康 | 30 |

另外,如果进行对疾病 A 的检验,效用增加 -2。如果病人(或代理人)要求进行对疾病 A 的治疗,效用增加 -1。

使用完整的决策树进行决策分析,决定病人是否应当进行对疾病 A 的检验以及如何采取下一步的措施(是否接受对疾病 A 的治疗?)使得病人的期望效用最大。

12.39. 考虑下面的决策树,括号中显示了每一个事件节点的概率。




每一条树枝旁的美元数量是这条树枝产生的现金流,这些中间的现金流相加得到末端树枝右边的总净现金流(最顶上树枝的未知量用变量 $x$ 表示)。决策者的效用函数为:$U(y)=y^{1/3}$,这里 $y$ 是末端树枝后面的总净现金流。由此得到的各末端树枝的效用显示在决策树的右边。

用这些效用分析决策树。然后找出 $x$ 为多少时决策者在备择方案 $A_1$ 和 $A_2$ 上是无差异的。

12.40. 再考虑 12.9 节中使用效用对高富布鲁克公司的案例分析。

a. 从图 12.29 所示的决策树开始(包含在本章的某个 Excel 文件中),通过按下面要求条件扩展和组织的电子表格准备进行敏感性分析:(1)将一部分中的数据和结果相结合;(2)在另一部分中使用后验概率的 Excel 模板(和图 12.18 做法相似)。

b. 当有石油的先验概率为 0.15、0.2、0.3、0.35 时,通过求解决策树(再使用后验概率的 Excel 模板对这些概率进行修改后)进行敏感性分析。

12.41. 从表 12.10 列出的决策分析应用中选出一个,阅读相应期号的 Interfaces 中描述这个应用的文章(这些文章可以在 www.mhhe.com/hillier2e/articles 下载)。对其应用以及获得的收益写一篇两页纸的总结。

12.42. 从表 12.10 列出的决策分析应用中选出三个,阅读相应期号的 Interfaces 中描述这个应用的文章(这些文章可以在 www.mhhe.com/hillier2e/articles 下载)。对每一个案例的应用以及获得的收益写一篇一页纸的总结。

# 案例 12.1 明智的选择

当厄尔尼诺正在加州北部倾泻大雨时,夏洛特·罗斯坦,克雷布罗索夫特(Cerebrosoft)的创建人,主要股东,CEO,坐在她的办公室里,考虑对她的公司的新产品 Brainet 的决策问题。这是一个非常困难的决策。Brainet 可能会成为焦点并热销。然而,夏洛特正在考虑涉及到的风险。她是否应当继续前进,组织营销攻势?或者放弃这个产品?或者在决定推出产品前从一个当地的市场调查公司购买更多的市场调查信息?必须尽快地作出决策,因此当她在慢慢地喝高蛋白多维生素桔子汁时,她想起了过去几年的事。

Cerebrosoft 是由夏洛特和两个朋友在从商学院毕业后建立起来的。这个公司位于硅谷的中心。夏洛特和她的两个朋友使得公司在第二年开始盈利并且保持到现在。Cerebrosoft 是第一批在万维网上销售软件的公司之一,并且为多媒体部件开发了基于 PC 的软件工具。公司的两种产品创造了 80% 的收入:Audiatur 和 Videatur。去年每一种产品的销售量都超过了 100000 个单位。业务是在网上进行的:顾客可以下载软件的试用版,在试用后如果顾客对他们所看到的表示满意,他们可以购买产品(通过使用一个口令停止试用版中时间计数器的工作)。这两种产品的售价都为 75.95 美元,全部在网上销售。

尽管万维网连接不同类型、使用不同软件的计算机,一个计算机间的标准化的协议使得它们可以

互相通信。使用者可以在网上冲浪，访问几千英里外的计算机，在网页上获得信息。使用者还可以在网上发布信息，这就是 Cerebrosoft 开展销售的途径。在网上销售软件消除了许多消费品的传统成本：包装、存储、分销、雇用销售力量等。潜在顾客可以下载试用版，在使用期限结束前了解一下（也就是使用产品），然后决定是否购买。此外，Cerebrosoft 总是能够提供给顾客最新的文件，免去分销渠道中过时软件产生的问题。

夏洛特被杰妮·可恩的到来打断了思路。杰妮负责管理在线营销，并且从一开始她就对 Brainet 特别关注。她早已经准备好为夏洛特提供所需的建议。“夏洛特，我认为我们真的应当推出 Brainet。软件工程师们已经使我确信现在的版本非常有用，我们需要尽可能快地抢占市场！从过去两年我们推出产品的有关数据来看，我们可以得到市场对新产品反应的相当可靠的估计。你不这样认为吗？看看这个。”她拿出一些作陈述用的幻灯片。“在那一个时期里我们总共推出了 12 种新产品，其中 4 种产品的销售量在头六个月就超过了 30000 个单位！还有更好的：我们推出的最后两种产品的销售量在头两个季度甚至超过了 40000 个拷贝！”夏洛特和杰妮同样清楚这些数据。毕竟这些产品中有两种是在她的亲自帮助下开发推出的。但她对这个产品的推出没有把握。在过去三年公司快速发展，财务能力已经相当有限。Brainet 的推出失败会使公司损失大量的钱，由于 Cerebrosoft 目前的投资，这样的损失是公司无法承担的。

下午晚些时候，夏洛特与瑞杰·赖纷，生产经理，一个万事通，进行了会晤。瑞杰在他的领域有相当不错的记录，夏洛特想知道他对 Brainet 项目的看法。

“夏洛特，坦白地说，我认为这个项目的成功与三个主要因素有关：竞争、销售量、成本——啊，当然，我们的定价。你已经定好了价格了吗？”

“我还在考虑三种战略中哪一种可以为我们带来最大的收益。以 50 美元的价格销售，使收入最大化——或者以 30 美元的价格销售，使市场份额最大化。当然还有第三个选择：以 40 美元销售，使二者兼得。”

这时，瑞杰正聚精会神于他面前的一张纸。“我仍然认为以 40 美元的价格销售的选择是最好的。考虑到成本，我检查了一下记录。我们必须在销售中分摊我们花在 Brainet 上的开发费用。到目前为止，我们已经花费了 800000 美元，我们估计每年还需要花费 50000 美元用于支持和运送 CD 到需要软件硬拷贝的顾客那里。”瑞杰接下来给了夏洛特一份报告。“我们有一些这个行业的数据。我昨天才得到，刚刚出版的。让我们看看能从行业中得到什么启示。”他给夏洛特看了一些重要部分。瑞杰同意将这份报告中的相关信息整理一下，第二天早上给夏洛特。他一直干到深夜，从这份报告中搜集数据。最后他总结出三个表格，每一个表格用于一种定价战略。每一个表格显示了在其他公司的竞争影响下（激烈、中等、温和）不同的销售量对应的概率。

**表 1　高价格下（50 美元）销售量的概率分布**

| 销售量 | 竞争水平 | | |
| --- | --- | --- | --- |
| | 激　烈 | 中　等 | 温　和 |
| 50000 个单位 | 0.2 | 0.25 | 0.3 |
| 30000 个单位 | 0.25 | 0.3 | 0.35 |
| 20000 个单位 | 0.55 | 0.45 | 0.35 |

**表 2　中等价格下（40 美元）销售量的概率分布**

| 销售量 | 竞争水平 | | |
| --- | --- | --- | --- |
| | 激　烈 | 中　等 | 温　和 |
| 50000 个单位 | 0.25 | 0.3 | 0.4 |
| 30000 个单位 | 0.35 | 0.4 | 0.5 |
| 20000 个单位 | 0.4 | 0.3 | 0.1 |

**表 3　低价格下(30 美元)销售量的概率分布**

| 销售量 | 竞争水平 | | |
|---|---|---|---|
| | 激　烈 | 中　等 | 温　和 |
| 50000 个单位 | 0.35 | 0.40 | 0.5 |
| 30000 个单位 | 0.40 | 0.50 | 0.45 |
| 20000 个单位 | 0.25 | 0.10 | 0.05 |

第二天早晨,夏洛特正在喝另一种机能饮料。杰妮和瑞杰马上就会到办公室来。在他们的帮助下,她将要对如何处理 Brainet 作出决策。他们是否应该推出这个产品?如果推出,价格应该定在什么水平上?

当杰妮和瑞杰一走进办公室,杰妮马上告诉夏洛特:"伙伴们,我刚刚联系过我们的营销调查公司。他们说他们能够在一星期内为我们提供关于推出 Brainet 面临的竞争状况和销售结果的研究报告。"

"他们为这个研究开价多少?"

"我知道你要问这个,瑞杰。他们要 10000 美元。我认为这是一笔合算的交易。"

这时夏洛特加入了谈话。"我们有这家营销调查公司的工作质量数据吗?"

"是的,我这里有一些报告。通过对他们的分析,我得出结论,这家营销调查公司的预测相当不错:对于激烈竞争的情况,他们有 80% 的概率能够准确预测,有 15% 的概率预测为中等竞争水平。对于中等竞争水平的情况,他们有 80% 的概率能够准确预测,有 15% 的概率预测为激烈竞争。最后,对于温和竞争的情况,他们有 90% 的概率能够准确预测,有 7% 的概率预测为中等竞争水平,有 7% 的概率预测为激烈竞争。"

夏洛特对这些数据感到厌烦。"我们就没有一个关于市场反应的简单估计吗?"

"你是说一些简单的先验概率?当然有,从我们过去的经验来看,面对激烈竞争的可能性是 20%,70% 的可能性是中等水平的竞争,10% 的可能性是温和的竞争。"杰妮总是能够在需要的时候提供数据。

现在坐下来完成下面的工作:

a. 对于原始的分析,不考虑雇用营销调查公司获得更多的信息。明确备择方案和自然状态,构建损益表。然后用一个决策树将这个决策问题表示出来。明确区分决策节点和事件节点并包含所有的相关数据。

b. 如果夏洛特使用最大可能性准则,她的决策是什么?使用等可能性准则呢?

c. 如果夏洛特使用贝叶斯决策规则,她的决策是什么?

d. 现在考虑进行市场调查的可能性。做出相应的决策树。计算相关的概率并分析决策树。Cerebrosoft 是否应当花 10000 美元进行营销调查?总的最优策略是什么?

# 案例 12.2　智能辅助驾驶系统

5 月份一个阳光灿烂的早晨,马克·宾顿,Bay Area Automobile Gadgets(BAAG)的 CEO,步入位于旧金山的 Gates 大厦 40 层的会议室。BAAG 公司的办公室都在这幢大楼内。公司其他的执行官都已经到了。会议的日程上只有一个项目:计划一个研发项目,开发一个新的辅助驾驶系统(DSS)。布赖恩·黄,研发经理,正不安地走来走去。他要向众人通报他为 DSS 作出的研发战略。马克已经意识到 DSS 是公司的一个战略新产品。朱莉·奥可,营销副总裁,会在布赖恩后发表意见。他将给出涉及到推出 DSS 的关于目标市场、期望销售量和营销成本的信息。

BAAG 制造豪华轿车用的非音响电子设备。它由一群斯坦福毕业生建立。几年前公司卖出了它的第一批产品——一种基于全球定位卫星(GPS)的汽车导航系统。这种导航系统使用卫星确定汽车的确切位置,帮助驾驶员找到通往目的地的路。为了跟上技术的发展和满足顾客的需要,公司在过去的几年里为其导航设备添加了许多新的功能。结合 GPS 的最新发展和语音识别和显示技术,DSS 将成为一种全新的产品。马克坚决支持这种产品,因为它将给 BAAG 带来比亚洲和欧洲的竞争者更大的竞争优势。

辅助驾驶系统已经成为十多年来研究非常多的

领域。这些系统为驾驶员提供了大范围的信息，如方向、路况、最新交通流量等。信息的交换可以通过口头进行，也可以将信息文本投射到挡风玻璃上。它还可以帮助驾驶员躲避路上前面的汽车发现的障碍物（这些汽车将信息传递给后面的车辆）。马克想将这些特征和其他的技术结合到一个辅助系统中，这个系统将卖给汽车业中 BAAG 的顾客。

在所有的与会者就座后，布赖恩开始了他的陈述："马克要求我向你们通报辅助驾驶系统的开发状况。特别是道路扫描设备。这个设备的研究已经到达了一个需要决定我们继续研究还是停止研究的阶段。众所周知，这个设备是 DSS 的关键特征。我们已经集成了其他的设备，如基于 GPS 的定位导航系统。我们需要解决的问题是是否向道路扫描设备的基础研究提供资金。如果这项研究成功，接着我们要决定是否要以研究结果为基础开发一种产品。如果我们决定自己开发产品，产品开发过程有可能失败。在那种情况下，我们仍然可以将这项技术卖掉。在产品开发成功的情况下，我们还要决定是否向市场推出这个产品。如果我们决定不向市场推出开发出来的产品，我们还至少可以将作为我们成功研发工作结果的概念产品卖掉。这样做可以比仅仅卖出不成熟的技术获得更多的收益。另一方面，如果我们决定推出辅助驾驶系统，我们将会面临产品是否会被顾客接受的不确定性。"

"你完全把我弄糊涂了。"马克说。

马克斯，朱莉的助手，摇了摇头，嘀咕道："这些技术狂……"

布赖恩开始解释："对造成的混乱我表示道歉。让我们再来一遍，一步一步进行。"

"好想法——尽可能使每一步包含较少的内容。"朱莉明显不喜欢布赖恩的陈述方式。

"好的，我们面临的第一个决策是是否为道路扫描设备的研究投资。"

"研究要花费多少钱？"马克问道。

"我们的估计预算为 30000 美元。如果我们投资了这些钱，研究工作的结果也不太确定。我们的工程师估计成功的概率为 80%。"

"这是一个相当乐观的成功率，你不这样认为吗？"朱莉的评价带有一些讽刺。她仍然记得布赖恩上一个项目的惨重失败，一种指纹识别轿车安全系统。在花费了 50 万美元后，开发工程师得出结论：不可能以一个吸引人的价格生产出这种安全系统。

布赖恩感觉到了朱莉的敌意，于是进行了回击："在工程上，这种成功率很平常——对于营销我们无法确定……"

"下一步是什么？"马克打断了这个话题。

"噢，对不起。如果研究不成功，我们只能以现在的形式销售 DSS。"

"这种情况下利润估计为 200 万美元。"朱莉插话道。

"然而，如果研究成功，我们需要进行另一项决策，是否进入开发的下一个阶段。"

"如果那时我们不想开发产品，是否意味着我们只能销售现在这样的 DSS？"马克斯问道。

"是的，马克斯。将研究成果卖给 GM，我们将获得大约 200000 美元。他们的研究部门对我们的工作很感兴趣，他们为我们的发现开出了这个价码。"

"啊，这是一个好消息。"朱莉评论道。

布赖恩继续说："然而，如果在成功完成了研究阶段后我们决定开发新产品，我们将为这项任务再投资 800000 美元，失败的概率是 35%。"

"你是否在告诉我们要花费 800000 美元买一张有 35% 的概率失败的彩票？"朱莉问道。

"朱莉，不要关注损失，要关注潜在收益！这个博彩胜利的概率，正如你所说的，是 65%。我认为这个概率比普通的彩票高得多。"马克说。

"谢谢，马克。"布赖恩说，"当我们将那笔钱投资于开发后，我们有两种可能的结果：或者我们能成功开发出道路扫描设备，或者失败。如果我们失败了，我们仍然将以目前的形式销售 DSS 并将研究结果以 200000 美元卖给 GM。如果开发成功，我们需要决定是否向市场推出新产品。"

"如果产品开发成功我们为什么不将其推向市场呢？"马克问。

"这是个很好的问题。我的意思是我们可以决定自己不销售这个产品，而将销售权卖给其他公司，例如 GM。他们将为此付给我们 100 万美元。"

"我喜欢这些数据！"朱莉评价道。

"如果我们决定生产并销售这个产品，我们将会面对市场的不确定性。我想朱莉已经为我们准备了相关数据。谢谢。"

布赖恩坐了下来，而朱莉走上前进行她的陈述。马克斯操作计算机，一些彩色的幻灯片立即投射到她背后的墙上。

"谢谢布赖恩。这是我们从营销调查中整理出来的数据。我们的新产品在市场中的接受程度可以分为高、中、低三种情况。"朱莉指着投射到她后面的墙上的一些数据，"我们的估计表明，高接受水平会

带来 800 万美元的利润，中接受水平会带来 400 万美元的利润。在我们的顾客接受水平低的不走运的情况下，我们仍然期望得到 220 万美元的盈利。需要指出的是这些利润不包括营销和研发的附加费用。"

"你是说在最差的情况下我们还是可以获得比目前的产品更多的收益？"布赖恩问。

"是的，这就是我要说的。"

"推出带有道路扫描设备的 DSS 的预算是多少？"马克问。

"为此我们需要在利润估计中包含的费用的基础上再加 200000 美元。"朱莉回答道。

"新的 DSS 的接收水平高、中、低的概率是多少？"布赖恩问。

"我们可以从幻灯片的底部看到这些数据。"朱莉一边说一边转向身后的投影。市场接受水平高的概率为 30%，市场接受水平低的概率为 20%。

这时，马克回到他的座位上问："根据所有这些数据和信息，你们建议我们该怎样做？"

a. 用一个表格将费用和利润估计的数据组织起来。

b. 用决策树表述这个问题。将决策节点和事件节点清楚地区分开来。

c. 计算决策树中每一个节点的期望收益。

d. 根据贝叶斯决策规则，BAAG 的最优策略是什么？

e. 研究工作结果的全情报价值是多少？

f. 产品开发工作结果的全情报价值是多少？

g. 马克是一个风险回避型的决策者。通过一系列的面谈，得到他的货币效用函数为：

$$U(M) = \frac{1 - e^{-\frac{M}{12}}}{1 - e^{-\frac{1}{12}}}$$

这里 $M$ 是公司的净利润，单位为 10 万美元（例如 $M = 8$ 表示净利润为 800000 美元）。使用马克的效用函数，计算决策树中每一条末端树枝的效用。

h. 计算决策树中每一个节点的期望效用。

i. 以马克的效用函数为基础，BAAG 的最优策略是什么？

j. 以马克的效用函数为基础，研究工作结果的全情报价值是多少？

k. 以马克的效用函数为基础，产品开发工作结果的全情报价值是多少？

CHAPTER

# 13 预　测

## 学习目标

完成本章学习后,你应该掌握:

1. 描述一些重要的预测应用类型。
2. 掌握两种常用的衡量预测准确性的方法。
3. 考虑季节性因素,调整预测数据。
4. 描述一些使用历史数据来预测未来值的预测方法。
5. 手工或通过软件来应用这些方法。
6. 比较这些方法,明确每一种方法最适用的条件。
7. 描述并应用将要预测的数量值与其他一个或几个数量值联系起来的预测方法。
8. 描述几个运用专家判断的预测方法。
9. 掌握几个实践中经常使用的预测方法。

下一年的经济增长将会是多少? 股市走势如何? 利率将会是多少? 消费者偏好将会发生怎样的变化? 畅销的新产品会是什么?

预测能够回答所有这些问题。不幸的是这些答案都极有可能是错误的。没有人能够每一次都准确地预测未来。

尽管这样,任何企业未来是否成功很大程度上都取决于企业管理层在识别趋势和发展恰当战略方面的悟性。最出色企业中的佼佼者好像经常对何时改变策略有着第六感,以保持竞争领先一步。这些企业很少由于对产品的需求的错误评估而陷入困境,而其他许多企业却经常这样。预测的准确性能力造成了这样的差异。

当可以获得历史销售数据时,一些已经被证明正确的统计预测方法(statistical forecasting methods)通过运用这些数据,来对未来的需求进行预测。这种方法假设历史趋势会继续,然后管理者需要进行一些调整以反映目前市场的变化。

我们也可以获得一些仅使用专家判断的判断预测方法(judgmental forecasting method)。在只有很少或没有历史销售数据可

用,或者由于一些市场上的重要变化使得数据对于预测目的来说不可靠时,这些方法特别有用。

预测产品需求只是这些预测方法的一个重要应用,大量的应用会在第一节中进行考察。

13.2 节介绍了一个案例研究,这个案例会贯穿本章的大部分篇幅。13.3 节至 13.6 节主要讨论统计预测方法,13.7 节主要讨论判断预测方法,然后通过考察在美国企业中的实际预测活动做了本章总结。

## 13.1 预测的一些应用

现在我们介绍一些广泛运用预测的领域。在每一种情况下,我们会用一个或多个在公开发表的文章中所描述的实际例子来阐述预测的运用。如果你想了解更多的情况,你可以在这一节末尾的汇总表中找到文章的出处。

### 销售预测

所有销售产品的企业都需要对产品的需求进行预测。制造商需要知道生产多少;批发商和零售商需要知道储备多少货。对需求估计过低会导致失去许多销售机会,使顾客不满意,可能还会使竞争对手在市场上占得上风。另一方面,对需求估计太高的代价也是十分昂贵的,原因是:(1)过多的库存费用;(2)价格被迫下降;(3)不必要的生产和存储能力;(4)失去销售更能获利产品的机会。成功的营销和制造经理很清楚拥有一个好的销售预测的重要性。

**美力特黄铜制品公司**(Merit Brass)是一个家族所有的公司,供应管材、阀门及配件领域的上千种产品。1990 年,公司提出了一个强调将管理科学方法应用于统计销售预测和成品库存管理(两项十分关键的活动)的现代化项目。这个项目使得顾客服务(以产品可获得率衡量)得到改进,同时费用大幅降低。

一个西班牙主要的电力企业,Hidroeléctrica Español,开发并采用了一套管理科学模型来辅助管理水力发电的水库系统。这些模型是依靠对能源的需求(公司的销售)和水库流入量的预测来驱动的。一个复杂的统计预测模型被用来预测对能源的短期和长期的需求。一个水文预测模型提供了对水库流入量的预测。

航空公司现在非常依赖于在收取不看重价格的商务人员为旅行支付的高额票价的同时向其他人提供折扣票价以填满座位。座位的数目在不同的运费等级上如何分配的决策对利润最大化来说是关键的。例如美洲航空公司(American Airlines)就是使用对每一种票价需求的统计预测来做出这项决策的。

### 预测备件的需求

尽管有效的销售预测事实上对于任何一个公司都是关键的,一些组织还必须依赖于其他类型的预测。对备件需求的预测就是一个很好的例子。

许多公司都需要维持一定数量的备件库存,使得公司能够快速地维修自己的设备和销售或者租赁给用户的产品。在一些例子中,库存量是相当大的。例如 IBM 的备件库存价值达数十亿美元,包括几千种不同的备件。

对备件需求的过低估计可能会带来严重的后果。

与准备出售的成品库存一样，对备件库存的有效管理来自于获得对库存需求的可靠预测。尽管对需求的错误估计会导致不同类型的费用，但是没有比对备件需求的错误预测所造成后果更加严重的了。例如，一个航空公司如果没有了飞机继续飞行所需的备件的后果至少是要取消一次飞行。

为了保证几百架飞机的正常运行，美洲航空公司（American Airlines）维持了大量的备件库存，超过 5000 种不同的旋转部件（例如起落架和翼襟），平均价格达 5000 美元。当一架飞机的一个旋转部件损坏，库存中的对应部件会马上替换受损部件，使得飞机可以起飞。被替换的部件经修理后放入库存以备将来替换使用。

美洲航空公司使用一个基于计算机的称为旋转分配和计划系统（Rotatable Allocation and Planning System, RAPS）的系统来预测对旋转部件的需求，并帮助将这些部件分送到各个机场。这个统计预测使用了 18 个月的部件以及飞行小时的数据，以计划飞行小时为基础提前进行项目编制。

## 预测产品合格率

生产过程的合格品率是指达到质量标准的成品的百分比（可能经过返工），因此不可忽视。对于高科技产品来说，合格品率要远低于 100%。

如果对合格品率的预测以某种程度低于 100%，产量就有要以相应程度高于预定数量，以满足对可接受质量产品的订货。生产量和预定数量的差异称为可接受拒绝量（Reject allowance）。如果每一次生产的准备费用很高或只生产一次，可接受拒绝量就可能会很大。当然，也要避免过大的可接受拒绝量导致大量的生产浪费。

拒绝量的大小取决于对合格品率的预测。

对合格品率的可能预测对于选择一个可接受拒绝量的适当值很关键。

这是一个艾尔巴古微电子公司（Albuquerque Microelectronics Operation）的一个辐射硬化（radiation-hardened）芯片的专业制造商的例子。生产芯片的第一个步骤晶片制造，有一个连续但不稳定的合格品率。对于一件产品其合格品率在最初的几批中会很小（0 到 40%），以后会逐步上升到较高水平（35% 到 75%）。于是一种针对于这种上升趋势的统计预测方法就被使用来预测合格品率。

## 预测经济趋势

除了销售预测，运用预测手段最多的地方是对地区、国家甚至世界的经济趋势进行预测。下个季度国内生产总值会增长多少？明年呢？对通胀率的预测是多少？失业率、贸易收支平衡呢？

经济趋势预测统计模型［通常称为计量经济模型（econometric models）］已被大量美国及其他国家的政府机构、大学研究中心、大型企业及咨询公司所使用。这种模型通过使用历史数据来预测。这些计量经济模型考虑了推动经济发展的大量因素。一些模型包括了成百个变量和方程。然而除了它们的规模和范围，这些模型与一些用于销售预测的统计预测方法相似。

这些计量经济模型对于政府制定政策决策会有很大影响。例如，美国国会预算办公室（the U. S. Congressional Budget Office）提供的预测会对国会进行联邦预算起到很大的指导

作用。这些预测结果也为企业评估总体经济状况提供帮助。

规模较小的一个例子是,美国劳工部(US Department of Labor)与一家咨询公司签订了一项协议,开发失业保险经济预测模型(UIEFM),这个模型现在已经被全国各州的就业保障机构所使用。通过对基本经济因素如失业率、工资水平、失业保险所覆盖的劳动力人数等的预计,UIEFM 预测一个州要支付多少失业保险金。通过对州失业保险基金税收收入的预计,UIEFM 还能够预测基金 10 年的收支。因此,UIEFM 被证明在管理州失业保险系统及指导相关政策立法方面是极有价值的。

## 雇员需求预测

美国经济发展的主要趋势之一是把重点从制造业移向了服务业。越来越多的产品在国外生产(国外的劳动力便宜),然后再进口。同时越来越多的美国企业专注于提供服务产品(如旅游、娱乐、法律帮助、健康服务、金融、教育、设计、维护等)。对于这样的企业,预测“销售”变为对服务需求的预测,这又转化为对提供这些服务的雇员的需求预测。

例如美国目前发展最快的行业之一被称为呼叫中心。呼叫中心接入公众对某种特定服务的需求电话。根据呼叫中心的不同,提供的服务可能包括电话技术支持、旅行预定、实施电话订购、服务预订以及其他类型的辅助服务。目前美国有 350000 个呼叫中心,总投资超过 250 亿美元,年增长率为 20%。

与其他的服务机构一样,呼叫中心错误的雇员需求预测会导致严重的后果。应答电话的代理人太少了,会引起用户的不满,并可能丧失市场。代理人过多又会造成过高的人员成本。

2.1 节介绍了关于联合航空公司(United Airlines)雇员计划的管理科学研究。联合航空公司在它的 11 个预定处拥有超过 4000 名预定销售代理及支持人员,在 10 个最大的机场有大约 1000 名顾客服务代理人,一个计算机化的计划系统已被用来为这些雇员设计工作计划。尽管一些其他的管理科学技术(包括线性规划)也被应用于系统中,但是对雇员需求的统计预测仍是一个关键的部分。这个系统除了每年为公司节省超过 600 万美元的开支以外,还改进了顾客服务,减少了对直接人员的需求。

Taco Bell 是一家国际快餐公司,属下大约有 4000 家公司自己的或特许经营的餐厅。公司应用了许多管理科学技术来完善每个餐厅使用的制定工作日程和布置任务的劳工管理系统。劳工管理系统的一个关键组成部分是预测在餐厅营业期间每隔 15 分钟到达顾客的统计预测。这个系统每年节约了 1300 万美元的劳动成本,同时提高了顾客服务水平。

L. L. Bean 是一家高档户外用品及服饰的主要零售商。超过 70% 的销售是通过在公司的呼叫中心下达订单后完成的。呼叫中心提供了两个 800 号码,一个用于下达订单,另一个用于询问和反映问题。每个公司的代理人都为应答这两个 800 电话中的一个而接受了训练。因此,不同的统计预测模型被用于对两个 800 号码的人员的周需求量进行预测。经过精确改进的模型通过提高计划有效性每年为 L. L. Bean 公司节约了 30 万美元(下一节的案例研究主要基于这个应用)。

## 其　他

表 13.1 总结了这一节介绍的对统计预测模型的实际应用。最后一行详细介绍每一种应用的文章在 Interface 中的期刊号(这些文章能够在 www.mhhe.com/hillier2e/articles 上下载)。

表 13.1　统计预测方法的一些应用

| 组　　织 | 预测变量 | Interfaces 期号 |
|---|---|---|
| 美力特黄铜制品公司(Merit Brass Co.) | 最终产品的销售量 | 1～2 月,1993 |
| Hidroeléctrica Español | 能源需求 | 1～2 月,1990 |
| 美洲航空公司(American Airlines) | 不同等级座位的需求量 | 1～2 月,1992 |
| 美洲航空公司(American Airlines) | 维修飞机的备件需求量 | 7～8 月,1989 |
| 艾尔巴古微电子公司(Albuquerque Microelectronics) | 晶片的合格率 | 3～4 月,1994 |
| 美国劳工部(U.S. Department of Labor) | 失业保险支付额 | 3～4 月,1988 |
| 联合航空公司(United Airlines) | 代理处和机场的需求 | 1～2 月,1986 |
| Taco Bell | 顾客到达数量 | 1～2 月,1998 |
| L. L. Bean | 呼叫中心的人员需求 | 11～12 月,1995 |

所有这一节讨论的 5 种预测应用使用了下面几节中将要介绍的统计预测模型。还有其他的一些使用特殊技术的重要应用(包括天气预测、股市预测、新产品试销前的展望)这里将不进行讨论。

## 问题回顾

1. 当进行销售预测时,需求估计过低的后果是什么? 需求估计过高呢?
2. 当企业向用户租赁其产品时,何种预测方式能够为用户提供良好的维护服务?
3. 进行产品合格率预测的目的是什么?
4. 预测经济趋势的统计模型的一般名称是什么?
5. 当对呼叫中心的员工需求预测发生错误时,将会出现什么样的结果?

## 13.2　案例研究:计算机俱乐部仓库(CCW)问题

计算机俱乐部仓库(Computer Club Warehouse)(通常称为 CCW)通过与顾客电话下单确定价格(以及网上和传真下单)的方式销售各种计算机产品。其产品包括台式计算机、笔记本电脑、外围设备、附属硬件、备用品、软件(包括游戏)及与电脑相关的家具。公司每年几次将产品目录寄给用户及大量的未来顾客,还通过电脑杂志发行微型目录。这些目录明确地告知用户使用 800 免费电话下订单。这些电话被接入公司的呼叫中心。

### CCW 的呼叫中心

呼叫中心从不关闭。在繁忙的时段,它被大量的代理人挤满。他们的惟一工作是通过电话接受并处理顾客订单(规模较小的一个呼叫中心使用另一个 800 号码处理查询及问题反映。这里仅分析这个主要的呼叫中心)。

新的代理人在开始工作前接受为期一周的培训。这项培训将重点放在如何高效、周到地处理订单上。一个代理人处理每一个电话的平均期望时间不超过 5 分钟。记录被保留了下来,没有在试用期末达到目标的代理人将不再续聘。尽管代理人收入不低,工作带来的厌倦感及时间压力造成了相当高的人员流动率。

呼叫中心为接入电话提供了大量的电话线路。如果在电话到来时代理人正忙,电话会

进入等待队列,响起录音信息及音乐。如果所有的线路都在使用(即饱和),电话会响起忙音。

尽管一些遇到忙音或等待时间过长而挂断电话的用户会再次拨打电话直到拨通,但是许多客户并不会这样做的。因此拥有足够的值班代理人来使这种情况出现的次数最少是很重要的。另一方面,由于代理人的劳动力成本很高,CCW 试图避免有过多的代理人值班工作,造成他们有大量的空闲时间。

于是获得代理人需求的预测成了公司的当务之急。

## 呼叫中心经理莉迪亚·韦格

目前呼叫中心的经理是莉迪亚·安·韦格。作为商学院毕业的高材生,她在选择 CCW 之前被许多家顶级公司看中。由于她非常聪明,工作勤奋,她正在被培养准备进入 CCW 的高级管理层。

三年多之前莉迪亚受雇时,她被指派到现在的岗位上,目的是从最低层开始学习业务。呼叫中心被认为是整个 CCW 运作的神经中枢。

在莉迪亚到来之前,公司在呼叫中心的管理问题上十分棘手。订单处理效率低下,一些甚至发生了指示错误。雇员数量好像从未合适过。对雇员数量的调整一直是处于逆向调整过头的状况。用于记录雇员数量的数据也从未保留过,工作人员士气低落。

莉迪亚来了以后,所有的一切都改变了。她最初的行动之一是为雇员数水平的决策获取数据安装了程序。关键数据包含了详细的通话记录及每一位代理人所处理的呼叫量。工作效率大大提高了。尽管公司财务比较紧张(running a tight ship),莉迪亚以大手笔,对出色的工作表现进行了表扬和奖赏,士气大为高涨。

尽管莉迪亚为呼叫中心大为改进的运作满意,但她仍然有一个大的挫折。在每个季度末,当她知道有多少代理人在试用期末将不再续聘时,她要决定雇用多少新的代理人加入下一轮的培训(培训在每个季度初开始)。她开发了一个不错的估计程序来决定处理这一定的通话量需要多少员工。然而当她每一次在预测呼叫量的基础上使用这个程序为下一个季度设置雇员数水平时,这个预测通常被证明是完全错误的。因此她始终没有获得正确的雇员数水平。

莉迪亚认为下一个项目应当开发更好的预测模型以取代目前的模型。

## 莉迪亚目前的预测模型

多亏了莉迪亚到来不久后就设置的数据搜集程序,现在已经有了过去 3 年的可靠的呼叫量数据。图 13.1 显示了这些年每个季度日平均接到的电话数。图的右边以图表的方式显示了这些数据[此图表用左边的数据生成,选择“插入(Insert)”菜单下的“图表(Chart)”,再选择“折线图(Line chart)”,然后根据图表向导的提示进行]。

注意,每年第四个季度的业务量由于圣诞采购而跳到了一个很高的水平。当莉迪亚加入到 CCW 时,总裁告诉了她一个“25% 规则”,公司一直用它来预测呼叫量(以及销售量)。

25% 规则(the 25 Percent Rule):由于除了圣诞节期间业务量猛增之外,其他时间的业务量相对稳定。假设每个季度的呼叫量与上一个季度相同,第四季度有 25% 的上升除外。于是有:

二季度预测量 = 一季度呼叫量

三季度预测量 = 二季度呼叫量

四季度预测量 = 1.25(三季度呼叫量)

**CCW's Average Daily Call Volume**

| Year | Quarter | Call Volume |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 6,809 |
| 1 | 2 | 6,465 |
| 1 | 3 | 6,569 |
| 1 | 4 | 8,266 |
| 2 | 1 | 7,257 |
| 2 | 2 | 7,064 |
| 2 | 3 | 7,784 |
| 2 | 4 | 8,724 |
| 3 | 1 | 6,992 |
| 3 | 2 | 6,822 |
| 3 | 3 | 7,949 |
| 3 | 4 | 9,650 |

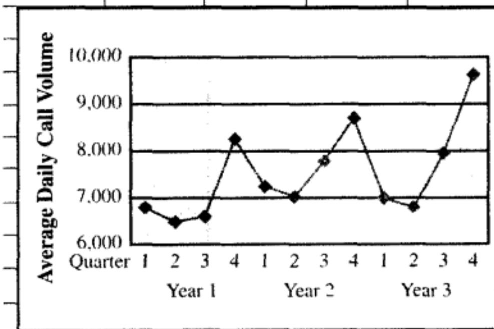



**图 13.1**　过去三年中每个季度 CCW 日接到的平均电话数。

下一年一季度的预测量将从这一年第四季度的呼叫量得到：

$$下一年一季度的预测量 = \frac{四季度电话费}{1.25}$$

这就是莉迪亚一直使用的预测模型。

图 13.2 显示了莉迪亚使用这个方法得到的预测结果。F 列给出了每一个预测误差（实际呼叫量与预测值之差）。由于 11 个预测数据的总误差是 4662，平均误差为：

$$平均预测误差 = \frac{4662}{11} = 424$$

> MAD 是平均预测误差的简称。

平均预测误差通常称为 MAD，表示平均绝对差异，公式是：

$$MAD = \frac{预测误差之和}{预测次数}$$

因此在这个案例中单元格 I5 给出了：

$$MAD = 424$$

考察一下 MAD = 424 这个值。注意 424 超过了多数季度日平均呼叫量的 5%。预测误差最高达到 1127，有两处的误差超过了 10%。尽管这样大小的误差对于一般的预测应用来说是很正常的，但对于这个特定的应用需要更高的精度。5% 到 10% 的误差使得不可能设置适当的季度雇员数水平。难怪莉迪亚为了 25% 规则的差劲表现而近乎发疯。公司需要更好的预测方法。

另外一个衡量预测准确性的指标是均方差，简称 MSE。它的公式是

> MSE 是预测误差平方的平均值。

$$MSE = \frac{预测误差的平方和}{预测次数}$$

因此，在图 13.2 中，

**Lydia's Current Forecasting Method for CCW's Average Daily Call Volume**

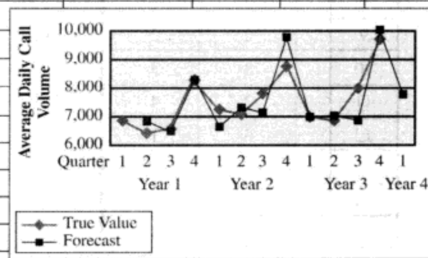
| | Year | Quarter | Data | Forecast | Forecasting Error |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 1 | 6,809 | | |
| 6 | 1 | 2 | 6,465 | 6,809 | 344 |
| 7 | 1 | 3 | 6,569 | 6,465 | 104 |
| 8 | 1 | 4 | 8,266 | 8,211 | 55 |
| 9 | 2 | 1 | 7,257 | 6,613 | 644 |
| 10 | 2 | 2 | 7,064 | 7,257 | 193 |
| 11 | 2 | 3 | 7,784 | 7,064 | 720 |
| 12 | 2 | 4 | 8,724 | 9,730 | 1,006 |
| 13 | 3 | 1 | 6,992 | 6,979 | 13 |
| 14 | 3 | 2 | 6,822 | 6,992 | 170 |
| 15 | 3 | 3 | 7,949 | 6,822 | 1,127 |
| 16 | 3 | 4 | 9,650 | 9,936 | 286 |
| 17 | 4 | 1 | | 7,720 | |
| 18 | 4 | 2 | | | |
| 19 | 4 | 3 | | | |
| 20 | 4 | 4 | | | |

Mean Absolute Deviation

MAD = 424

Mean Square Error

MSE = 317,815




| Range Name | Cells |
|---|---|
| Data | D5:D20 |
| Forecast | E5:E20 |
| ForecastingError | F5:F20 |

| | E | F |
|---|---|---|
| 3 | | Forecasting |
| 4 | Forecast | Error |
| 5 | | |
| 6 | =D5 | =ABS(D6-E6) |
| 7 | =D6 | =ABS(D7-E7) |
| 8 | =1.25*D7 | =ABS(D8-E8) |
| 9 | =D8/1.25 | =ABS(D9-E9) |
| 10 | =D9 | =ABS(D10-E10) |
| 11 | : | : |
| 12 | : | : |

| | H | I |
|---|---|---|
| 5 | MAD = | =AVERAGE(ForecastingError) |

| | H | I |
|---|---|---|
| 8 | MSE = | =SUMSQ(ForecastingError)/ COUNT(ForecastingError) |

图 13.2　这个电子表格记录了将 25% 规则应用于过去三年来预测下一个季度的呼叫量。

$$\text{MSE} = \frac{(344)^2 + (104)^2 + \cdots + (286)^2}{11} = 317815$$

一个严重的预测误差将会大大地增加 MSE 的值。

如单元格 I8 中所示。将预测误差平方的好处在于它相对增大了大误差的权重。即使用最好的预测方法也不能避免小误差,因为这些误差不会带来严重后果,因此减小它们的误差是可行的。是预测的大误差导致了严重后果,因此对那些偶尔会导致预测大误差的预测方法给予惩罚,而给那些一般保持小误差的预测方法给予奖励是合理的。当比较这两种方法时,很有可能 MAD 值小的方法反而有较大的 MSE 值。因此,MSE 是对 MAD 的一种很好的补充,它告诉我们预测方法是否能防止大的预测误差。但是比起 MAD,MSE 有缺点,就是对单个预测方法,MSE 值的大小不能说明什么问题。因此莉迪亚(对两种方法都很熟悉)将会着重用 MAD 方法,同时也不忘记使用 MSE 方法。

## 寻找一个更好的预测方法的计划

莉迪亚在大学里上过管理科学课。她想起课程有一个专题是预测。于是她决定看看关

于这个专题的教科书和课堂笔记。

通过复习她知道了她正在处理一个叫做时间序列的问题。

**时间序列**(Time Series)是指所关心的数量在一段时间里的一系列观察值。例如图 13.1 所显示的最近 12 个季度日平均呼叫量的系列观察值就组成了一个时间序列。

她还记起有大量的统计方法可以用来以时间序列的历史数据预测序列的下一个值。她现在的任务就是复习一下这些方法,并评估哪一种方法对她的特定预测问题是最合适的。

为了帮助自己在几个星期里完成这项任务,莉迪亚获得了 CCW 总裁的同意,与一位专门从事预测的管理科学咨询公司的咨询员(以前的同学)签订了服务合同。

下一节将介绍他们是如何解决问题的。

### 问题回顾

1. 计算机俱乐部仓库 (CCW)是如何运作的?
2. 当 CCW 呼叫中心值班代理人不足时会出现什么后果? 如果人太多又会带来什么后果?
3. 谁是呼叫中心的经理? 她目前遇到最大的挫折是什么?
4. CCW 的 25% 规则是什么?
5. MAD 是什么?
6. 什么叫时间序列?

## 13.3 运用时间序列预测方法进行案例分析

上一节的图 13.1 体现了 CCW 的呼叫量的季节变化模式,由于圣诞采购第四季度呼叫量猛增。因此在考虑特定的预测模型前,莉迪亚和咨询员先讨论了如何处理季节因素。

### 考虑季节因素

许多年来,CCW 一直有一个传统的观点:一年中前三个季度的呼叫量(销售量)十分稳定,在第四个季度会一跃而上升 25%。这是 25% 规则的基础。

Excel 模板以月份或季度为基础计算季节性因子。

为了检验传统观点与现实的接近程度,咨询员使用图 13.1 给出的数据计算过去三年中每个季度的平均日呼叫量。例如,第一季度的平均日呼叫量为:

$$\text{平均日呼叫量(第一季度)} = \frac{6809 + 7257 + 6992}{3} = 7019$$

四个季度的平均日呼叫量如表 13.2 第二列所示。在表的底部,计算出四个季度的总平均值为 7529。用每一个季度的平均数除以这个总平均值得到第三列所示的季节性因子。

一般来说,一年中任何一个时期(一个季度、一个月等)的**季节性因子**(Seasonal Factors)表示了将期间平均数与整个年份的总平均数相比较的结果。使用历史数据时,季节性因子用如下公式计算:

$$\text{季节性因子} = \frac{\text{期间平均数}}{\text{总平均数}}$$

管理科学课件中包含了一个 Excel 模板,用于计算季节性因子。图 13.3 表示了如何将

这个模板应用于 CCW 问题。

**表 13.2 计算 CCW 问题中的季节性因子**

| 季　度 | 三年的平均值 | 季节性因子 |
|---|---|---|
| 1 | 7019 | $\frac{7019}{7529}=0.93$ |
| 2 | 6784 | $\frac{6784}{7529}=0.90$ |
| 3 | 7434 | $\frac{7434}{7529}=0.99$ |
| 4 | 8880 | $\frac{8880}{7529}=1.18$ |
| | 总和 = 30117<br>平均值 $=\frac{30117}{4}=7529$ | |

请注意前三个季度季节性因子的显著差异。第三个季度的季节性因子明显高于前两个季度。这一点引起了莉迪亚的注意。她一直怀疑学生开学前的采购会为第三季度的销售量带来一个小幅度的提高。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Estimating Seasonal Factors for CCW** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | **True** | | | |
| 4 | | **Year** | **Quarter** | **Value** | | **Type of Seasonality** | |
| 5 | | 1 | 1 | 6,809 | | Quarterly | |
| 6 | | 1 | 2 | 6,465 | | | |
| 7 | | 1 | 3 | 6,569 | | | |
| 8 | | 1 | 4 | 8,266 | | | **Estimate for** |
| 9 | | 2 | 1 | 7,257 | | **Quarter** | **Seasonal Factor** |
| 10 | | 2 | 2 | 7,064 | | 1 | 0.9323 |
| 11 | | 2 | 3 | 7,784 | | 2 | 0.9010 |
| 12 | | 2 | 4 | 8,724 | | 3 | 0.9873 |
| 13 | | 3 | 1 | 6,992 | | 4 | 1.1794 |
| 14 | | 3 | 2 | 6,822 | | | |
| 15 | | 3 | 3 | 7,949 | | | |
| 16 | | 3 | 4 | 9,650 | | | |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| SeasonalFactor | G10:G21 |
| TrueValue | D5:D41 |
| TypeOfSeasonality | F5 |

| | G |
|---|---|
| 8 | **Estimate for** |
| 9 | **Seasonal Factor** |
| 10 | =AVERAGE(D5,D9,D13)/AVERAGE(TrueValue) |
| 11 | =AVERAGE(D6,D10,D14)/AVERAGE(TrueValue) |
| 12 | =AVERAGE(D7,D11,D15)/AVERAGE(TrueValue) |
| 13 | =AVERAGE(D8,D12,D16)/AVERAGE(TrueValue) |

**图 13.3** 管理科学课件中用于计算季节性因子的模板应用于 CCW 问题。

与25%规则相比,第四季度的季节性因子仅比第三季度高19个百分点(然而第四季度的季节性因子比前三个季度的季节性因子的平均值0.94高出大约25%)。

尽管没有近三年以前的呼叫量数据,但可靠的销售量数据被保存了下来。通过检查前几年的数据,莉迪亚发现了相同的季节影响模式。

**结论**:表13.2给出的季节性因子准确地体现了季节之间细微而又重要的差异。因此这些季节性因子将取代25%规则,用于对季节因素影响的估计,直到将来数据表明季节因素的影响发生了变化为止。

## 季节调整的时间序列

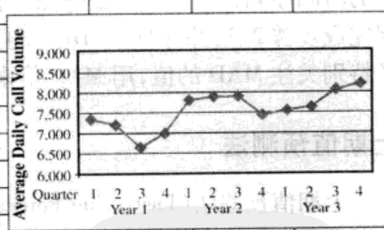
如果先对数据进行去除季节因素影响的处理,再分析销售量数据,则发现新的趋势会容易得多。为了消除图13.1所示时间序列的季节因素影响,每一个日平均呼叫量需要除以表13.2及图13.3给出的季节性因子。公式为:

$$去除季节因素影响的呼叫量=\frac{实际电话量}{季节性因子}$$

将这个公式应用于图13.1所示的12个呼叫量,得到了图13.4的Excel中F列给出的去除季节因素影响的呼叫量。

实际上去除季节因素影响的呼叫量表示了如果在一年的特定时间(圣诞采购、开学前采购等)的呼叫量平均分配到整个年度时呼叫量将会是多少。比较图13.4及图13.1的折

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Seasonally Adjusted Time Series for CCW | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | Seasonal | Actual | Seasonally Adjusted |
| 4 | | Year | Quarter | Factor | Call Volume | Call Volume |
| 5 | | 1 | 1 | 0.93 | 6,809 | 7,322 |
| 6 | | 1 | 2 | 0.90 | 6,465 | 7,183 |
| 7 | | 1 | 3 | 0.99 | 6,569 | 6,635 |
| 8 | | 1 | 4 | 1.18 | 8,266 | 7,005 |
| 9 | | 2 | 1 | 0.93 | 7,257 | 7,803 |
| 10 | | 2 | 2 | 0.90 | 7,064 | 7,849 |
| 11 | | 2 | 3 | 0.99 | 7,784 | 7,863 |
| 12 | | 2 | 4 | 1.18 | 8,724 | 7,393 |
| 13 | | 3 | 1 | 0.93 | 6,992 | 7,518 |
| 14 | | 3 | 2 | 0.90 | 6,822 | 7,580 |
| 15 | | 3 | 3 | 0.99 | 7,949 | 8,029 |
| 16 | | 3 | 4 | 1.18 | 9,650 | 8,178 |




| | F |
|---|---|
| 3 | Seasonally Adjusted |
| 4 | Call Volume |
| 5 | =E5/D5 |
| 6 | =E6/D6 |
| 7 | =E7/D7 |
| 8 | =E8/D8 |
| 9 | : |
| 10 | : |

图13.4 通过将用图13.1的实际日平均呼叫量除以图13.3中相应的季节性因子得到CCW问题的季节调整时间序列。

线图。在注意到图 13.4 的折线图有较少的纵向差异后,我们可以看到图 13.4 的折线图有着比图 13.1 小得多的波动,这是因为去除了季节因素影响的结果。然而这个折线图形还远未达到水平的程度,因为产生呼叫量的波动除了季节因素影响外还有别的因素的影响。例如热销的新产品引起了一阵呼叫量的飙升。寄出产品目录后,呼叫量也会有一个上升。还有一些没有明显原因的随机波动。图 13.4 使得我们可以看到并分析没有季节因素影响的情况下销售量的波动。

**季节调整**的时间序列(Seasonally Adjusted Time Series)的波动形式(特别是最近的数据点的波动形式)对预测下一个数据点落在什么地方特别有用。在图 13.4 中,数据点都落在 6635 到 8178 之间,平均数为 7529。而最后一些数据有高于平均数向上的趋势,最后一点是整个时间序列中最高的一点。这表明即将到来的下一个季度的数据点会高于平均数 7529,并可能在最后一点 8178 附近甚至更高。

各种时间序列预测方法采用不同的途径来外推去除季节因素影响的时间序列的趋势,以预测下一个数据点。这一节将介绍主要的几种方法。

就像下面的概要一样,在得到了去除季节因素影响的预测之后,所有这些方法将再把预测结果转化为实际的呼叫量预测值(没有季节因素调整)。

## 预测呼叫量过程的概要

> 如果不需要季节调整,你可以省去第 3 步,从原始的时间序列直接获得预测。

1. 选择时间序列预测方法。
2. 将此方法用于经过季节调整的时间序列,得到下一个季度季节调整的呼叫量预测。①
3. 将这个预测值乘以表 13.2 中相应的季节性因子,得到实际的预测呼叫量(没有季节因素调整)。

下面对预测方法的描述集中于如何实现第二步,也就是如何根据给定的时间序列预测下一个数据点。我们还在每一种方法中使用电子表格,以过去三年的数据完成步骤 2、3,并计算 MAD(平均预测误差)和 MSE(平均预测误差方差)。莉迪亚和咨询员特别关注 MAD 的值,用 MAD 值来评估哪一种方法最适于预测 CCW 的呼叫量。

## 上期值预测法

上期值预测法(Last-value Forecasting Method)忽略了除最后一个数据点外的时间序列的所有数据点。它使用最后的一个值作为下一个数据点的预测值,于是公式非常简单:

$$预测值 = 上期值$$

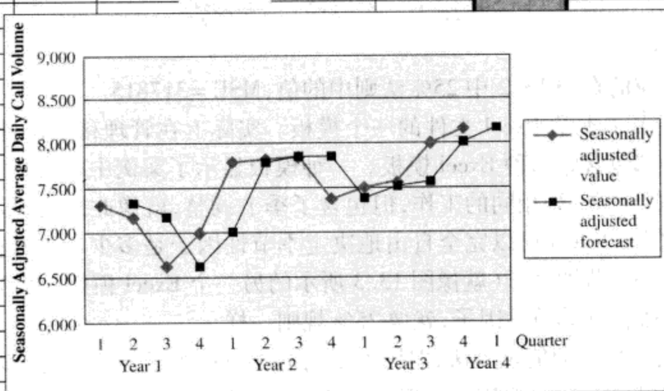
图 13.5 表示了将这个方法应用到过去三年 CCW 的数据中会发生什么样的情况(假设使用表 13.2 给出的季节性因子)。E 列给出了图 13.4F 列经季节调整后的呼叫量实际值。每个值都成为下一个季节的季节调整预测值,如 F 列所示。

第 22 到 33 行显示了 E 列和 F 列数据的折线图。注意,季节调整预测值的折线图与季节调整呼叫量的折线图完全相同。只是向右移动了一个季度。因此每一次呼叫量有一个大的涨落的时候,预测值要晚一个季度跟上这个变动。

---

① 预测也能外推到以后几个季度,但我们仅关注下一个季度的情况。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Last-Value Forecasting Method with Seasonality for CCW | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | Seasonally | Seasonally | | | | | |
| 4 | | | | True | Adjusted | Adjusted | Actual | Forecasting | | | |
| 5 | | Year | Quarter | Value | Value | Forecast | Forecast | Error | | | Type of Seasonality |
| 6 | | 1 | 1 | 6,809 | 7,322 | | | | | | Quarterly |
| 7 | | 1 | 2 | 6,465 | 7,183 | 7,322 | 6,589 | 124 | | | |
| 8 | | 1 | 3 | 6,569 | 6,635 | 7,183 | 7,112 | 543 | | Quarter | Seasonal Factor |
| 9 | | 1 | 4 | 8,266 | 7,005 | 6,635 | 7,830 | 436 | | 1 | 0.93 |
| 10 | | 2 | 1 | 7,257 | 7,803 | 7,005 | 6,515 | 742 | | 2 | 0.90 |
| 11 | | 2 | 2 | 7,064 | 7,849 | 7,803 | 7,023 | 41 | | 3 | 0.99 |
| 12 | | 2 | 3 | 7,784 | 7,863 | 7,849 | 7,770 | 14 | | 4 | 1.18 |
| 13 | | 2 | 4 | 8,724 | 7,393 | 7,863 | 9,278 | 554 | | | |
| 14 | | 3 | 1 | 6,992 | 7,518 | 7,393 | 6,876 | 116 | | | |
| 15 | | 3 | 2 | 6,822 | 7,580 | 7,518 | 6,766 | 56 | | | |
| 16 | | 3 | 3 | 7,949 | 8,029 | 7,580 | 7,504 | 445 | | | |
| 17 | | 3 | 4 | 9,650 | 8,178 | 8,029 | 9,475 | 175 | | | |
| 18 | | 4 | 1 | | | 8,178 | 7,606 | | | | |
| 19 | | 4 | 2 | | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | | | | Mean Absolute Deviation | |
| 23 | | | | | | | | | | MAD = | 295 |
| 25 | | | | | | | | | | Mean Square Error | |
| 26 | | | | | | | | | | MSE = | 145,909 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| ActualForecast | G6:G30 |
| ForecastingError | H6:H30 |
| MAD | K23 |
| MSE | K26 |
| SeasonalFactor | K9:K20 |
| SeasonallyAdjustedForecast | F6:F30 |
| SeasonallyAdjustedValue | E6:E30 |
| TrueValue | D6:D30 |
| TypeOfSeasonality | K6 |

| | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|
| 3 | Seasonally | Seasonally | | |
| 4 | Adjusted | Adjusted | Actual | Forecasting |
| 5 | Value | Forecast | Forecast | Error |
| 6 | =D6/K9 | | | |
| 7 | =D7/K10 | =E6 | =K10*F7 | =ABS(D7-G7) |
| 8 | =D8/K11 | =E7 | =K11*F8 | =ABS(D8-G8) |
| 9 | =D9/K12 | =E8 | =K12*F9 | =ABS(D9-G9) |
| 10 | =D10/K9 | =E9 | =K9*F10 | =ABS(D10-G10) |
| 11 | =D11/K10 | =E10 | =K10*F11 | =ABS(D11-G11) |
| 12 | : | : | : | : |
| 13 | : | : | : | : |

| | J | K |
|---|---|---|
| 23 | MAD = | =AVERAGE(ForecastingError) |

| | J | K |
|---|---|---|
| 26 | MSE = | =SUMSQ(ForecastingError)/COUNT(ForecastingError) |

**图 13.5** 管理科学课件中带有季节调整的上期值方法的 Excel 模板应用于 CCW 问题。

用 K 列中相应的季节性因子乘以 F 列的季节调整预测值得到 G 列所示的实际呼叫量预测值(无季节调整)。预测值与 D 列中的实际呼叫量的差异给出了 H 列的预测误差。

因此 G 列使用如下公式:

$$实际预测值 = 季节性因子 \times 季节调整预测值$$

图的底部也给出了这个公式。例如单元格 K9 给出了第一季度的季节调整因子为 0.93,G10 中第二年第一季度的呼叫量实际预测值为:

$$实际预测值 = (0.93)(7005) = 6515$$

由于呼叫量的实际值是 7257,故单元格 H10 表示的该季度预测误差为:

$$预测误差 = 7257 - 6515 = 742$$

将所有 11 个季度的预测误差相加得到总和 3246,单元格 K23 中平均预测误差为:

$$MAD = \frac{3246}{11} = 295$$

将这个结果与莉迪亚使用 25% 规则得到的 MAD = 424 形成了对比(像上一节描述的一样)。

同样,平均预测误差方差在单元格 K26 中计算如下:

$$MSE = \frac{(124)^2 + (543)2 + \cdots + (175)^2}{11} = 145909$$

这个值同样也小于相应的在图 13.2 中 25% 法则中的值,MSE = 317815。

除了图形,图 13.5 显示了本章 Excel 文件的一个模板。实际上在管理科学课件中,本节介绍的每一种预测方法都包含有两种 Excel 模板。一种模板显示了案例中所有不需要季节调整的计算,另一种完成与第一种相同的工作,但包含了季节调整,就像此图所显示的那样。在使用第二种类型的模板时,你可以完全自由地决定季节性因子是多少。一种选择是以历史数据为基础计算这些季节性因子(就像图 13.3 所示的另一个 Excel 模板一样),另一种选择是以过去经验为基础估计季节性因子,就像 25% 规则一样。

实际上 25% 规则也是一种上期值预测法,但用了不同的季节性因子。由于这个规则认为第四季度的电话量平均起来比第三季度多 25%,它的季节性因子是第一、二、三季度 0.94,第四季度 1.18(比 0.94 多 25 个百分点)。因此图 13.5 所示的较低的 MAD 值完全依赖于表 13.2 得到的季节性因子。

莉迪亚非常兴奋地看到了仅仅通过调整季节性因子带来的巨大改进。但咨询员很快提了个醒儿。图 13.5 得到的预测值使用了与计算季节性因子所使用的相同的数据,这使得这些因子对旧的数据的表现要比新的数据(未来的呼叫量)好。幸运的是莉迪亚也已经检验了更老的销售数据以确定这些季节性因子是准确的。咨询员也认为这些因子应该可以给 25% 规则带来相当大的改进。

> 这个方法适用于当条件变化迅速时。

上期值预测法有时称为天真的方法(Naive Method),因为统计学家认为当有更多的相关数据可用时,仅选择单样本的做法是天真的。然而当条件变化迅速时,上期值可能是在目前状况下预测下一个值的惟一相关数据点。因此并不天真的经理们的确有时在这种情况下使用这个方法。

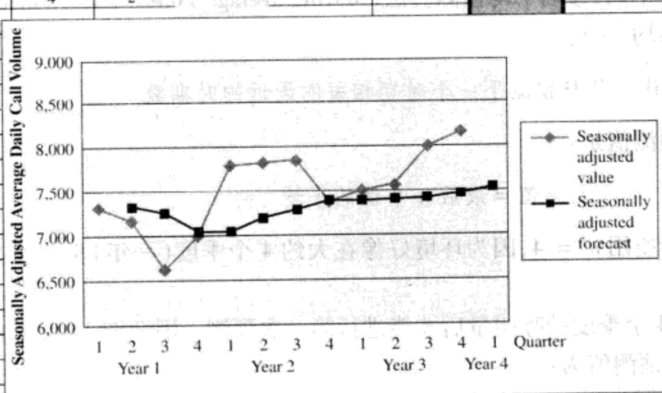
## 平均值预测方法

**平均值预测方法**(Averaging Forecasting Method)走了另一个极端。这种方法使用了时间序列的全部数据点,而非一个,并简单地求了平均值。所以下一个数据点的预测值为:

$$预测值 = 所有数据求平均值$$

使用相应的 Excel 模板将这个方法应用于过去三年 CCW 的这个问题,给出图 13.6 中 F 列所示的季节调整预测值。在图的底部写入 F 列每个单元格的公式就是对 E 列单元格前几行数据求平均。图的中部显示了三个季节调整预测值与实际季节调整的折线图。注意每个预测值都是前几个呼叫量的平均数。因此每当呼叫量有大的涨落时,预测值跟上这个变化非常慢。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Averaging Forecasting Method with Seasonality for CCW | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | Seasonally | Seasonally | | | | | |
| 4 | | | | True | Adjusted | Adjusted | Actual | Forecasting | | | |
| 5 | | Year | Quarter | Value | Value | Forecast | Forecast | Error | | | Type of Seasonality |
| 6 | | 1 | 1 | 6,809 | 7,322 | | | | | | Quarterly |
| 7 | | 1 | 2 | 6,465 | 7,183 | 7,322 | 6,589 | 124 | | | |
| 8 | | 1 | 3 | 6,569 | 6,635 | 7,252 | 7,180 | 611 | | Quarter | Seasonal Factor |
| 9 | | 1 | 4 | 8,266 | 7,005 | 7,047 | 8,315 | 49 | | 1 | 0.93 |
| 10 | | 2 | 1 | 7,257 | 7,803 | 7,036 | 6,544 | 713 | | 2 | 0.90 |
| 11 | | 2 | 2 | 7,064 | 7,849 | 7,190 | 6,471 | 593 | | 3 | 0.99 |
| 12 | | 2 | 3 | 7,784 | 7,863 | 7,300 | 7,227 | 557 | | 4 | 1.18 |
| 13 | | 2 | 4 | 8,724 | 7,393 | 7,380 | 8,708 | 16 | | | |
| 14 | | 3 | 1 | 6,992 | 7,518 | 7,382 | 6,865 | 127 | | | |
| 15 | | 3 | 2 | 6,822 | 7,580 | 7,397 | 6,657 | 165 | | | |
| 16 | | 3 | 3 | 7,949 | 8,029 | 7,415 | 7,341 | 608 | | | |
| 17 | | 3 | 4 | 9,650 | 8,178 | 7,471 | 8,816 | 834 | | | |
| 18 | | 4 | 1 | | | 7,530 | 7,003 | | | | |
| 19 | | 4 | 2 | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | | | | Mean Absolute Deviation | |
| 23 | | | | | | | | | | MAD = | 400 |
| 24 | | | | | | | | | | | |
| 25 | | | | | | | | | | Mean Square Error | |
| 26 | | | | | | | | | | MSE = | 242,876 |
| 27 | | | | | | | | | | | |
| 28 | | | | | | | | | | | |
| 29 | | | | | | | | | | | |
| 30 | | | | | | | | | | | |
| 31 | | | | | | | | | | | |
| 32 | | | | | | | | | | | |
| 33 | | | | | | | | | | | |
| 34 | | | | | | | | | | | |
| 35 | | | | | | | | | | | |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| ActualForecast | G6:G30 |
| ForecastingError | H6:H30 |
| MAD | K23 |
| MSE | K26 |
| SeasonalFactor | K9:K20 |
| SeasonallyAdjustedForecast | F6:F30 |
| SeasonallyAdjustedValue | E6:E30 |
| TrueValue | D6:D30 |
| TypeOfSeasonality | K6 |

| | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|
| 3 | Seasonally | Seasonally | | |
| 4 | Adjusted | Adjusted | Actual | Forecasting |
| 5 | Value | Forecast | Forecast | Error |
| 6 | =D6/K9 | | | |
| 7 | =D7/K10 | =AVERAGE(E$6:E6) | =K10*F7 | =ABS(D7-G7) |
| 8 | =D8/K11 | =AVERAGE(E$6:E7) | =K11*F8 | =ABS(D8-G8) |
| 9 | =D9/K12 | =AVERAGE(E$6:E8) | =K12*F9 | =ABS(D9-G9) |
| 10 | =D10/K9 | =AVERAGE(E$6:E9) | =K9*F10 | =ABS(D10-G10) |
| 11 | =D11/K10 | =AVERAGE(E$6:E10) | =K10*F11 | =ABS(D11-G11) |
| 12 | : | : | : | : |
| 13 | : | : | : | : |

| | J | K |
|---|---|---|
| 23 | MAD = | =AVERAGE(ForecastingError) |

| | J | K |
|---|---|---|
| 26 | MSE = | =SUMSQ(ForecastingError)/COUNT(ForecastingError) |

**图 13.6**　管理科学课件中带有季节调整的平均值方法的 Excel 模板应用于 CCW 问题。

将 F 列的季节调整预测值乘以 K 列对应的季节性因子得到 G 列所示实际呼叫量预测值。通过 H 列给出的相应预测误差得到使用该方法的平均预测误差(单元格 K23)为:

$$\text{MAD} = 400$$

大大高于用上期值预测法得到的 295。同样,平均预测误差方差在单元格 K26 中显示为:

$$\text{MSE} = 242876$$

这也大大高于用上期值预测法得到的 145909。

> 平均数预测法适用于环境稳定的情况下,CCW 案例不是这种情况。

莉迪亚非常惊讶,因为她认为平均数应当比单样本更好。咨询员也认为平均数在时间序列中环境稳定的情况下表现得应该好得多。然而图中表明过去三年中影响 CCW 呼叫量的环境变化相当大。第二年呼叫量比第一年大一些,第三年有一个跳跃式的上升,显然是广受欢迎的新产品投放了市场。因此,在第二年、第三年情况变化的条件下第一年的数据对预测来说没有什么联系。在总平均中包含第一年的数据会使得每一次对第二、第三年的预测都偏低,有时偏低量很大。

## 移动平均预测方法

与使用无关的旧数据不同,移动平均预测方法(Moving-average Forecasting Method)仅对最近一段时期的数据求平均。令:

$n$ = 被认为是与预测下一个时期相关的最近的时期数

于是下一个时期的预测值是:

预测值 = 最后 $n$ 个值的平均

莉迪亚和咨询员决定使用 $n = 4$,因为环境好像在大约 4 个季度(一年)里保持相对的稳定。

由于 $n = 4$,在得到 4 个季度的呼叫量后才能进行第一次预测。因此图 13.7 中单元格 F10:F12 的初始季节调整预测值为:

$$\text{第二年一季度:季节调整预测值} = \frac{7322 + 7183 + 6635 + 7005}{4} = 7036$$

$$\text{第二年二季度:季节调整预测值} = \frac{7183 + 6635 + 7005 + 7803}{4} = 7157$$

$$\text{第二年三季度:季节调整预测值} = \frac{6635 + 7005 + 7803 + 7849}{4} = 7323$$

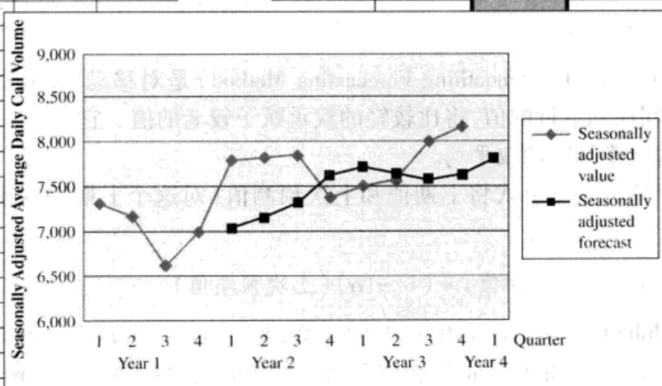
注意预测值是怎样通过去掉一个观察值(最旧的一个)并加上一个新的值(最近的观察值)更新得到的。

图 13.7F 列显示了用图底部的方程得到的所有季节调整预测值。对于每个预测值,注意折线图中它是前四个呼叫量(经过季节调整)的平均数。于是每当呼叫量有一个大的变动时,预测要经过四个季度才能够跟上这个变化(这时另一个变动可能已经发生了)。H 列表示的预测误差平均值是:

$$\text{MAD} = 437$$

甚至包括 25% 规则在内，它的 MAD 也是目前为止所有方法中最高的。平均预测误差

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Moving-Average Forecasting Method with Seasonality for CCW** | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | Seasonally | Seasonally | | | | | |
| 4 | | | | True | Adjusted | Adjusted | Actual | Forecasting | | Number of previous | |
| 5 | | Year | Quarter | Value | Value | Forecast | Forecast | Error | | periods to consider | |
| 6 | | 1 | 1 | 6,809 | 7,322 | | | | | $n$ = | 4 |
| 7 | | 1 | 2 | 6,465 | 7,183 | | | | | | |
| 8 | | 1 | 3 | 6,569 | 6,635 | | | | | | Type of Seasonality |
| 9 | | 1 | 4 | 8,266 | 7,005 | | | | | | Quarterly |
| 10 | | 2 | 1 | 7,257 | 7,803 | 7,036 | 6,544 | 713 | | | |
| 11 | | 2 | 2 | 7,064 | 7,849 | 7,157 | 6,441 | 623 | | Quarter | Seasonal Factor |
| 12 | | 2 | 3 | 7,784 | 7,863 | 7,323 | 7,250 | 534 | | 1 | 0.93 |
| 13 | | 2 | 4 | 8,724 | 7,393 | 7,630 | 9,003 | 279 | | 2 | 0.90 |
| 14 | | 3 | 1 | 6,992 | 7,518 | 7,727 | 7,186 | 194 | | 3 | 0.99 |
| 15 | | 3 | 2 | 6,822 | 7,580 | 7,656 | 6,890 | 68 | | 4 | 1.18 |
| 16 | | 3 | 3 | 7,949 | 8,029 | 7,589 | 7,513 | 436 | | | |
| 17 | | 3 | 4 | 9,650 | 8,178 | 7,630 | 9,004 | 646 | | | |
| 18 | | 4 | 1 | | | 7,826 | 7,279 | | | | |
| 19 | | 4 | 2 | | | | | | | | |
| 25 | | | | | | | | | | Mean Absolute Deviation | |
| 26 | | | | | | | | | | MAD = | 437 |
| 28 | | | | | | | | | | Mean Square Error | |
| 29 | | | | | | | | | | MSE = | 238,816 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| ActualForecast | G6:G30 |
| ForecastingError | H6:H30 |
| MAD | K26 |
| MSE | K29 |
| NumberOfPeriods | K6 |
| SeasonalFactor | K12:K23 |
| SeasonallyAdjustedForecast | F6:F30 |
| SeasonallyAdjustedValue | E6:E30 |
| TrueValue | D6:D30 |
| TypeOfSeasonality | K9 |

| | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|
| 3 | Seasonally | Seasonally | | |
| 4 | Adjusted | Adjusted | Actual | Forecasting |
| 5 | Value | Forecast | Forecast | Error |
| 6 | =D6/K12 | | | |
| 7 | =D7/K13 | | | |
| 8 | =D8/K14 | | | |
| 9 | =D9/K15 | | | |
| 10 | =D10/K12 | =AVERAGE(E6:E9) | =K12*F10 | =ABS(D10-G10) |
| 11 | =D11/K13 | =AVERAGE(E7:E10) | =K13*F11 | =ABS(D11-G11) |
| 12 | =D12/K14 | =AVERAGE(E8:E11) | =K14*F12 | =ABS(D12-G12) |
| 13 | =D13/K15 | =AVERAGE(E9:E12) | =K15*F13 | =ABS(D13-G13) |
| 14 | =D14/K12 | =AVERAGE(E10:E13) | =K12*F14 | =ABS(D14-G14) |
| 15 | =D15/K13 | =AVERAGE(E11:E14) | =K13*F15 | =ABS(D15-G15) |
| 16 | : | : | : | : |
| 17 | : | : | : | : |

| | J | K |
|---|---|---|
| 26 | MAD = | =AVERAGE(ForecastingError) |

| | J | K |
|---|---|---|
| 29 | MSE = | =SUMSQ(ForecastingError)/COUNT(ForecastingError) |

图 13.7 管理科学课件中带有季节调整的移动平均方法的 Excel 模板应用于 CCW 问题。

方差也更好一些：

$$MSE = 238816$$

这比用平均值法略低，比用25%规则低很多，但是仍然明显高于上期值预测法。

莉迪亚对这个令人吃惊的高的MAD值十分困惑。移动平均方法看起来好像是一种合情合理的预测方法，比先前方法更合理（它仅仅使用近期的历史数据，并使用多个观察值）。那么为什么它会表现得这么差？

当环境在几个时期内保持不变时，移动平均方法是一个非常好的预测方法。

咨询员解释说，当环境在 $n$ 个时期内（本案例中为4个季度）保持不变时，这的确是一个非常好的预测方法。例如季节调整的呼叫量在第二年及第三年上半年保持了相当的稳定。于是预测误差在六个季度后降至68（单元格H15）。然而当环境变化很大时，如同第二年初和第三年中期的大跳跃，接下来的几个预测误差就会变得十分大。

因此移动平均方法对环境变化大的响应有些慢。一个原因是它为时间序列的过去的 $n$ 个值赋予了相同的权重，尽管较老的数据在目前的情况下与新的观察值相比较缺乏代表性。

下一个方法弥补了这个权重上的缺陷。

## 指数平滑预测方法

**指数平滑预测方法**（Exponential Smoothing Forecasting Method）是对移动平均方法的改进，将最重的权重赋予时间序列最近的值，将比较轻的权重赋予较老的值。它使用一个简单的公式获得结果而不必每次都计算加权平均。

计算时间序列下一个值的预测公式将上期值和上次预测值（对这个上期值的预测值）结合起来：

$$\text{预测值} = \alpha(\text{上期值}) + (1 - \alpha)(\text{上次预测值})$$

这里 $\alpha$（希腊字母 Alpha）是一个介于0和1的常数，称为平滑常数（Smoothing Constant）。例如对于时间序列中上期值（不是整个CCW时间序列）为24，最后一次预测值为20，$\alpha = 0.5$ 时：

$$\text{预测值} = 0.25(24) + 0.75(20) = 21$$

环境变化越快，平滑常数 $\alpha$ 值选取的越大（但不能大于1）。

当你确定了 $\alpha$ 值后，在管理科学课件中的两种Excel模板（有季节调整的和没有季节调整的）可以应用这个公式产生对一个时间序列的一系列的预测（一个时期接着一个时期）。

平滑常数 $\alpha$ 值的选取对预测的影响很大，因此选取时必须要小心。小的 $\alpha$ 值（如 $\alpha = 0.1$）适合于环境相对稳定的情况。较大的 $\alpha$ 值（如 $\alpha = 0.3$）则适合于环境变化相对较快的情况。由于CCW季节调整时间序列变动频繁，莉迪亚和咨询员认为取 $\alpha = 0.5$ 是个恰当的值（大多数情况下 $\alpha$ 取值在0.1至0.3之间，但在目前情况下可以使用更大的值）。

开始预测时没有上次预测值可以代入上面等式的右边。因此开始时要对时间序列的平均值做一个初始估计。这个初始估计值被用来作为第一个值的预测，然后公式就可以用来进行下一个值的预测。

CCW的呼叫量在过去三年里平均超过7500，而且第一年以前的业务量有显著的不同。

因此莉迪亚和咨询员决定：

$$初始估计值=7500$$

以这个值产生过去三年的预测值。前几个季节调整的呼叫量为 7322、7183 和 6635。故以 $\alpha=0.5$ 代入以上公式对下一个季度进行预测。前几个季节调整预测值为：

$$\begin{aligned}
&第一年一季度：季节调整预测值 = 7500\\
&第一年二季度：季节调整预测值 = 0.5(7322)+0.5(7500)=7411\\
&第一年三季度：季节调整预测值 = 0.5(7183)+0.5(7411)=7297\\
&第一年四季度：季节调整预测值 = 0.5(6635)+0.5(7297)=6966
\end{aligned}$$

为了弄清为什么这些预测值是时间序列值的加权平均，请看对第二、第三季度的预测值的计算。由于：

$$0.5(7322)+0.5(7500)=7411$$

对第三季度的预测可写为：

$$\begin{aligned}
季节调整预测值 &= 0.5(7183)+0.5(7411)\\
&= 0.5(7183)+0.5[0.5(7322)+0.5(7500)]\\
&= 0.5(7183)+0.25(7322)+0.25(7500)\\
&= 7297
\end{aligned}$$

同样第四季度的预测为：

$$\begin{aligned}
季节调整预测值 &= 0.5(6635)+0.5(7297)\\
&= 0.5(6635)+0.5[0.5(7183)+0.25(7322)+0.25(7500)]\\
&= 0.5(6635)+0.25(7183)+0.125(7322)+0.125(7500)\\
&= 6966
\end{aligned}$$

> 指数平滑预测方法对最近的值赋予大的权重，而较旧的值的权重快速下降。

故上一次预测为上期值赋予 0.5 的权重，倒数第二个值 0.25，再前一个值(第一次)0.125，余下的权重值给了初始估计值。对于其他 $\alpha$ 值，这些权重为 $\alpha$、$\alpha(1-\alpha)$、$\alpha(1-\alpha)^2$ 等。

因此选取 $\alpha$ 值相当于使用这个方式来选择加在时间序列之上的权重。在频繁变动的时间序列中对最近的值需要赋予大的权重，而较旧的值的权重快速下降。然而在相对稳定的时间序列中，将权重分配给许多值以获得大的样本容量是合适的做法。

对于 $\alpha$ 值的进一步理解，我们可以通过预测公式的一个变形来进行：

$$\begin{aligned}
预测值 &= \alpha(上期值)+(1-\alpha)(上次预测值)\\
&= \alpha(上期值)+上次预测值-\alpha(上次预测值)\\
&= 上次预测值+\alpha(上期值-上次预测值)
\end{aligned}$$

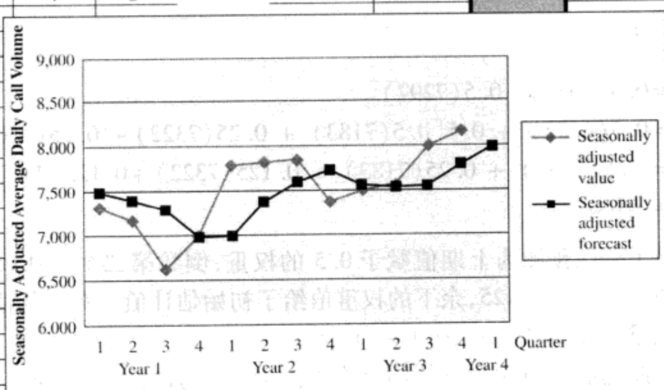
这里(上期值 - 上次预测值)的绝对值是上次预测的误差，因此公式的最终形式表明每一个新的预测是用加上或减去 $\alpha$ 倍的上次预测误差的方法对上次预测进行的调整。如果预测误差通常主要来自于时间序列值的随机波动，则调整时应使用较小的 $\alpha$ 值。当预测误差主要来自时间序列的变动时就应使用较大的 $\alpha$ 值进行快速的调整。

使用 $\alpha=0.5$，图 13.8 的 Excel 模板提供了以这个方法进行的 CCW 预测结果。第 22 行

至第 32 行显示了季节调整预测值和呼叫量的季节调整实际值的折线图。注意每个预测值介于上一次的呼叫量与预测值之间。因此每次呼叫量有大的波动时，预测能够快速跟上这个变动。单元格 K28 显示了 H 列中的平均预测误差为：

$$\text{MAD} = 324$$

| | B | C | D | E | F | G | H | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Exponential Smoothing Forecasting Method with Seasonality for CCW** | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | Seasonally | Seasonally | | | | |
| 4 | | | True | Adjusted | Adjusted | Actual | Forecasting | Smoothing Constant | |
| 5 | Year | Quarter | Value | Value | Forecast | Forecast | Error | α = | 0.5 |
| 6 | 1 | 1 | 6,809 | 7,322 | 7,500 | 6,975 | 166 | | |
| 7 | 1 | 2 | 6,465 | 7,183 | 7,411 | 6,670 | 205 | Initial Estimate | |
| 8 | 1 | 3 | 6,569 | 6,635 | 7,297 | 7,224 | 655 | Average = | 7,500 |
| 9 | 1 | 4 | 8,266 | 7,005 | 6,966 | 8,220 | 46 | | |
| 10 | 2 | 1 | 7,257 | 7,803 | 6,986 | 6,497 | 760 | | Type of Seasonality |
| 11 | 2 | 2 | 7,064 | 7,849 | 7,394 | 6,655 | 409 | | Quarterly |
| 12 | 2 | 3 | 7,784 | 7,863 | 7,622 | 7,545 | 239 | | |
| 13 | 2 | 4 | 8,724 | 7,393 | 7,742 | 9,136 | 412 | Quarter | Seasonal Factor |
| 14 | 3 | 1 | 6,992 | 7,518 | 7,568 | 7,038 | 46 | 1 | 0.93 |
| 15 | 3 | 2 | 6,822 | 7,580 | 7,543 | 6,789 | 33 | 2 | 0.90 |
| 16 | 3 | 3 | 7,949 | 8,029 | 7,561 | 7,486 | 463 | 3 | 0.99 |
| 17 | 3 | 4 | 9,650 | 8,178 | 7,795 | 9,199 | 451 | 4 | 1.18 |
| 18 | 4 | 1 | | | 7,987 | 7,428 | | | |
| 19 | 4 | 2 | | | | | | | |
| 27 | | | | | | | | Mean Absolute Deviation | |
| 28 | | | | | | | | MAD = | 324 |
| 30 | | | | | | | | Mean Square Error | |
| 31 | | | | | | | | MSE = | 157,836 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| ActualForecast | G6:G30 |
| Alpha | K5 |
| ForecastingError | H6:H30 |
| InitialEstimate | K8 |
| MAD | K28 |
| MSE | K31 |
| SeasonalFactor | K14:K25 |
| SeasonallyAdjustedForecast | F6:F30 |
| SeasonallyAdjustedValue | E6:E30 |
| TrueValue | D6:D30 |
| TypeOfSeasonality | K11 |

| | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|
| 3 | Seasonally | Seasonally | | |
| 4 | Adjusted | Adjusted | Actual | Forecasting |
| 5 | Value | Forecast | Forecast | Error |
| 6 | =D6/K14 | =InitialEstimate | =K14*F6 | =ABS(D6-G6) |
| 7 | =D7/K15 | =Alpha*E6+(1-Alpha)*F6 | =K15*F7 | =ABS(D7-G7) |
| 8 | =D8/K16 | =Alpha*E7+(1-Alpha)*F7 | =K16*F8 | =ABS(D8-G8) |
| 9 | =D9/K17 | =Alpha*E8+(1-Alpha)*F8 | =K17*F9 | =ABS(D9-G9) |
| 10 | =D10/K14 | =Alpha*E9+(1-Alpha)*F9 | =K14*F10 | =ABS(D10-G10) |
| 11 | =D11/K15 | =Alpha*E10+(1-Alpha)*F10 | =K15*F11 | =ABS(D11-G11) |
| 12 | : | : | : | : |
| 13 | : | : | : | : |

| | J | K |
|---|---|---|
| 28 | MAD = | =AVERAGE(ForecastingError) |

| | J | K |
|---|---|---|
| 31 | MSE = | =SUMSQ(ForecastingError)/COUNT(ForecastingError) |

图 13.8 管理科学课件中带有季节调整的指数平滑方法的 Excel 模板应用于 CCW 问题。

这明显小于先前的预测方法，除了上期值预测法给出的 MAD = 295 以外。同样对平均预测误差方差的值做了比较，在单元格 K31 中计算得：

$$MSE = 157836$$

莉迪亚对这一点感到有点沮丧。她需要一种方法使得平均预测误差大大低于 295。考虑到上期值预测法被认为是天真的方法，她曾期望这样一个被广泛接受而又复杂的指数平滑预测方法能够很容易地实现这一点。

咨询员也有点惊奇。但他指出指数平滑的 MAD = 324 与上期值预测的 MAD = 295 之间的差异太小，在统计上不具有显著性。如果在以后三年中使用同样这两种方法，指数平滑可能体现其优越性。莉迪亚对此并没有留下深刻的印象。

尽管咨询员没有准备告诉莉迪亚他正开始开发一种新的预测方法以满足她对预测精度的要求，但首先他还要再介绍一种时间序列预测方法。

为了给这种方法做准备，咨询员先解释了为什么在这个案例中指数平滑预测得不是很好的原因。请看图 13.8 所示的季节调整呼叫量折线图。注意在前三个季度有明显的下降趋势，而后两个季度有急剧上升的趋势，最后五个季度又有一个主要的上升趋势。同时注意两条折线在每一个趋势末尾的巨大差异（即大的预测误差）。产生这些大的误差的原因是指数平滑预测落后于这些趋势，因为它给靠近趋势开始的值赋予了相当大的权重。尽管有 $\alpha = 0.5$ 的帮助，指数平滑预测与上期值预测相比，还是落后于趋势较多。

下一个方法通过评估目前的趋势并将这个趋势延伸以帮助预测时间序列下一个值的方法对指数平滑进行了调整。

## 趋势性指数平滑

**趋势性指数平滑**（Exponential Smoothing With Trend）使用时间序列最近的数据来估计当前的向上或向下的趋势（Trend）。它是为图 13.9 所示的在一个很多个时期中（不需要很明确几个时期）有上升（下降）趋势的时间序列所特别设计的。这个图显示了几年当中某一州几个年中（mid-year）特定状况的估计值。图中的直线（通常称为趋势线）显示了时间序列遵循的基本趋势，但在线的两边有波动。由于案例中的趋势线是向上的，任何基于前面几种预测方法的预测将都会偏低。然而通过对这条趋势线目前斜率的估计及用这个斜率对预测进行调整，能够获得精确得多的预测值。这就是趋势性指数平滑的基本思想。

趋势定义为：

趋势 = 如果目前的方式延续，从一个时间序列值到另一个时间序列值的平均变化。

> 添加趋势估计使预测能与最新数据趋势保持一致。

对时间序列下一个值的预测公式则是通过在先前的方法上添加趋势估计修改得到的。新的公式是：

$$预测值 = \alpha(上期值) + (1-\alpha)(上次预测值) + 趋势估计$$

（下面单独的一个方框中介绍了如何将这个公式修改以预测超过一个时期的时间序列值。）

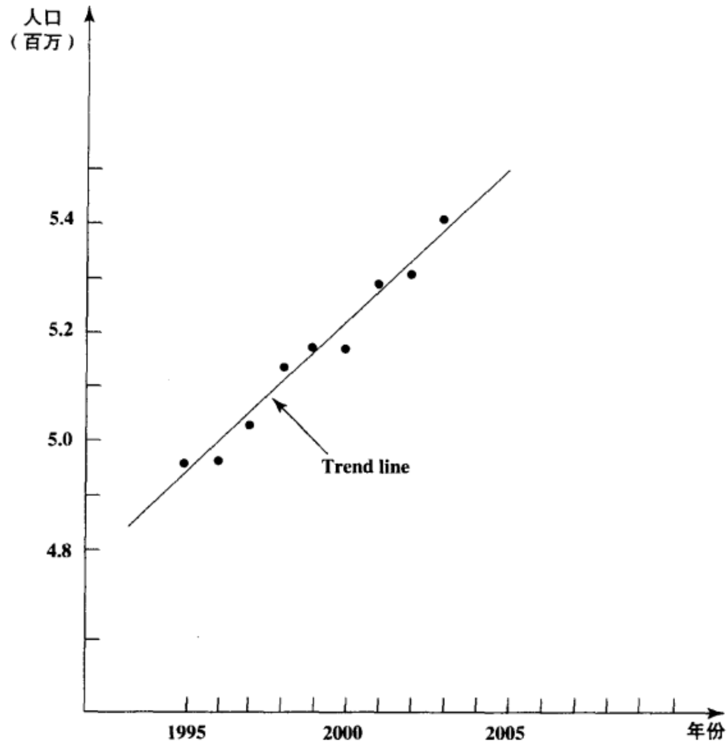



**图 13.9** 时间序列给出了在若干年中某种状况下的估计量。趋势线显示了这个数量基本的向上的趋势。

**提前超过一个时间段的预测**

我们已经讨论了许多关于预测下一个时期（CCW 案例中是季度）的情况的方法。然而管理人员有时需要预测更远的将来。怎样运用各种时间序列预测方法来完成这项工作呢?

在上期值、平均值、移动平均、指数平滑方法中，对下一个时期的预测方法也是对以后一系列时期的很好的预测方法。但当数据中有趋势时，在长期预测中将这个趋势考虑进去是重要的。趋势性指数平滑方法为此提供了一个途径。特别的，在确定了趋势估计后，对未来 $n$ 个时期后的预测为：

从现在开始的 $n$ 个时期后的预测 $=\alpha$(上期值) $+(1-\alpha)$(上次预测值) $+\ n\times$(趋势估计)

趋势平滑常数 $\beta$ 用于应用指数平滑来做趋势估计。

指数平滑也用于每一次得到或更新趋势估计。公式是：

趋势估计 $=\beta$(最近的趋势) $+(1\ -\beta)$(上次趋势估计)

这里 $\beta$（希腊字母 Beta）是趋势平滑常数（Trend Smoothing Constant），像 $\alpha$ 一样介于 0 和 1 之间。最近的趋势是指基于时间序列的最后两个值及最后两个预测值的趋势。公式为：

最近的趋势 $=\alpha$(上期值 − 倒数第二个值) + $(1\ -\ \alpha)$
(上次预测值 − 倒数第二个预测值)

在开始预测前先要做两个对时间序列状况的初始估计。这两个初始估计是：

1. 如果在开始预测前环境没有变化没有趋势时，对时间序列平均值的初始估计。
2. 在开始预测前对时间序列趋势的初始估计。

第一个时期的预测值为：

第一次预测值 = 平均值的初始估计 + 趋势的初始估计

第二次预测值可以从以上的公式中获得。趋势的初始估计被用作公式中的上次趋势估计，平均值的初始估计被用作最近的趋势公式中的倒数第二个值和倒数第二个预测值。接着，以上的公式就可以直接获得一系列预测值。

由于此方法的计算是相互关联的，通常用计算机完成计算。管理科学课件中包含两个此方法的 Excel 模板（有季节调整和无季节调整）。

趋势平滑常数 $\beta$ 的选取与 $\alpha$ 的选取类似。大的 $\beta$ 值（如 $\beta = 0.3$）对趋势的最近变化比较敏感，而较小的 $\beta$ 值（如 $\beta = 0.1$）使用更多的数据来估计趋势。

在 CCW 问题中试用了多组 $\alpha$ 和 $\beta$ 值之后，咨询员做出了结论，认为取 $\alpha = 0.3$、$\beta = 0.3$ 是最好的。这两个值都是常用范围（0.1 到 0.3）的最大值，但是 CCW 时间序列的频繁变化要求更大的值。然而由于在分析中考虑趋势能够使得对变化的响应更快，所以对先前方法中使用的 $\alpha = 0.5$ 作了减小的调整。

早先时候使用没有趋势性的指数平滑时，莉迪亚和咨询员选择 7500 作为季节调整的呼叫量平均值的初始估计。现在他们注意到在第二年以前的预测中，呼叫量没有明显的趋势，因此在进行趋势性指数平滑预测时，他们决定用：

平均值的初始估计 = 7500
趋势的初始估计 = 0

用这些初始估计处理在前几节给出的季节调整呼叫量得到下面的季节调整预测值：

第一年一季度：季节调整预测值 = 7500 + 0 = 7500
第一年二季度：最近的趋势 = 0.3(7322 − 7500) + 0.7(7500 − 7500) = −53.4
　　趋势估计 = 0.3(−53.4) + 0.7(0) = −16
　　季节调整预测值 = 0.3(7322) + 0.7(7500) − 16 = 7431
第一年三季度：最近的趋势 = 0.3(7183 − 7322) + 0.7(7431 − 7500) = −90
　　趋势估计 = 0.3(−90) + 0.7(−16) = −38.2
　　季节调整预测值 = 0.3(7183) + 0.7(7431) − 38.2 = 7318

> 当趋势突然发生变向时，预测值的趋势要用一些时间来改变方向。

图 13.10 的 Excel 模板显示了过去三年 12 个季度以及即将到来的一个季度的计算结果。图的中部显示了所有的季节调整的呼叫量及季节调整的预测值的折线图。注意每一个呼叫量向上或向下的趋势如何使得预测值以相同的方向逐渐变化。但是当呼叫量的趋势突然发生变向时，预测值的趋势用了两个季度来改变方向。J 列的预测误差给出了平均预测误差（单元格 M30）：

MAD = 345

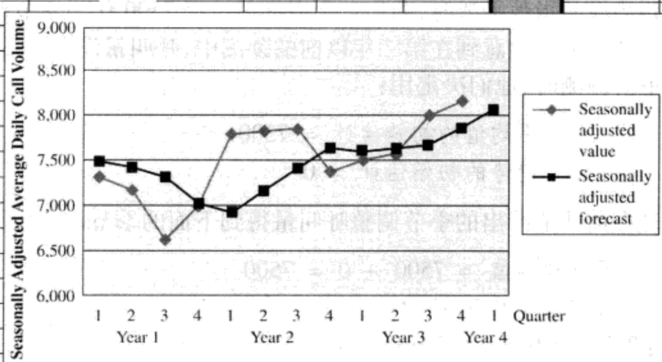
略高于普通指数平滑的 324 及上期值预测的 295。同样对平均预测误差方差的值在单元格 M33 中进行计算得：

MSE = 180796

同样比其他两种预测方法的 MSE 值略高。

表 13.3 总结了目前为止所有的预测方法的 MAD 值。下面是莉迪亚对趋势性指数平滑有比较大的 MAD 值的反应。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Exponential Smoothing with Trend Forecasting Method with Seasonality for CCW | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | Seasonally | | | Seasonally | | | | | |
| 4 | | | | True | Adjusted | Latest | Estimated | Adjusted | Actual | Forecasting | | Smoothing Constant | |
| 5 | | Year | Quarter | Value | Value | Trend | Trend | Value | Forecast | Error | | α = | 0.3 |
| 6 | | 1 | 1 | 6,809 | 7,322 | | 0 | 7,500 | 6,975 | 166 | | β = | 0.3 |
| 7 | | 1 | 2 | 6,465 | 7,183 | -54 | -16 | 7,430 | 6,687 | 222 | | | |
| 8 | | 1 | 3 | 6,569 | 6,635 | -90 | -38 | 7,318 | 7,245 | 676 | | Initial Estimate | |
| 9 | | 1 | 4 | 8,266 | 7,005 | -243 | -100 | 7,013 | 8,276 | 10 | | Average = | 7,500 |
| 10 | | 2 | 1 | 7,257 | 7,803 | -102 | -100 | 6,910 | 6,427 | 830 | | Trend = | 0 |
| 11 | | 2 | 2 | 7,064 | 7,849 | 167 | -20 | 7,158 | 6,442 | 622 | | | |
| 12 | | 2 | 3 | 7,784 | 7,863 | 187 | 42 | 7,407 | 7,333 | 451 | | | Type of Seasonality |
| 13 | | 2 | 4 | 8,724 | 7,393 | 179 | 83 | 7,627 | 9,000 | 276 | | | Quarterly |
| 14 | | 3 | 1 | 6,992 | 7,518 | 13 | 62 | 7,619 | 7,085 | 93 | | | |
| 15 | | 3 | 2 | 6,822 | 7,580 | 32 | 53 | 7,642 | 6,877 | 55 | | Quarter | Seasonal Factor |
| 16 | | 3 | 3 | 7,949 | 8,029 | 34 | 47 | 7,670 | 7,594 | 355 | | 1 | 0.93 |
| 17 | | 3 | 4 | 9,650 | 8,178 | 155 | 80 | 7,858 | 9,272 | 378 | | 2 | 0.90 |
| 18 | | 4 | 1 | | | 176 | 108 | 8,062 | 7,498 | | | 3 | 0.99 |
| 19 | | 4 | 2 | | | | | | | | | 4 | 1.18 |
| 20 | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | | | | | | |
| 25 | | | | | | | | | | | | | |
| 26 | | | | | | | | | | | | | |
| 27 | | | | | | | | | | | | | |
| 28 | | | | | | | | | | | | | |
| 29 | | | | | | | | | | | | Mean Absolute Deviation | |
| 30 | | | | | | | | | | | | MAD = | 345 |
| 31 | | | | | | | | | | | | | |
| 32 | | | | | | | | | | | | Mean Square Error | |
| 33 | | | | | | | | | | | | MSE = | 180,796 |
| 34 | | | | | | | | | | | | | |




| | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | Seasonally | | | Seasonally | | |
| 4 | Adjusted | Latest | Estimated | Adjusted | Actual | Forecasting |
| 5 | Value | Trend | Trend | Forecast | Forecast | Error |
| 6 | =D6/M16 | | =InitialEstimateTrend | =InitialEstimateAverage+InitialEstimateTrend | =M16*H6 | =ABS(D6-I6) |
| 7 | =D7/M17 | =Alpha*(E6-InitialEstimateAverage)+(1-Alpha)*(H6-InitialEstimateAverage) | =Beta*F7+(1-Beta)*G6 | =Alpha*E6+(1-Alpha)*H6+G7 | =M17*H7 | =ABS(D7-I7) |
| 8 | =D8/M18 | =Alpha*(E7-E6)+(1-Alpha)*(H7-H6) | =Beta*F8+(1-Beta)*G7 | =Alpha*E7+(1-Alpha)*H7+G8 | =M18*H8 | =ABS(D8-I8) |
| 9 | =D9/M19 | =Alpha*(E8-E7)+(1-Alpha)*(H8-H7) | =Beta*F9+(1-Beta)*G8 | =Alpha*E8+(1-Alpha)*H8+G9 | =M19*H9 | =ABS(D9-I9) |
| 10 | =D10/M16 | =Alpha*(E9-E8)+(1-Alpha)*(H9-H8) | =Beta*F10+(1-Beta)*G9 | =Alpha*E9+(1-Alpha)*H9+G10 | =M16*H10 | =ABS(D10-I10) |
| 11 | =D11/M17 | =Alpha*(E10-E9)+(1-Alpha)*(H10-H9 ) | =Beta*F11+(1-Beta)*G10 | =Alpha*E10+(1-Alpha)*H10+G11 | =M17*H11 | =ABS(D11-I11) |
| 12 | : | : | : | : | : | : |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| ActualForecast | I6:I30 |
| Alpha | M5 |
| Beta | M6 |
| ForecastingError | J6:J30 |
| InitialEstimateAverage | M9 |
| InitialEstimateTrend | M10 |
| MAD | M30 |
| MSE | M33 |
| SeasonalFactor | M16:M27 |
| SeasonallyAdjustedForecast | H6:H30 |
| SeasonallyAdjustedValue | E6:E30 |
| TrueValue | D6:D30 |
| TypeOfSeasonality | M13 |

| | L | M |
|---|---|---|
| 30 | MAD = | =AVERAGE(ForecastingError) |

| | L | M |
|---|---|---|
| 33 | MSE = | =SUMSQ(ForecastingError)/COUNT(ForecastingError) |

图 13.10　管理科学课件中具有季节调整的趋势性指数平滑方法的 Excel 模板应用于 CCW 问题。

表 13.3　预测 CCW 呼叫量的各种时间序列预测方法的平均预测误差(MAD)和平均预测误差方差(MSE)

| 预测方法 | MAD | MSE |
|---|---|---|
| 25%规则 | 424 | 317815 |
| 上期值方法 | 295 | 145909 |
| 平均值方法 | 400 | 242876 |
| 移动平均方法 | 437 | 238816 |
| 指数平滑方法 | 324 | 157836 |
| 趋势性指数平滑方法 | 345 | 180796 |

**莉迪亚:** 我很失望。这些时间序列预测方法并没有满足我的要求。我原以为这个方法能行,它看起来是个相当不错的方法,能够对付我们一直面对的趋势。

**咨询员:** 在适当的情况下这是一个非常好的方法。当你面对的是经过一段时间偶尔有一个变动的趋势时,它的表现的确不错。

**莉迪亚:** 那么哪里出了问题呢?

**咨询员:** 看看这个季节调整时间序列的趋势。在开始三个季度里有一个急剧下降的趋势,然后是两个急剧上升趋势的季度,接着在第八个季度突然下降前是平稳的,以后它又再一次突然上升。要跟上这样变化剧烈的趋势的确很难。这个方法更适用于变化比较缓和的趋势。

**莉迪亚:** 好。但是没有其他方法了吗?这些方法都不管用。

**咨询员:** 还有一种主要的时间序列预测方法是自回归整体移动平均方法,称为 ARIMA 方法,有时也被称为博克斯—詹金斯(Box-Jenkins)方法,以其发明者命名。这是一个非常复杂的方法,但一些优秀的软件可以实现。这个方法还有一个不错的特点是非常适用于处理有强烈季节变化的问题。

> ARIMA 方法是另一种很好的预测方法,但是它要求更多数据,CCW 现在不能提供。

**莉迪亚:** 真遗憾。那么我们该怎么办呢?我还没有看到任何解决问题的迹象。

**咨询员:** 加把油。我有一个用另一种方法使用这些时间序列预测方法中的一种来实现你的目标的主意。

**莉迪亚:** 真的?给我讲讲。

**咨询员:** 让我们先将细节部分放一放,直到我们能够判断出这方法可行。

**莉迪亚:** 好的。但是我们怎么判断呢?

**咨询员:** 我要你和 CCW 的营销经理接触一下,为我们三个安排一个会晤。将你的近三年的呼叫量数据给他,叫他找出相同时期的销售数据,并与我们的数据进行比较。

**莉迪亚:** 好。关于这次会晤的目的我该告诉他些什么呢?

**咨询员:** 向他解释为了预测呼叫量我们正在努力干什么,并告诉他我们现在正试图更好地理解是什么引起了呼叫量的突然变动。他比任何其他人都清楚是什么使得销售量上升或下降。我们只是想借助他的帮助。

**莉迪亚:** 好的,让我去办。

## 与营销经理的会晤

这个会晤于几天后进行。经过一定的准备,你听过会晤的内容后,你会发现对前面如图 13.10 等的电子表格中的呼叫量数据进行分析很有用。

**莉迪亚:** 你收到了我给你的呼叫量的数据了吗?

**营销经理:** 是的。

**咨询员：** 这与你的这三年的销售量数据相比较有什么结果吗？

**营销经理：** 你的数据与我的吻合的很好。我从这两套数据中看到了同样的上升和下降。

**莉迪亚：** 是这样，因为是接入我的呼叫中心的电话产生了这些销售。

**营销经理：** 没错。

**咨询员：** 现在让我来分析一下是什么导致了这些上升和下降。三年前，在我们的数据中标记为第一年，在这一年的大部分时间里有一个明显的下降趋势。这是什么引起的？

**营销经理：** 是的。那年我记得很清楚。那并不是个很好的年份。新的克鲁格曼(Klugman)操作系统原计划在那年早些时候推出，但上市时间一推再推，人们也一直在等待。直到下一年的年初它才被推出市场，因此我们甚至错过了圣诞销售的机会。

**莉迪亚：** 但在那个假期我们的呼叫量确实有超常规的向上的跳跃。

**营销经理：** 销售量也是这样。我记得我们用了新的网络工具，拥有了更快的数据传输速度，正好赶上假期。在几个月里它大受欢迎。在那个不景气的时期，它的确使我们撑了下来。

**咨询员：** 然后克鲁格曼操作系统上市，销售量在下一年有了一个突然的增长。

**营销经理：** 是的。

**莉迪亚：** 那年年底发生了什么？我们不像预期的那样忙。

**营销经理：** 我猜想大多数人那时已经更新了他们的操作系统。在那个时期我们的产品组合没有什么大的变化。

**咨询员：** 下一年，也就是去年，销售量又上升了。

**营销经理：** 是的。去年相当不错。我们有两种新产品表现得很好。一种是年初推出的新的数据存储设备，非常便宜。另一种是七月份上市的一种彩色打印机。我们能够以非常有竞争力的价格销售。我们的顾客也争相购买我们的产品。

**咨询员：** 谢谢。现在我们弄清了我们正在处理的那些呼叫量数据的背景。现在我还有一个关键的问题要问你。当你观察你的销售量数据并做出你自己的预测时，你认为什么是使得总销售量上升或下降的关键因素？

**营销经理：** 只有一个重要因素——我们是否有新的热销产品。我们有远超过100种的产品。但大多数产品仅在市场上占有很少的一部分。它们是陈旧的产品，经过多次改进仍在市场上销售。所有这些产品占据了大部分的销售量，是一个非常稳定的市场基础。加上我们有三四种主要的新产品。可能有两种产品已经推出几个月了，但仍然可热销一段时间。有一两种刚推出的产品，我们希望能够有出色的表现。

**咨询员：** 我明白了。一个大的市场基础加上三到四个主要的新产品。

**营销经理：** 这就是我们的工作对象。

**咨询员：** 你能够预测出一个新产品的表现会是怎样的吗？

**营销经理：** 我试着进行预测。现在已经比较好了。我通常对产品最初市场反应的预测很接近，但要预测一种产品能够热销多长时间却很难。我希望能够更好地进行控制。

**咨询员：** 谢谢你提供的信息。这暂时证明了我的猜测。

**莉迪亚：** 是什么？

**咨询员：** 我们的确需要直接协调驱动销售的因素，使得我们能够更好地预测呼叫量。

**莉迪亚：** 好想法！

**咨询员：** 为销售量和呼叫量预测开发更好的预测程序进行合作如何？

**莉迪亚：** 很好。

**营销经理：** 我想知道你的想法。但是就像我说的，我需要有一个更好的预测手段。

**莉迪亚：** 好的。让我们找出一些细节，然后我们会给你一个特别的建议。

**销售经理：** 听起来不错。

**莉迪亚：** 再次感谢您的帮助。

**营销经理：** 不用谢。

营销经理走了。

**莉迪亚：** 我开始明白你的想法了。我很喜欢它。你可以给我一些细节了吗？

**咨询员：** 差不多了。我现在确信我的想法可能会管用。但首先我要花点时间用营销经理的信息将时间序列预测方法更好地解释给你听。然后我会给你我推荐的计划。

**莉迪亚：** 好的，就这么干。

在 13.4 节中介绍一些有用的预测软件后，我们会在 13.5 节中继续这个案例。

## 有帮助的教学软件

在网站 www.mhhe.com/hillier2e 上提供的互动管理科学模型中包括了一个有用的预测模型。在你的管理科学课件的光盘中也包括了一个离线版本。

这个模型中包括了所有这节中讲到的时间序列预测方法(包括 13.6 节)。你所要做的就是选择一个预测方法，输入你想预测的时间序列数据，然后按下预测按钮(它不会调整季节性因素，所以如果有季节性调整的话，要输入调整后的数据)。除了按期列出预测值和预测误差外，模型同样会画出时间序列数据(用蓝点)和预测结果(用红点)的图形。

这个软件的特殊之处在于你可以任意地改变数据，模型将会立即显示预测发生相应变化后的图形。你可以用鼠标拖动相应的蓝点进行上下移动来改变数据。当你拖动蓝点数据时，相应的预测红点会跟着变动。这样做的目的是使你更好地感觉各种预测方法的不同数据组合会如何影响预测。所以这个软件主要是作为教学工具，而不是专业的预测工具。它只能用于解决小型的、教科书中提到的例子。

在下一节中，我们会介绍另一种附在课本中的专业预测软件包。

## 问题回顾

1. 季节性因子是用来衡量什么的？
2. 用实际呼叫量和季节性因子计算季节调整呼叫量的公式是什么？
3. 用季节性因子和季节调整预测计算实际呼叫量预测值的公式是什么？
4. 为什么上期值预测法有时被称为天真的方法？
5. 为什么在案例分析中平均值预测方法表现得不好？
6. 用移动平均预测方法替代平均值预测方法的原理是什么？
7. 指数平均预测方法对移动平均预测方法作了怎样的修改？
8. 在指数平滑方法中，较小的平滑常数适用于什么情况？较大的呢？
9. 用指数平滑得到下一个预测值的公式是什么？
10. 营销经理所说的销售量上升或下降的一个主要因素是什么？

## 13.4 用 CB 预测软件进行时间序列预测

因为 CB 预测是 Crystal Ball 软件包的一部分，CB 即是 Crystal Ball 的简写。

在你的管理科学课件中包括了一个称为 CB 预测的 Excel 加载宏，是用电子表格来进行时间序列预测。CB 预测由 Decisioneering 公司开发，是 Crystal Ball 2000 软件专业版的一部分。这一整套的 Excel 加载宏包括在管理科学课件中（这套软件是试用版，能免费试用 140 天，如果你想在试用期后继续使用 Crystal Ball 2000 软件，你应该向 Decisioneering 公司购买）。

CB 预测对话框引导你进行 10 步的预测程序。

在本章中讨论的预测技术中很多都使用 CB 预测，也有使用其他一些软件的。应用此软件，首先将历史数据输入电子表格，如图 13.11 所示的 CCW 案例。然后在数据中选择一个单元格（比如在图 13.11 中的 D 列选择一个单元格），从 CB 工具菜单中（如果 CB 预测是作为 Crystal Ball 2000 软件专业版的一部分安装的）或者从工具菜单中（如果 CB 预测是单独安装的）选择 CB 预测。这样就能打开如图 13.12 所示的 CB 预测对话框。这个对话框有 4 个选项卡（输入数据、数据属性、方法集、结果），CB 预测将用 10 步来进行预测。

图 13.12 显示 CCW 问题在这个对话框中需要输入的数据。在第一张选项卡中（输入数据），第一步 CB 预测对需要输入数据的单元格范围（C3:D15）做了准确估计。如果这个估计不准确，需要进行修正。接下去，第二步对数据进行整理。对于 CCW 问题来说，数据写在列中，第一列有数据，第一行写标题。如果希望，你可以在第三步中看到数据的图表。

按下下一步按钮，或者选择数据属性选项卡移到第二张选项卡。第四步明确数据类型并确定是否有季节性变化。对 CCW 问题来说，数据按季度计算并且每四季度会有一次季节性变化。如果你想使用线性回归才用第五步（这在 13.6 节中说明）。

第六步是在第三张选项卡中（方法集）中选择你要使用的时间序列预测方法。大部分方法集中的方法与 13.3 节中讲过的方法是一样的，虽然它们的名字可能有所不同（有三个方法没有提到过）。表 13.4 列出了 CB 预测方法与 13.3 节中预测方法的关系。但是 CB 预测中的任意一个指数平滑方法都与 13.3 节中相应的方法有所区别，因为除了原始数据外，它不需要使用者提供任何信息（诸如季节性因素、初始估计、平滑常数等）。CB 预测能使用原始数据来获得最佳估计（所以需要大量的原始数据）。这对一个没有经验的使用者来说很有帮助，但是同时它也剥夺了有经验的使用者提供自己希望的输入值的机会。因此，CB 预测也提供了选项来消除这一特性，而用手工配置平滑常数（通过双击对话框中的方法，就可以打开参数对话框，在其中可以输入用户自定义的参数）。CB 预测会试用方法集中所有的方法，然后选择最适合历史数据的方法。

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Crystal Ball Predictor for CCW | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | Year | Quarter | Call Volume |
| 4 | | 1 | Q1 | 6,809 |
| 5 | | 1 | Q2 | 6,465 |
| 6 | | 1 | Q3 | 6,569 |
| 7 | | 1 | Q4 | 8,266 |
| 8 | | 2 | Q1 | 7,257 |
| 9 | | 2 | Q2 | 7,064 |
| 10 | | 2 | Q3 | 7,784 |
| 11 | | 2 | Q4 | 8,724 |
| 12 | | 3 | Q1 | 6,992 |
| 13 | | 3 | Q2 | 6,822 |
| 14 | | 3 | Q3 | 7,949 |
| 15 | | 3 | Q4 | 9,650 |

**图 13.11** 用 CB 预测进行时间序列预测的第一步是在数据表中输入历史数据，就像这里所示的 CCW 问题。

表 13.4 CB 预测方法与 13.3 节中预测方法的关系

| CB 预测方法 | 13.3 节中对应的方法 |
|---|---|
| 单一移动平均 | 移动平均 |
| 双倍移动平均 | 没有提到 |
| 单一指数平滑 | 指数平滑 |
| 双倍指数平滑 | 趋势性指数平滑 |
| 季节性追加 | 没有提到 |
| Holt-Winters 追加 | 没有提到 |
| 季节性乘数 | 季节性指数平滑 |
| Holt-Winters 乘数 | 季节趋势性指数平滑 |

在最后的选项卡(结果)中,第 7、8、9 步用来选择预测的时间期、可信区间的百分数以及是否将预测结果粘贴在电子表格上。这些步骤都完成后,按下预览按钮能看到预测的图形。预测结果在图 13.13 中显示。第一年到第三年的历史数据用浅色线表示,预测值用深色线表示。在第 4 年中,预测沿着 5% 和 95% 的可信间隔展示(浅色线)。浅色线表明落入可信区间的取值范围。给定可信区间 5% 和 95% 的范围,表明如果没有特殊事情发生,第四年的数据只有 5% 的机会会低于最低线,5% 的机会高于最高线。

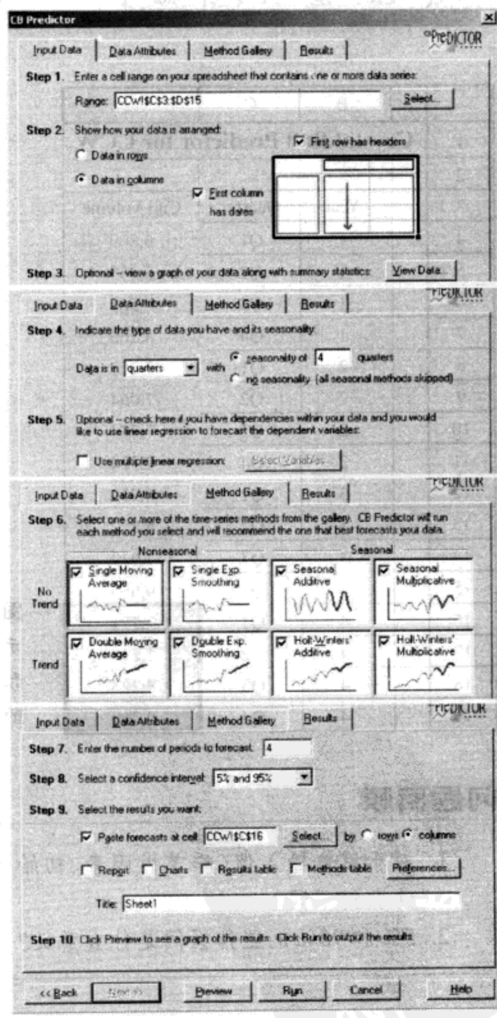



图 13.12 CB 预测对话框有 4 个选项卡(输入数据、数据属性、方法集、结果),这里显示的数据是 CCW 问题的。

CB 预测使用原始数据来决定季节性因素、初始估计、平滑常数,除非你选择取消这一特性,自己提供这些值。

可信区间显示了预测量的可能值的范围。

按下最后一张选项卡中的运行键,就会生成在第 7 步中选择的时期的预测值并且直接在电子表格中显示这些预测值(如果第 9 步中选择粘贴的话)。图 13.14 显示了结果,单元格 D16:D19 显示了第四年四个季度的预测值。

图 13.13 右上角显示的预测预览表明适合历史数据的最佳预测方法是 Holt-Winters 乘数方法(在 13.3 节中称为季节趋势性指数平滑方法),所以这就是图 13.14 显示的预测所试用的方法。图 13.13 右下角显示了该方法选择的最佳平滑常数——$\alpha$、$\beta$ 和 $\tau$(季节性因素的平滑常数)——必定是 0。这表明预测方法必定只使用了初始估计、初始趋势和初始季节性因素(都在前三年的基础上计算)来预测未来,而没有用指数平滑更新这些

估计。我们猜测当历史数据增加时,这个方法就会选择非0的平滑常数来体现指数平滑的优势。

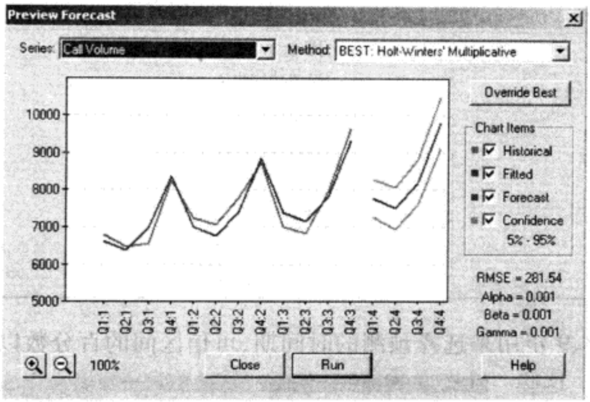



**图 13.13** CB 预测对 CCW 问题的预览画面。用深色线表示第四年每一季度的预测。浅色线表示第一到三年的历史数据。第四年的两根浅色线表明预测的可信区间(5%到95%)。

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **Crystal Ball Predictor for CCW** | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | Year | Quarter | Call Volume |
| 4 | | 1 | Q1 | 6,809 |
| 5 | | 1 | Q2 | 6,465 |
| 6 | | 1 | Q3 | 6,569 |
| 7 | | 1 | Q4 | 8,266 |
| 8 | | 2 | Q1 | 7,257 |
| 9 | | 2 | Q2 | 7,064 |
| 10 | | 2 | Q3 | 7,784 |
| 11 | | 2 | Q4 | 8,724 |
| 12 | | 3 | Q1 | 6,992 |
| 13 | | 3 | Q2 | 6,822 |
| 14 | | 3 | Q3 | 7,949 |
| 15 | | 3 | Q4 | 9,650 |
| 16 | | 4 | **Q1** | **7,791** |
| 17 | | 4 | **Q2** | **7,515** |
| 18 | | 4 | **Q3** | **8,203** |
| 19 | | 4 | **Q4** | **9,799** |

**图 13.14** 使用图 13.11 的数据,单元格 D16:D19 显示了 CB 预测得到的 CCW 问题的第四年四个季度的预测值。这就是图 13.13 中深色线条显示的第四年的值。

## 问题回顾

1. 对于用户输入值(季节性因素、初始估计、平滑常数)CB 预测与 13.3 节中讲到的方法有何不同?
2. 5% 和 95% 的置信区间是什么意义?

## 13.5 时间序列预测方法透视

13.3 节已经阐述了 CCW 案例研究中所使用的预测时间序列下一个值的各种方法。现

在我们要回过头来解释一下这些方法能用来解决什么样的问题。在解释完之后，咨询员会给出建立预测系统的建议。

## 预测方法的目标

严格来说，讨论预测 c（如 CCW 下一个季度的呼叫量）的叫法是不对的。准确预测这个值是不可能的，因为它会是某个范围内的任何值。它具体是多少取决于我们无法控制的将来的状况。

> 时间序列的下一个值不可能准确预测，因为它是一个随机变量，而不是一个肯定会发生的固定值。

换句话说，时间序列的下一个值是一个随机变量。它具有某个概率分布。例如图 13.15 显示了一个典型的下季度 CCW 呼叫量的概率分布。其均值恰好为 7500。这个分布体现了呼叫量各种可能值之间的关系。没人可以断言将会是哪一个值。

那么作为时间序列下一个值的“预测值”的数据是什么意思呢？如果可能的话，我们要将这个数据作为分布的均值，原因是概率分布的随机观察值都会聚集在概率分布的均值附近。因此用均值作为预测值可使平均预测误差最小。

不幸的是我们并不知道这个概率分布是什么，也就不知道它的均值。我们可以做得最好的办法是用所有的可用数据（时间序列过去的值）来尽可能准确地估计均值。

时间序列预测方法的目的是尽可能准确地预测时间序列下一个值的概率分布的均值。

有了一些一个概率分布的随机观察值，对均值的最好的估计是样本均值（所有观察值的平均数）。因此如果一个时间序列在每一个时期都有一个相同的分布，那么平均值预测方法给出了对均值最好的估计。

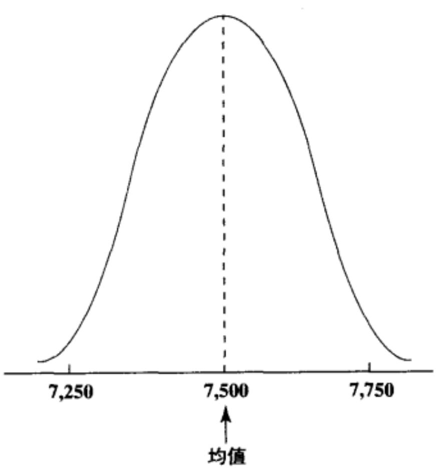



**图** 13.15 当均值是 7500 时 CCW 一个季度日平均呼叫量的概率分布。

然而，我们常常是用其他的预测方法来进行预测，因为分布有可能随时间而改变。

## 概率分布变动导致的问题

13.3 节以考虑季节影响开始，然后对 CCW 季节性因子估计为 0.93、0.90、0.99 和 1.18，分别对应第一、二、三、四季度。

如果总的年日平均呼叫量是7500,那么这些季节性因子表明那一年四个季度的概率分布如图13.16那样。由于这些分布有着不同的均值,我们不应当简单地将四个季度的随机观察值(观察到的呼叫量)简单地求平均数,以估计这些分布中的任何一个的均值。

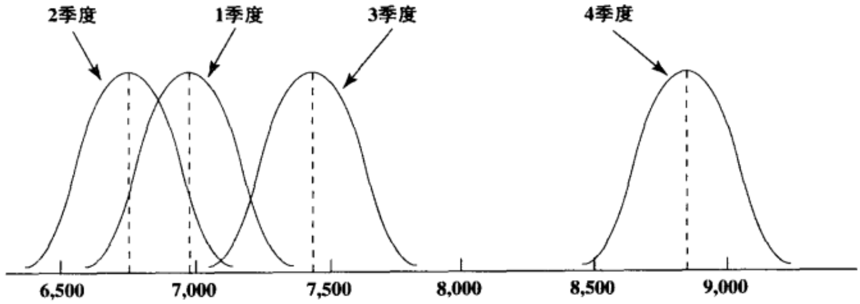



图13.16 当总平均值是7500时CCW四个季度日平均呼叫量的概率分布。

这就是在上一节中对时间序列进行季节调整的原因。将每一季度的呼叫量除以季节性因子使得季节调整的呼叫量分布移动到图13.15所示的均值为7500的分布,这就使得可以用取季节调整值平均数的方法估计均值。

> 当时间序列的概率分布变动频繁时,用于预测的最新的数据也会很快过期。

不幸的是,尽管对时间序列进行了季节调整,每一年(甚至每一季度)的概率分布也不一定会相同。例如CCW营销经理所说的,总销售量在第二年初新的克鲁格曼操作系统上市的时候有一个大的跳跃,这也使得日平均呼叫量上升了大约10%,从第一年的7000多到第二年的超过7700。图13.17对两年中典型的季度分布(经过季节调整)进行了比较。

此图中第一年分布的随机观察值不足以用来估计第二年分布的均值。因此除了上期值预测法,上一节介绍的每一种预测方法都至少在第一年的观察值上加了权重,以估计第二年每一个季度的均值。这就是为什么这些方法的日平均预测误差(MAD)和平均预测误差方差(MSE)都大于上期值预测法的主要原因。

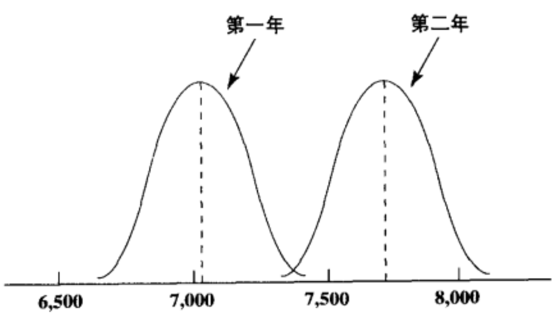



图13.17 第一年和第二年CCW日平均呼叫量(经过季节调整)概率分布的比较。

从营销经理提供的信息来看,分布的变化在一个季度到下一个季度的过程中也会多次发生,这就更加加剧了预测误差。

## 预测方法的比较

13.3节介绍了五种预测时间序列下一个值的方法。对于在给定的情况下,哪一种方法特别适合很大程度上取决于时间序列的稳定性程度如何。

当时间变化时概率分布保持相同，则时间序列是稳定(stable) 的(任何分布的变动都是偶尔发生且微小的)。当分布变动频繁且变动幅度大时时间序列是不稳定(unstable)的。

图 13.4(及后面的图)所示的 CCW 的季节调整的时间序列中有多次分布的变化，包括有变动幅度很大的一次，如图 13.17 所示。因此这个时间序列是一个相对不稳定的例子。

下面是与时间序列类型相适应的预测方法的总结：

选择预测方法的关键因素是时间序列的稳定性。

**上期值方法**：适用于十分不稳定的时间序列，甚至倒数第二个值对预测下一个值也没有显著的相关性。

**平均值方法**：适用于十分稳定的时间序列，甚至最初的几个数据对预测下一个值也是显著相关的。

**移动平均方法**：适用于中等稳定的时间序列，最后几个数对预测下一个值有相关性。移动平均中所包含的数据的个数反映了时间序列的稳定程度。

**指数平滑方法**：适用于从不太稳定到十分稳定的时间序列，平滑常数需要进行调整以适应不同程度的稳定性。它在移动平均方法的基础上为最近的数赋予最大的权重。但这种方法不如移动平均方法那样容易为管理人员理解。

**趋势性指数平滑**：适用于概率分布的均值有向上或向下变动趋势的时间序列。趋势的变化只是偶然情况或变化缓慢。

对于 CCW 来说，不幸的是除了上期值方法，它的季节调整时间序列对于这些方法都过于不稳定。而上期值方法被看作是最没有说服力的预测方法。甚至在使用了趋势性指数平滑时，趋势的变化也过于频繁和剧烈。

针对这种情况，咨询员现在可以向莉迪亚提出他所推荐的新的预测方法了。

## 咨询员推荐的方法

1. 预测应当每月而不是每季度进行，这样可以对环境变化作出更快的反应。
2. 对新的代理人的雇用和训练也要每月而非每季度进行，从而能够很好地控制雇员数水平以适应变化的需求。
3. 可以向近期退休的代理人提供兼职的机会，以更好地满足对雇员的需求。
4. 由于销售量驱动了呼叫量，预测过程应当从预测销售量开始。
5. 为了进行预测，总销售量应当按照营销经理所说的分成几个主要的部分。(1)大量不重要的产品形成相对稳定的市场基础；(2)少数几种(可能是三或四种)主要的新产品中的每一种的成功或失败都可以强烈地影响销售量的上升或下降。这些主要的新产品能够在推广中为营销经理所识别。
6. 带有相对较小的平滑常数的指数平滑方法用来预测大量不重要的产品形成的营销基础。然而在最后决定所使用的预测方法前，应当对过去进行检验，以检查这种特定的方法对过去三年的预测值的有效性如何。这个检验也应当作为选择平滑常数的参考。
7. 具有较大平滑常数的趋势性指数平滑方法用来预测每一种主要新产品的销售量。同样要对过去的预测进行检验以检查决策的正确性并指导选择平滑常数。营销经理应当要提供新产品在第一个月销售量的初始估计。他还应当检验接下来的指数

平滑预测,并根据他对市场反应的经验进行他认为是最合适的调整。

8. 由于销售量具有强季节性,季节调整时间序列应当应用于每一种预测方法中。
9. 在分别获得了第五点所划分的总销售量的主要组成部分的实际预测结果后,这些预测数据应当汇总以获得总销售量的预测。
10. 线性回归因果预测(下一节中将详细介绍)以总销售量的预测为基础获得呼叫量的预测。

莉迪亚以极大的热情接受了这些建议。为了得到咨询员的合作她还同意与营销经理一同工作。

请继续往下看最后一项建议是如何得到实施的。

### 问题回顾

1. 时间序列中即将发生的下一个值是什么变量?
2. 时间序列预测方法的目标是什么?
3. CCW 每个季度的日平均呼叫量概率分布是否都是相同的?
4. 其他时间序列预测方法的预测平均误差大于被认为是比较不具有说服力的上期值方法的原因是什么?
5. 稳定的时间序列和不稳定的时间序列的区别是什么?
6. 对于在预测开始阶段用什么代替预测呼叫量,咨询员的建议是什么?
7. CCW 总销售量的主要组成部分是什么?

## 13.6 线性回归因果预测

对于时间序列预测方法我们已经讨论很多了,它们是以先前的数据来预测时间序列的下一个值。这些方法在 13.3 节中是以过去的呼叫量为基础预测 CCW 下一季度的呼叫量。

### 因果预测

> 对于 CCW 问题来说,呼叫量是因变量,销售量是自变量。

然而咨询员的最后建议提出了要使用另一种方法进行预测。销售量带动了呼叫量,对销售量的预测能够比呼叫量的预测更精确。因此可以通过将呼叫量与销售量的预测直接联系起来以获得呼叫量的更好的预测。这种方法就成了因果预测。

**因果预测**(Causal Forecasting)通过将被预测量[因变量(Dependent Variable)]与驱动被预测量的一个或多个量[自变量(Independent Variable)]直接联系起来以获得对它的预测。

表 13.5 显示了一些有时使用因果预测的例子。在前四个例子中因变量会随着最右端列出的自变量上升或下降。最后一个例子也应用于当一些变量(如产品销售量)随时间(驱动因变量的自变量)有稳定的上升(或下降)趋势。

作为一个特定的例子,13.1 节介绍了美洲航空公司用于对维持成百架飞机正常工作的昂贵零备件(旋转部件)的需求进行预测的复杂系统。这个系统使用了因果预测,对备件的需求量是因变量,飞行时数是自变量。之所以这样规定是因为对备件的需求与飞行时数大

致成正比例。

表 13.5 采用因果预测的可能情况

| 预测类型 | 可能的因变量 | 可能的自变量 |
|---|---|---|
| 销售量 | 产品销售量 | 广告数量 |
| 备件 | 备件销售量 | 设备使用率 |
| 经济趋势 | 国内生产总值 | 各种经济因素 |
| CCW 的呼叫量 | 呼叫量 | 销售量 |
| 任意变量 | 相同的变量 | 时间 |

## 线性回归

应莉迪亚的要求，营销经理在最近的会晤中拿出了过去三年的销售数据。这些数据列在图 13.18 中。特别的，D 列给出了 12 个季度每个季度的日平均销售量(单位：千美元)。E 列给出了日平均呼叫量。这些数据都未经过季节调整。

生成右边的图要选择"插入"(Insert)菜单中的"图表"(Chart)，再选择"XY(散点)图"[XY (Scatter) chart]。然后根据图表向导一步步进行。这个图显示了 D 列、E 列数据点的二维分布。因此图中 12 个点中每一个点都表示了 12 个季度中这个季度的销售量与呼叫量的联系(不需要明确是哪个季度)。

这个图显示了呼叫量与销售量的紧密联系。每一次销售量的上升或下降都伴随着呼叫量大致成正比例的上升或下降。由于销售是通过呼叫中心的电话进行的，所以这并不奇怪。

从图中可以看到呼叫量与销售量的关系可以近似地以一条直线表示。图 13.19 画出了这条直线[生成这条直线要点击图 13.18 的散点图，选择"图表"(Chart)菜单中的"添加趋势线"(Add Trendline)，然后在"选项"(Option)中选取"线性趋势"(Linear)。直线上方的等

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | CCW's Average Daily Sales and Call Volume | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | Sales | Call |
| 4 | | Year | Quarter | ($thousands) | Volume |
| 5 | | 1 | 1 | 4,894 | 6,809 |
| 6 | | 1 | 2 | 4,703 | 6,465 |
| 7 | | 1 | 3 | 4,748 | 6,569 |
| 8 | | 1 | 4 | 5,844 | 8,266 |
| 9 | | 2 | 1 | 5,192 | 7,257 |
| 10 | | 2 | 2 | 5,086 | 7,046 |
| 11 | | 2 | 3 | 5,511 | 7,784 |
| 12 | | 2 | 4 | 6,107 | 8,724 |
| 13 | | 3 | 1 | 5,052 | 6,992 |
| 14 | | 3 | 2 | 4,985 | 6,822 |
| 15 | | 3 | 3 | 5,576 | 7,949 |
| 16 | | 3 | 4 | 6,647 | 9,650 |

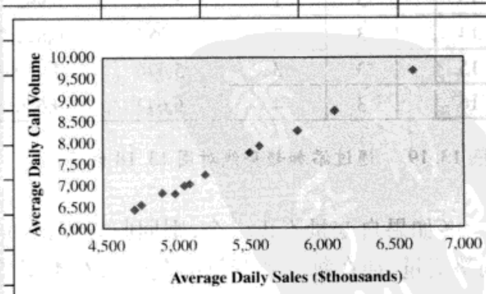



图 13.18 将呼叫量与销售量联系起来分析 CCW 问题的因果预测所需的数据。

式通过选取“选项”(Option)下方的“显示公式”(Display)添加]。这条线称为线性回归直线(linear regression line)。

> 线性回归直线估计因变量值是如何根据自变量值决定的。

当进行单个自变量的因果预测时,线性回归(Linear Regression)通过一条直线近似体现因变量(CCW 的呼叫量)与自变量(CCW 的销售量)之间的关系。这条线画在以自变量为横轴、因变量为纵轴的图上。这条线由通过在图上描出自变量值与相应的因变量值决定的一系列的点构造而成。

故图 13.19 所示线性回归直线可用来估计一定量的销售量对应了多大的呼叫量。一般地,线性回归直线方程的形式是:

$$y = a + bx$$

其中:

> 线性回归直线的等式称为回归方程。

$y$ = 线性回归直线给出的因变量的估计值
$a$ = 线性回归直线在 $y$ 轴的截距
$b$ = 线性回归直线的斜率
$x$ = 自变量值

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **CCW's Average Daily Sales and Call Volume** | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | **Sales** | **Call** |
| 4 | | **Year** | **Quarter** | **($thousands)** | **Volume** |
| 5 | | 1 | 1 | 4,894 | 6,809 |
| 6 | | 1 | 2 | 4,703 | 6,465 |
| 7 | | 1 | 3 | 4,748 | 6,569 |
| 8 | | 1 | 4 | 5,844 | 8,266 |
| 9 | | 2 | 1 | 5,192 | 7,257 |
| 10 | | 2 | 2 | 5,086 | 7,064 |
| 11 | | 2 | 3 | 5,511 | 7,784 |
| 12 | | 2 | 4 | 6,107 | 8,724 |
| 13 | | 3 | 1 | 5,052 | 6,992 |
| 14 | | 3 | 2 | 4,985 | 6,822 |
| 15 | | 3 | 3 | 5,576 | 7,949 |
| 16 | | 3 | 4 | 6,647 | 9,650 |

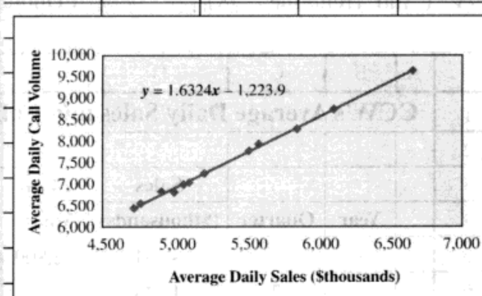



**图 13.19** 通过添加趋势线对图 13.18 的修改。

(如果自变量不止一个,则回归方程(Regression Equation)有这样的形式:用一个常数来调整变量,加在每一个变量的左边。)在本图的线性回归直线中,$a$ 和 $b$ 的值为:

$$a = -1223.86 \qquad b = 1.6324$$

图 13.20 显示了管理科学课件中的 Excel 模板,它可以用来求出 $a$ 和 $b$ 的值。你需要在 C 列和 D 列中分别写入自变量(销售量)和因变量(呼叫量)的观察值,然后根据这个模板完成所有的计算。在右边,请注意你可以选择在单元格 J10 中填入 $x$ 的值(销售量),模板则会

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Linear Regression of Call Volume vs. Sales Volume for CCW | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | Time | Independent | Dependent | | Estimation | Square | | Linear Regression Line | |
| 4 | | Period | Variable | Variable | Estimate | Error | of Error | | $y = a + bx$ | |
| 5 | | 1 | 4,894 | 6,809 | 6,765 | 43.85 | 1,923 | | $a =$ | -1,223.86 |
| 6 | | 2 | 4,703 | 6,465 | 6,453 | 11.64 | 136 | | $b =$ | 1.63 |
| 7 | | 3 | 4,748 | 6,569 | 6,527 | 42.18 | 1,780 | | | |
| 8 | | 4 | 5,844 | 8,266 | 8,316 | 49.93 | 2,493 | | | |
| 9 | | 5 | 5,192 | 7,257 | 7,252 | 5.40 | 29 | | Estimator | |
| 10 | | 6 | 5,086 | 7,064 | 7,079 | 14.57 | 212 | | if $x =$ | 5,000 |
| 11 | | 7 | 5,511 | 7,784 | 7,772 | 11.66 | 136 | | | |
| 12 | | 8 | 6,107 | 8,724 | 8,745 | 21.26 | 452 | | then $y =$ | 6,938.18 |
| 13 | | 9 | 5,052 | 6,992 | 7,023 | 31.07 | 965 | | | |
| 14 | | 10 | 4,985 | 6,822 | 6,914 | 91.70 | 8,408 | | | |
| 15 | | 11 | 5,576 | 7,949 | 7,878 | 70.55 | 4,977 | | | |
| 16 | | 12 | 6,647 | 9,650 | 9,627 | 23.24 | 540 | | | |
| 17 | | 13 | | | | | | | | |
| 18 | | 14 | | | | | | | | |
| 19 | | 15 | | | | | | | | |
| 20 | | 16 | | | | | | | | |
| 21 | | 17 | | | | | | | | |
| 22 | | 18 | | | | | | | | |
| 23 | | 19 | | | | | | | | |
| 24 | | 20 | | | | | | | | |
| 25 | | 21 | | | | | | | | |
| 26 | | 22 | | | | | | | | |
| 27 | | 23 | | | | | | | | |
| 28 | | 24 | | | | | | | | |
| 29 | | 25 | | | | | | | | |
| 30 | | 26 | | | | | | | | |
| 31 | | 27 | | | | | | | | |
| 32 | | 28 | | | | | | | | |
| 33 | | 29 | | | | | | | | |
| 34 | | 30 | | | | | | | | |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| $a$ | J5 |
| $b$ | J6 |
| DependentVariable | D5:D34 |
| Estimate | E5:E34 |
| EstimationError | F5:F34 |
| IndependentVariable | C5:C34 |
| SquareOfError | G5:G34 |
| $x$ | J10 |
| $y$ | J12 |

| | E | F | G |
|---|---|---|---|
| 3 | | Estimation | Square |
| 4 | Estimate | Error | of Error |
| 5 | =a+b*C5 | =ABS(D5-E5) | =F5^2 |
| 6 | =a+b*C6 | =ABS(D6-E6) | =F6^2 |
| 7 | =a+b*C7 | =ABS(D7-E7) | =F7^2 |
| 8 | =a+b*C8 | =ABS(D8-E8) | =F8^2 |
| 9 | =a+b*C9 | =ABS(D9-E9) | =F9^2 |
| 10 | : | : | : |
| 11 | : | : | : |

| | I | J |
|---|---|---|
| 5 | $a =$ | =INTERCEPT(DependentVariable,IndependentVariable) |
| 6 | $b =$ | =SLOPE(DependentVariable,IndependentVariable) |

| | I | J |
|---|---|---|
| 12 | then $y =$ | =a+b*x |

**图 13.20** 管理科学课件中用于带有线性回归的因果预测的模板,应用于 CCW 问题。

根据线性回归直线计算出相应的 $y$ 值(呼叫量)。这个计算可以根据 $x$ 值的多少任意重复多次。此外 E 列显示了用 C 列的 $x$ 值计算出的结果,所以 E 列的每一个单元格给出了根据 C 列的相应销售量水平由线性回归直线得出的呼叫量的估计值。估计值与 D 列的实际值的差异就是 F 列的估计误差。这个误差的平方显示在 Q 列。

> 最小二乘法选择 $a$ 和 $b$ 的值使 G 列各值的和是所有可能情况中最小的。

得到 $a$ 和 $b$ 值的过程称为最小二乘法(Method of Least Squares)。用这个方法确定 $a$ 和 $b$ 值时,图 13.20 的 G 列给出的误差估计平方和最小。因此 G 列各值的和(22051)是所有可能情况中最小的。任何其他各种的 $a$ 和 $b$ 值所给出的误

差估计都会比这个值大。

G 列中显示的预测误差平方平均值(1838)有个有趣的解释。假设一个季度的销售量能够事先获知(可能是预先定单或者准确的预测)。在这种情况下,用线性回归直线预测呼叫量,就会得到平均预测误差方差(MSE)1838。最小二乘法所做的就是将线性回归直线置于能使 MSE 的值最小的位置。注意这里 MSE 最小值 1838 就是前面 13.3 节时间序列预测方法表 13.3 给出的 MSE 值的大约 1%。

下面的数据也很有趣。将这些数据取平均,12 个季度的平均估计误差仅为 35。这表明如果可以预先知道(或确切地说是预测到)一个季度的销售量,使用线性回归直线预测呼叫量只会带来 35 的平均预测误差(MAD)。这大约仅是 13.3 节中用各种时间序列预测方法的 MAD 值的 10%。

对于因果预测的一些应用,自变量的值要预先知道。在这里是做不到的,这里的自变量是下一个时期的销售量。然而咨询员相信用他建议的方法可以对销售量进行很好地预测。这个预测值可以作为线性回归直线中获得的呼叫量预测的自变量值。

### CCW 问题新的预测步骤:

1. 通过采用咨询员的建议获得下个月总销售量(日均销售量)的预测。
2. 用这个销售量的预测值从图 13.19、13.20 的线性回归直线中预测下个月的日均呼叫量。

在这个程序中,季节性调整在第 1 步中起作用,在第 2 步中没有作用。根据前一节最后咨询员的推荐(看推荐 8),季节调整应该用于每一个预测方法的第一步中。但是,在第 2 步中,经过季节调整的预测要回到实际销售的预测。在第 2 步中通过根据实际销售的预测得到的线性回归直线而预测的呼叫量是实际呼叫预测量,而不是经过季节调整的呼叫量。

> 有多个自变量的线性回归有时被称为多元线性回归。

对 CCW 问题应用线性回归只包含了一个驱动因变量(呼叫量)的自变量(销售量)。本节开头就提过一些因果预测会有多个驱动因变量的自变量。比如,用线性回归预测国家下一季的国内生产总值(因变量)时,自变量可能包括一系列表示未来经济状况的指标,比如股票市场现有水平、消费者信心指数以及商业活动指数(衡量定货数量)等。如果有两个自变量,回归方程的形式为

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2$$

$x_1$ 和 $x_2$ 分别是自变量,$b_1$ 和 $b_2$ 分别是它们的系数。相应的线性回归直线现在在一个三维图表中,$y$ 轴作为纵轴表示因变量,$x_1$ 和 $x_2$ 作为两个方向的横轴。不管自变量的数目多少,最小二乘法始终能在比较相应的回归方程给出的因变量的值时,用来选择 $a$、$b_1$ 和 $b_2$ 等的值,使预测误差的平方和最小。在这里我们就不进行更深入的研究了。

### CCW 案例研究一年后

实施了咨询员的建议一年之后,莉迪亚给咨询员打了一个电话。

**莉迪亚:**我只是想告诉你现在的情况怎么样,并对您为我们所做的一切所取得的成功表示祝贺。

**咨询员:**谢谢。我提供的预测方法表现得还好吧?

**莉迪亚**：好极了。记得 25% 规则给我们带来了超过 400 的 MAD 值以及各种时间预测方法的差劲的表现吗？

**咨询员**：是的。那时你有点泄气。

**莉迪亚**：的确是那样。但我现在好多了。我刚刚计算了用你的新的方法后一年的 MAD 值。

**咨询员**：哦，是多少？

**莉迪亚**：120，仅仅是 120！

> 预测成功的关键因素是掌握是什么引起变动，从而能在变动发生时抓住它们。

**咨询员**：太棒了。这就是我们要看到的改进。你认为是什么带来了如此大的差异？

**莉迪亚**：我想最主要的是我们将预测转向对销售量的预测。我们弄不清呼叫量的趋势，但我们对销售量是有较好把握的，因此在营销经理的帮助下，我们可以看到是什么引起了变动。

**咨询员**：是的。这是预测成功真正的关键所在。你看，如果我们简单地将时间序列预测方法应用于历史数据而不明白是什么引起了变动，我们就会造成大量的浪费。你必须深入调查这些数据，弄清到底是怎么回事，然后设计预测程序，在变动发生时抓住它们。就像我们所做的让营销经理识别影响销售量的主要新产品，然后对它们进行分别预测。

> 一个好的预测方法需要集合构建良好的统计预测方法和懂得是什么驱动了这些数据的经理，从而可以作出适当调整。

**莉迪亚**：不错。让营销经理介入这个问题是了不起的举措。顺便说一句，他现在是新方法的忠实支持者。他说这也给了他很有价值的信息。

**咨询员**：很好。他是否像我提议的那样根据他对市场状况的了解调整统计预测呢？

**莉迪亚**：是的。他说他不想被电脑替代。

**咨询员**：他当然不会。他是个聪明的人。一个好的预测方法需要他这样能够统领大局，对预测进行适当调整的人。这是一个了不起的组合：有构建良好的统计预测方法和懂得是什么驱动了这些数据的经理。

**莉迪亚**：这的确不错。你在这里有一些支持者了，我们真诚地感谢你为我们所做的一切。

### 问题回顾

1. 什么是因果预测？
2. 当在 CCW 的问题中使用因果预测时，什么是自变量，什么是因变量？
3. 在进行单个自变量因果预测时，线性回归包含了哪些内容？
4. 一元线性回归直线方程的形式是什么？多元的呢？
5. 得到线性回归直线常数 $a$ 和 $b$ 的方法是什么？
6. CCW 新的预测方法与使用 25% 规则的旧的预测方法相比，MAD 值有什么变化？

## 13.7　判断预测方法

我们对基于历史数据的统计预测方法已经讨论了许多。然而这些方法在没有可用的数

据或数据不能体现当前的状况时是没有用的。在这种情况下要使用判断预测方法(Judgmental Forecasting Methods)。

甚至有可用的数据时,一些管理人员也更愿意使用判断预测方法而不是正规的统计预测方法。在许多其他情况下会将这两种方法结合使用。例如 CCW 的案例分析中,营销经理在他的长期经验和对市场变化的了解的基础上用他的判断对用时间序列预测方法获得的销售量预测进行调整。

下面对一些主要的判断预测方法做了简要的介绍。

1. **经理意见**(Manager's Opinion):这是最不正规的方法,因为它仅仅涉及一个经理,用他个人的最佳判断能力进行判断。在有些情况下,一些数据可以帮助进行预测。在别的情况中,经理可能单单依靠经验和对当前状况的熟知程度来进行量化的预测。

> 销售人员意见汇集法运用自下而上的方法。

2. **各部门主管集体讨论法**(Jury of Executive Opinion):这个方法与第一个类似,所不同的是这里涉及一小群高层管理人员用他们的最佳判断能力集体进行预测。这个方法被用于对比较关键的问题的预测。几个执行人员共担责任,提供多种不同的专业知识。
3. **销售人员意见汇集法**(Salesforce Composite):这个方法经常用于当公司雇用了一个销售员队伍来帮助创造销售时对销售量的预测。这是一个自下而上的方法,每一个销售员提供他或她自己区域的销售估计。
4. **消费者市场调查**(Consumer market Survey):这个方法比上一种方法更进一步,使用地毯式方法进行销售量预测。它包含对消费者和潜在消费者未来购买计划及对各种产品新特点的反应的调查。这对于设计新产品和确定销售量的最初预测具有特殊的帮助,对计划一个营销活动也有帮助。
5. **德尔菲方法**(Delphi Method):这个方法需要一组在不同地区的专家,他们各自独立地完成一系列的调查问卷。每一份调查问卷的结果都随同下一份问卷同时送出,然后每位专家评估这些信息,在下一份问卷中调整他或她的反应。其目的是使得大多数专家的结论都集中在一个相对集中的范围里。决策者评估这些专家提供的结论进行预测。这个方法通常仅用作公司最高层或政府对整体趋势的长期预测。

**问题回顾**

1. 在什么情况下不能使用统计预测方法?
2. 是不是只有在统计预测方法不能使用时才使用判断预测方法?
3. 各部门主管集体讨论法与经理意见方法的不同之处在哪里?
4. 销售人员意见汇集法是怎样开始的?
5. 在什么情况下消费者市场调查特别有用?
6. 在什么情况下可能要使用德尔菲方法?

## 13.8 实践中的预测

你已经看到了管理者使用的各种预测方法。我们以简短的篇幅来看看这些不同的预测方法是怎样被广泛应用的。

在开始前先回想一下 13.1 节讨论的实际预测方法的应用。这已在表 13.1 中进行了总结。表 13.6 重复了表中大多数的内容,但是最右边一列现在列出的是所使用的预测方法。这些主要的预测项目选择了一些更加复杂的统计方法,这并不奇怪[最复杂的方法是 ARIMA 方法,通常称为博克斯—詹金斯(Box-Jenkins)方法,在接近 13.3 节末尾的对话中咨询员向莉迪亚进行了介绍]。

**表 13.6 13.1 节提及的各种预测实际应用中所使用的预测方法**

| 组 织 | 预测变量 | 预测方法 |
|---|---|---|
| 美力特黄铜制品公司(Merit Brass Co.) | 最终产品的销售量 | 指数平滑 |
| Hidroeléctrica Español | 能源需求 | ARIMA(Box-Jenkins)等 |
| 美洲航空公司(American Airlines) | 不同等级座位的需求量 | 指数平滑 |
| 美洲航空公司(American Airlines) | 维修飞机的备件的需求量 | 线性回归因果预测 |
| 艾尔巴古微电子公司(Albuquerque Microelectronics) | 晶片的合格率 | 趋势性指数平滑 |
| 美国劳工部(U. S. Department of Labor) | 失业保险支付额 | 线性回归因果预测 |
| 联合航空公司(United Airlines) | 代表处和机场的需求 | ARIMA(Box-Jenkins) |
| Taco Bell | 顾客到达数量 | 移动平均 |
| L. L. Bean | 呼叫中心的人员需求 | ARIMA(Box-Jenkins) |

每一个公司都至少要做一些预测。但它们的方法一般不像这些大的项目那样复杂。几年前[①]对美国 500 强公司销售量预测实践的调查提供了一个对它们所常用的分析方法的结论。

> 移动平均方法和线性回归方法是使用最广泛的统计预测方法。

这个调查表明,总的来说判断预测方法比统计预测方法应用更广泛。主要原因是判断预测方法能够进行准确预测而统计预测方法获得原始数据很难。同时高级管理层对数学技巧不熟悉,而判断预测方法创造了一种拥有感,同时这些方法已给预测增添了判断的因素。

在判断预测方法中用得最多的是各部门主管集体讨论方法。不仅对于公司和行业的销售预测是这样,当对单个产品或一族产品销售量进行预测时应用的广泛程度也略高于经理意见法。

统计预测方法也被广泛使用,特别在一些销售量很大的公司内。与以前的调查相比,这种预测方法正逐渐被熟知。然而大多数被调查者认为最想在他们组织中看到的进步是可以获得更多的数据。对运用这种预测方法来说,获得更多数据是很关键的。

这个调查表明移动平均方法和线性回归方法是使用最广泛的统计预测方法。移动平均方法更多地应用于短期或中期(短于一年)的预测,以及单个产品及产品族销售量的预测。线性回归方法更多地应用于长期预测及公司或行业的销售预测。

> 判断预测方法普遍应用于调整使用统计预测方法得到的预测。

指数平滑及上期值方法也得到了大量的应用。然而对上期值方法的不满意是最多的,与先前的几次调查相比其应用范围正在不断缩小。

在使用统计预测方法时,判断预测方法也普遍应用于预测调整。

随着管理人员对统计预测方法越来越熟悉以及更多地使用计算机来编辑数据和使用管理科学技术,我们期望,对统计预测方法的使用会持续上升。然而判断预测方法无论在单独使用还是与统计预测方法结合使用时都会占有一个重要的地位。

---

① N. R. Sanders and K. B. Manrodt, "Forecasting Practices in U. S. Corporations: Survey Results," Interfaces 24 (March-April 1994), pp. 92 - 100.

## 问题回顾

1. 根据近来对销售预测实践的调查,判断预测方法与统计预测方法哪种应用更广泛?
2. 这个调查表明什么是应用最广泛的判断预测方法?
3. 这个调查表明什么是应用最广泛的统计预测方法?

## 13.9 本章小结

企业未来的成功很大程度上取决于其准确预测的能力。许多领域都需要预测,包括销售量、备件需求、产品合格率、经济趋势和对雇员的需求。

计算机俱乐部仓库(CCW)案例研究介绍了多种预测方法,在这案例中一些方法是不尽如人意的。最终对 CCW 数据进行深入分析,找出影响呼叫中心呼叫量的因素以开发满意的预测系统是很必要的。

时间序列是一个量在一段时间里的一系列观察值。一些统计预测方法以某种方式使用这些观察值来预测下一个值将会是多少。这些方法包括上期值方法、平均值方法、移动平均法、指数平滑方法及趋势性指数平滑方法。

使用这些方法的目的是尽可能准确地估计时间序列下一个值的概率分布均值。这可能要用季节性因子对时间序列进行季节调整,并找出当时间变化时引起概率分布变动的因素。

另一种统计预测方法称为因果预测方法。这个方法通过将要预测的量(因变量)与一个或多个驱动这个变量的其他量直接联系以获得预测值。这个方法经常使用线性回归以一条直线来表示因变量和自变量的关系。

书中的软件包括各种统计预测方法的 Excel 模板、管理科学互动模型中的一个预测模型以及在电子表格环境下进行时间序列预测的 Excel 加载宏,称为 CB 预测。

还有另一大类主要的预测方法就是判断预测方法。这个方法以经理意见法、各部门主管集体讨论方法、销售人员意见汇集法、消费者市场调查法及德尔菲方法来获得预测值。对美国 500 强公司的调查表明判断预测方法比统计方法在销售预测上应用更广泛。这两种方法经常互补使用。

## 专业术语

ARIMA:自回归整体移动平均,一种复杂的时间序列预测方法,通常称为博克斯—詹金斯方法(Box-Jenkins)。(13.3 节)

**平均值预测方法**(Average forecasting method):一种将过去的观察值作为预测值的预测方法。(13.3 节)

**因果预测**(Causal forecasting):将因变量直接与一个或多个自变量相联系获得预测值的方法。(13.6 节)

**消费者市场调查**(Consumer Market survey):一种使用对消费者和潜在消费者的调查结果进行预测的判断预测方法。(13.7 节)

**德尔菲方法**(Delphi method):使用在不同地域的一组专家的意见的判断预测方法。(13.7 节)

**因变量**(Dependent variable):进行因果预测时我们所感兴趣的量。(13.6 节)

**计量经济模型**(Econometric model):用于预测经济趋势的统计方法。(13.1 节)

**指数平滑预测方法**(Exponential smoothing forecasting method):一种使用带有权重的时间序列的上期值和上次预测值获得预测值的方法。(13.3 节)

**趋势性指数平滑**(Exponential smoothing with trend):一种对指数平滑预测方法的调整,通过外推当前的趋势来帮助预测时间序列(也可能是下一个值)。(13.3 节)

**预测误差**(Forecasting error):预测值与实际值的差

异。(13.2 节)

**自变量**(Independent variable):驱动因果预测中因变量的变量。(13.6 节)

**判断预测方法**(Judgmental forecasting methods):使用判断进行预测的方法。(13.7 节)

**各部门主管集体讨论法** (Jury of executive opinion):一小群高层管理人员用他们的最佳判断进行集体预测的判断预测方法。(13.7 节)

**上期值预测法**(Last-value forecasting method):一种使用时间序列最后一个值进行预测的方法。(13.3 节)

**线性回归**(Linear regression):用一条直线来近似自变量与因变量的关系。(13.6 节)

**线性回归直线**(Linear regression line):用因果预测方法时近似表示自变量与因变量的关系的直线。(13.6 节)

MAD:平均绝对偏差的缩写,即平均预测误差。(13.2 节)

**经理意见**(Manager's opinion):以一个经理的最佳判断进行预测的判断预测方法。(13.7 节)

**平均绝对偏差**(MAD):(Mean absolute deviation) 平均预测误差。(13.2 节)

**平均误差方差**(MSE):(Mean square error) 平均预测误差的方差。(13.2 节)

**最小二乘法**(Method of least squares):在线性回归中求得公式中的常数的方法。(13.6 节)

**移动平均预测方法**(Moving average forecasting method):将时间序列最后 $n$ 个观察值求平均数作为预测值的方法。(13.3 节)

MSE:平均误差方差的缩写,即平均预测误差的方差。(13.2 节)

**天真的方法**(Naive method):上期值预测法的别名。(13.3 节)

**回归方程**(Regression equation):线性回归的直线方程。(13.6 节)

**销售人员意见汇集法**(Salesforce composite):将销售人员对各自区域的预测汇总起来的判断预测方法。(13.7 节)

**季节性因子**(Seasonal factor):一年中某一个时期衡量当期值与整个年度平均值的差异的因子。(13.3 节)

**季节调整的时间序列**(Seasonally adjusted time series):对原始的时间序列进行的去除季节影响的调整。(13.3 节)

**平滑常数**(Smoothing constant):指数平滑预测方法中的一个参数,给出了时间序列最后一个值的权重。(13.3 节)

**稳定时间序列**(Stable time series):随着时间的改变而概率分布不变的时间序列。(13.5 节)

**统计预测方法**(Statistical forecasting methods):使用历史数据进行预测的方法。(13.2 ~ 13.6 节)

**时间序列**(Time series):某一个感兴趣的量一段时期的观察值。(13.2 节)

**时间序列预测方法**(Time-series forecasting methods):使用时间序列过去的观察值进行预测的方法。(13.3 ~ 13.5 节)

**趋势**(Trend):若以目前的方式持续,时间序列值发生变动的平均数。(13.3 节)

**趋势平滑常数**:当使用趋势性指数平滑方法进行预测时用于估计趋势的平滑常数。(13.3 节)

**不稳定时间序列** (Unstable time series):概率分布变动频繁且幅度大的时间序列。(13.5 节)

# 关键公式小结

预测误差 = 预测值与实际值的差异(13.2 节)

$$\text{MAD} = \frac{\text{预测误差之和}}{\text{预测次数}} \quad (13.2\ 节)$$

$$\text{MSE} = \frac{\text{预测误差平方之和}}{\text{预测次数}} \quad (13.2\ 节)$$

$$\text{季节性因子} = \frac{\text{时期平均数}}{\text{总平均数}} \quad (13.3\ 节)$$

$$\text{季节调整值} = \frac{\text{实际值}}{\text{季节性因子}} \quad (13.3\ 节)$$

**上期值方法**:(13.3 节)

预测值 = 上期值

**平均数方法**:(13.3 节)

预测值 = 到目前为止所有数据平均值

**移动平均方法**:(13.3 节)

预测值 = 最后 $n$ 个值的平均

**指数平滑方法**:(13.3 节)

预测值 = $\alpha$(上期值) + $(1-\alpha)$(上次预测值)

**趋势性指数平滑**:(13.3 节)

预测值 = $\alpha$(上期值) + $(1-\alpha)$(上次预测值) + 趋势估计

趋势估计 = $\beta$(最近的趋势) + $(1-\beta)$(上次趋势估计)

最近的趋势 = $\alpha$(上期值 − 倒数第二个值) + $(1-\alpha)$(上次预测值 − 倒数第二次预测值)

**线性回归直线**:(13.5 节)

$y = a + bx$

## 本章管理科学课件的学习辅助

"Ch. 13—预测"Excel 文件：

季节性因子模板
上期值方法模板（含有及不含有季节性）
平均值方法模板（含有及不含有季节性）
移动平均方法模板（含有及不含有季节性）
指数平滑方法模板（含有及不含有季节性）
趋势性指数平滑方法模板（含有及不含有季节性）
线性回归模板

Excel 加载宏：

CB 预测（Crystal Ball 2000 专业版的一部分）

管理科学互动模型：

预测模型

## 习　题

前面的 16 道题应当手工完成，不用上面提到的模板。剩下的习题（或习题的一部分），我们使用了"E"（Excel）提示，模板可能会有用（有些题目会用到 CB 预测或管理科学互动模型中的预测模型，这些题目会有标明）。在题号前带有星号的问题书后至少给出了部分的答案。

13.1.* 下面是汉美克公司新产品最初 5 个月的销售量：5，17，29，41，39。销售经理现在需要进行下个月的销售量预测。
a. 使用上期值方法。
b. 使用平均值方法。
c. 以最近三个月的数据使用移动平均方法。
d. 对于所给定的销售量，以上几种方法中是否有不适当的方法？为什么？

13.2. 固特值百货公司炉子的销售一直不错。过去 5 个月的销售量为 15，18，12，17，13。使用下面的方法对下一个月的销售量进行预测。
a. 上期值方法。
b. 平均数方法。
c. 三个月的移动平均方法。
d. 如果你认为影响下个月销售量的因素与五个月前一样，以上几种方法中你更愿意使用哪一种？为什么？

13.3.* 你已经预测了过去四个季度的销售量。预测值与实际值如下所示：

| 季　度 | 预测值 | 实际值 |
|---|---|---|
| 1 | 327 | 345 |
| 2 | 332 | 317 |
| 3 | 328 | 336 |
| 4 | 330 | 311 |

计算每个季度的预测误差，然后计算 MAD 和 MSE。

13.4. 艾尔万雷滋—贝尼斯（Alvarez-Baines）的销售经理莎伦・詹森（Sharon Johnson）一直试图从过去 5 个月中所使用的两种预测销售量的方法中选择一种。在这几个月里，两种预测方法对公司最重要的产品的预测如下所示，实际销售量显示在最右端：

| 月 | 预测值 | | 实际值 |
|---|---|---|---|
| | 方法 1 | 方法 2 | |
| 1 | 5324 | 5208 | 5582 |
| 2 | 5405 | 5377 | 4906 |
| 3 | 5195 | 5462 | 5755 |
| 4 | 5511 | 5414 | 6320 |
| 5 | 5762 | 5549 | 5153 |

a. 计算并比较两种方法的 MAD 值和 MSE 值。
b. 在这么少的数据的基础上莎伦很难从两种方法中选择一种，但她又不想再耽搁。她还有这 5 个月前 3 年的类似的销售量数据。这些较为陈旧的数据将如何帮助她对这两种方法进行评价并选择一种呢？

13.5. 图 13.1 显示了 CCW 过去三年每一季度的日平均呼叫量，图 13.4 给出了季节调整呼叫量。莉迪亚不知道如果她在两年前而不是现在就使用这些季节性因子，那么这些季节调整的呼叫量将会是多少。
a. 仅使用第一年的呼叫量数据决定第二年的季节性因子（这时每个季度的"平均"

呼叫量就是第一年相应季度的实际呼叫量)。

b. 使用这些季节性因子求出第二年的季节调整呼叫量。

c. 使用第一年和第二年的呼叫量求出第三年的季节性因子。

d. 使用 c 得到的季节性因子求出第三年的季节调整呼叫量。

13.6. 即使当经济状况保持稳定时,失业率也会因为季节影响而发生波动。例如由于学生(包括应届毕业生)进入劳动力市场,第三季度的失业率通常会上升。第四季度在学生返回学校并且公司为圣诞季节雇用临时工,失业率会趋于下降。因此使用季节性因子获得季节调整的失业率对比较真实地体现经济趋势是很有帮助的。

在过去的 10 年中,一个州的第一、二、三、四季度的平均失业率(未经过季节调整)为 6.2%、6.0%、7.5%、5.5%。总的平均为 6.3%。

a. 计算四个季度的季节性因子。

b. 下一年四个季度的失业率(未经过季节调整)为:7.8%、7.4%、8.7%、6.1%。计算四个季度的季节调整失业率。失业率的变动是否表明这个州的经济状况在改善?

13.7. 拉尔夫·比雷特是一家房地产公司的经理。他希望预测下一年公司房产的销售量。过去三年公司的季度销售数据如下:

| 季度 | 第一年 | 第二年 | 第三年 |
|---|---|---|---|
| 1 | 23 | 19 | 21 |
| 2 | 22 | 21 | 26 |
| 3 | 31 | 27 | 32 |
| 4 | 26 | 24 | 28 |

a. 计算四个季度的季节性因子。

b. 在考虑季节影响的情况下用上期值方法预测下一年第一季度的销售量。

c. 假设每一个季度预测是正确的,用上期值预测法对下一年四个季度销售量的预测结果是什么?

d. 基于他对目前房产市场状况的评估,拉尔夫得出判断:公司将会在明年销售 100 套住房。给定这个预测,根据季节性因子,每个季度的预测值是多少?

13.8.* 基于过去四个观察值使用移动平均预测方法。当进行最后一个时期的预测时四个观察之中最早的一个是 1945,预测值是 2083,实际值是 1977。下一个时期新的预测值是多少?

13.9. 你正在以前三个月的销售量数据用移动平均预测方法预测下一个月的销售量。进行预测时,三个月前的销售量为 805,上个月的预测值为 782,实际为 793。这个月的新的预测值是多少?

13.10. 在获得数理统计学位后,安·普雷斯顿被默迪沃德(Monty Ward)公司雇用,从事用统计方法预测公司销售量的工作。在最近 10 个月中一直在用移动平均方法对公司的一种产品的销售量进行预测。安的第一个任务是更新上个月的预测以获得本月的预测。她了解到上个月的预测值是 1551,实际为 1532,10 个月前的销售量是 1632,安本月的预测值为多少?

13.11. 邦尼公司(J. J. Bone)使用指数平滑来预测呼叫中心的日平均呼叫量。上月的预测值为 782,实际为 792。以 $\alpha=0.1$、$\alpha=0.3$、$\alpha=0.5$ 预测本月的呼叫量。

13.12.* 你正使用指数平滑预测某产品的月销售量。上月的预测为 2083,实际销售量为 1973。分别以 $\alpha=0.1$、$\alpha=0.3$、$\alpha=0.5$ 预测本月的呼叫量。

13.13. 三年前毅伟大学(Ivy)入学办公室开始用平滑常数为 0.25 的指数平滑预测每年申请入学者的数量。根据以前的经验,预测过程的初始估计为 5000 名申请者。第一年实际申请者为 4600 人。多亏了全国调查中不错的排名,这个数字在第二年上升到了 5300 人,去年为 6000 人。

a. 计算过去三年每年的预测值。

b. 计算这三年的 MAD 值和 MSE 值。

c. 对下一年进行预测。

13.14. 再考虑一下习题 13.13。请注意过去三年这个数字的稳定的向上趋势——从 4600 到 5300 再到 6000。假如 Ivy 大学入学办公室预见到了这个趋势,并已经决定使用趋势性指数平滑来进行预测。设过去三年的初始估计为平均值 = 3900,趋势 = 700。对于任何的平滑常数,用这种预测方法得到的三年的预测将绝对正确。

用平滑常数 $\alpha=0.25$，趋势平滑常数 $\beta=0.25$ 进行计算来验证这个结论。

13.15. * 平滑常数 $\alpha=0.2$，趋势平滑常数 $\beta=0.3$ 的趋势性指数平滑方法被应用于时间序列的预测。上两个值是 535 和 550，上两个预测值为 535 和 540，上次趋势估计为 10。使用这些信息预测时间序列的下一个值。

13.16. 健康万岁公司（Healthwise）生产大量的运动器械。公司管理层对新型运动自行车不断增长的销售非常满意。上两个月的销售量为 4655 和 4935。

每次管理层都使用平滑常数 $\alpha=0.1$、趋势平滑常数 $\beta=0.2$ 的趋势性指数平滑预测下一个月的销售量。上两个月的预测量为 4720 和 4975。上次趋势估计为 240。计算下个月的销售量预测值。

13.17. * 本·斯万森，斯万森百货公司的拥有人及经理，决定使用统计预测方法来对其主要产品的需求量获得更好的把握。然而，本现在需要决策每一类产品最适合于哪一种预测方法。一类产品是主要家用电器，如洗衣机，有着相对稳定的销售量水平。去年洗衣机的月销售量如下：

| 月份 | 销售量 | 月份 | 销售量 | 月份 | 销售量 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 月 | 23 | 5 月 | 22 | 9 月 | 21 |
| 2 月 | 24 | 6 月 | 27 | 10 月 | 29 |
| 3 月 | 22 | 7 月 | 20 | 11 月 | 23 |
| 4 月 | 28 | 8 月 | 26 | 12 月 | 28 |

a. 由于销售量水平相对较稳定，你认为哪一种最基本的预测方法——上期值方法、平均值方法或移动平均方法——最适合于预测未来的销售量？为什么？

E b. 使用上期值预测法预测过去 11 个月的销售量。MAD 和 MSE 值是多少？

E c. 使用平均值预测方法预测过去 11 个月的销售量。MAD 和 MSE 值是多少？

E d. 使用 $n=3$ 的移动平均预测方法预测过去 11 个月的销售量。MAD 和 MSE 值是多少？

e. 使用 MAD 值比较三种方法。

f. 使用 MSE 值比较三种方法。

g. 三种方法中哪一种对未来作出的预测最准确，你能否基于这 12 个月的数据得出一个明确的结论？

E13.18. 再考虑 13.17。本现在打算使用指数平滑方法对洗衣机的未来销售量进行预测，但他要决定平滑常数是多少。设初始估计为 24，将 $\alpha=0.1$、0.2、0.3、0.4、0.5 应用于去年 12 个月的数据。比较 5 个不同 $\alpha$ 带来的 MAD 和 MSE 值。

13.19. 再考虑 13.17。对 b、c、d 部分中提到的预测方法用管理科学互动模型中的预测模型来求解。然后用获得的包括销售数据和预测的图表来回答如下问题：

a. 通过比照三种预测方法的图表，你认为哪种方法能获得最佳的预测结果？为什么？

b. 本·斯万森现在发现在决定 4 月份的销售量时犯了个错误，但是他现在还不能获得正确的销售量数据。对三种方法，本想知道哪个原始的按月预测的数据会由于 4 月份销售数据的改变而变化。通过拖动相应的 4 月份销售量的蓝点上下移动来回答该问题，观察哪个红点移动了（按月预测的数据）。

c. 如果 4 月份销售量从 28 变成 16，重新考虑 a 中的问题。

d. 如果 4 月份销售量从 28 变成 40，重新考虑 a 中的问题。

13.20. 杰克逊制造公司（Jackson Manufacturing）的管理层想选择一种统计预测方法来预测公司的总销售量。去年每月总销售量（单位：百万美元）如下所示：

| 月份 | 销售量 | 月份 | 销售量 | 月份 | 销售量 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 月 | 126 | 5 月 | 153 | 9 月 | 147 |
| 2 月 | 137 | 6 月 | 154 | 10 月 | 151 |
| 3 月 | 142 | 7 月 | 148 | 11 月 | 159 |
| 4 月 | 150 | 8 月 | 145 | 12 月 | 166 |

a. 注意每月的销售量变化相当大——开始有向上的趋势而后下降接着又上升。假设这个方式会继续，请对 13.3 节介绍的 5 种预测方法进行评价。

E b. 使用上期值方法、平均值方法、移动平均方法（$n=3$）回顾预测去年的销售量并比较 MAD 和 MSE 值。

E c. 设初始估计为 120，使用指数平滑方法以 $\alpha=0.1$、0.2、0.3、0.4、0.5 预测去年的销

售量。并比较 5 个不同 $\alpha$ 带来的 MAD 和 MSE 值。

E d. 设平均值的初始估计为 120，趋势的初始估计为 10，使用趋势性指数平滑方法以平滑常数 $\alpha=0.1$、0.3、0.5，$\beta=0.1$、0.3、0.5 的所有组合预测去年的销售量。比较这 9 种组合带来的 MAD 和 MSE 值。

e. 你会向管理层推荐以上哪一种预测方法？在这种方法下，新的一年 1 月份的销售量预测是多少？

13.21. 再考虑 13.20。使用从 CCW 案例分析中所学到的知识回答下列问题：

a. 可能是什么使得去年月总销售量的观察值发生剧烈的变动？

b. 在回答了 a 的基础上，怎样对预测总销售量的统计方法进行改进？

c. 请描述一下 b 中管理判断对统计方法的改进作用。

13.22. 再考虑 13.20。对 b，c，d 部分中提到的预测方法（以平滑常数 $\alpha=0.5$，$\beta=0.5$）用管理科学互动模型中的预测模型来求解。然后用获得的包括销售数据和预测的图表来回答如下问题：

a. 通过比照五种预测方法的图表，你认为哪种方法能获得最佳的预测结果？为什么？

b. 管理者现在得知在决定 4 月份的销售量时犯了个错误，但是现在还不能获得正确的销售量数据。对五种方法，管理者想知道哪个原始的按月预测的数据会由于 4 月份销售数据的改变而变化。通过拖动相应的 4 月份销售量的蓝点上下移动来回答该问题，观察哪个红点移动了（按月预测的数据）。

c. 如果 4 月份销售量从 150 变成 125，重新考虑 a 中的问题。

d. 如果 4 月份销售量从 150 变成 175，重新考虑 a 中的问题。

E13.23. 选择适当的平滑常数 $\alpha$ 对应用指数平滑方法来说是一项关键的决策。当相关历史数据存在时，决策的一条途径是将不同的 $\alpha$ 值应用于历史数据然后选取使得 MAD 值最小的 $\alpha$ 值。用这种方法选择下列销售量时间序列的 $\alpha$ 值。初始估计为 50，比较 $\alpha=0.1$、0.2、0.3、0.4、0.5。

a. 51，48，52，49，53，49，48，51，50，49

b. 52，50，53，51，52，48，52，53，49，52

c. 50，52，51，55，53，56，52，55，54，53

13.24. 重新考虑 13.23。对每一种情况，通过在第 6 步中选择单一指数平滑，在第 10 步中点击预览，使用 CB 预测来决定最佳的 $\alpha$ 值。同时获得每个时间序列的下一个观察预测值。

E13.25. 在使用趋势性指数平滑时，平滑常数 $\alpha$、$\beta$ 的选取对预测精度有很大的影响。对于下列每一个时间序列，设 $\alpha=0.2$，比较 $\beta=0.1$、0.2、0.3、0.4、0.5 时的 MAD 值。平均值的初始估计为 50，趋势的初始估计为 2。

a. 52，55，55，58，59，63，64，66，67，72，73，74

b. 52，55，59，61，66，69，71，72，73，74，73，74

c. 52，53，51，50，48，47，49，52，57，62，69，74

13.26. 重新考虑 13.25。对每一种情况，通过在第 6 步中选择双倍指数平滑，在第 10 步中点击预览，使用 CB 预测来决定最佳的 $\alpha$ 值和 $\beta$ 值。同时获得每个时间序列的下一个观察预测值。

13.27. 安第斯（Andes）矿业公司开采并运输铜矿。公司销售经理，胡安妮塔·瓦尔德斯，以三年的销售量数据为基础，采用移动平均方法预测下一年的销售量。然而她对这种方法的预测精度不满意。

过去 10 年铜矿的年需求量（单位：吨）为：382，405，398，421，426，415，443，451，446，464。

a. 请解释对于这种需求量的形式为什么采用移动平均方法会不可避免地导致预测的不精确。

E b. 在采用移动平均方法时，MAD 和 MSE 值为多少？明年的预测值为多少？

E c. 在使用初始估计为 380、平滑常数为 $\alpha=0.5$ 的指数平滑方法时，MAD 和 MSE 值为多少？明年的预测值为多少？

E d. 在使用平均值的初始估计为 380、趋势的初始估计为 10、平滑常数 $\alpha=0.25$、$\beta=0.25$ 的趋势性指数平滑方法时，MAD 值为多少？明年的预测值为多少？

e. 基于 MAD 和 MSE 值，你会建议今后使用

何种方法？

f. 使用CB预测比较移动平均法、指数平滑法和趋势性指数平滑法(使用最佳平滑常数的条件下)，这样CB预测就能为这个需求量序列选择最佳的预测方法。同时用所选的方法获得明年的预测值。

13.28. 重新考虑13.27。对b,c,d部分中提到的预测方法用管理科学互动模型中的预测模型来求解。用获得的包括需求数据和预测的图表，对每一种预测方法进行关于预测趋势是高于、低于或正好处于预测需求量上的一句话的描述。然后通过这些结论选择最优的预测方法。

E13.29. *潘特尔微处理器公司(Pental Microchip)开始生产新的芯片。生产的第一个步骤是晶片制造。由于制造合格的晶片很困难，许多小晶片会被淘汰掉。因此管理层非常强调晶片制造的持续改进以提高合格品率(当前批次中可以满足制造芯片的质量要求的晶片的百分比)。

目前为止各批次的合格品率分别为15%，21%，24%，32%，37%，41%，40%，47%，51%，53%。使用趋势性指数平滑预测下一批的合格品率。平均值的初始估计为10%，趋势的初始估计为5%，平滑常数$\alpha=0.2$、$\beta=0.2$。

13.30. 森特威利水管局(Centerville Water Department)为整个镇及外围地区供水。过去三年每一个季节的立方英尺(acrefeet)用水量如下所示：

| 季节 | 第一年 | 第二年 | 第三年 |
|---|---|---|---|
| 冬季 | 25 | 27 | 24 |
| 春季 | 47 | 46 | 49 |
| 夏季 | 68 | 72 | 70 |
| 秋季 | 42 | 39 | 44 |

E a. 计算四个季节的季节性因子。

E b. 考虑到季节影响，使用上期值方法预测明年冬季水的消费量。

E c. 假设三个季节的预测是正确的，采用上期值方法对明年四个季节水的消费量的预测是多少？

E d. 考虑到季节影响，使用平均值方法预测明年冬季水的消费量。

E e. 考虑到季节影响，使用基于四个季节的移动平均方法预测明年冬季水的消费量。

E f. 考虑到季节影响，使用初始估计为46、平滑常数为$\alpha=0.1$的指数平滑方法预测明年冬季水的消费量。

E g. 将四种方法应用于三年前的数据时，使用MAD和MSE值比较它们的优劣。

13.31. 再考虑13.7。拉尔夫意识到上期值方法被认为是天真的预测方法，因此他对是否要使用另一种方法感到很困惑。他决定以带有季节调整的现有的Excel模板将不同的预测方法应用于过去三年的数据，并比较它们的MAD和MSE值。

E a. 求出四个季度的季节性因子。

E b. 使用上期值方法。

E c. 使用平均值方法。

E d. 基于四个最近的季度的数据使用移动平均方法。

E e. 使用指数平滑方法。初始估计为25，平滑常数$\alpha=0.25$

E f. 使用趋势性指数平滑方法。平均值的初始估计为25，趋势的初始估计为0，平滑常数$\alpha=0.25$、$\beta=0.25$。

E* g. 比较这些方法的MAD和MSE值。用MAD值最小的方法预测明年一季度的销售量。

h. 用g中的预测值和季节性因子对明年其余三个季度的销售量进行长期预测。

E13.32. 跨陆航空公司(Transcontinental Airlines)拥有一个预测每条航线各等级的顾客数量的计算机化的系统，使得在不同的等级间适当分配座位数量。例如在星期三的中午从纽约飞往洛杉矶的经济舱顾客，下面的表格显示了所调查的年度每月这类旅客的平均数。这个表格也显示了每个月基于历史数据的季节性因子。

| 月份 | 平均数 | 季节性因子 | 月份 | 平均数 | 季节性因子 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1月 | 68 | 0.90 | 7月 | 94 | 1.17 |
| 2月 | 71 | 0.88 | 8月 | 96 | 1.15 |
| 3月 | 66 | 0.91 | 9月 | 80 | 0.97 |
| 4月 | 72 | 0.93 | 10月 | 73 | 0.91 |
| 5月 | 77 | 0.96 | 11月 | 84 | 1.05 |
| 6月 | 85 | 1.09 | 12月 | 89 | 1.08 |

a. 在考虑了季节影响后，比较上期值方法、平均值方法、移动平均方法(基于最

近的 3 个月）及指数平滑方法（初始估计为 80，平滑常数 $\alpha=0.2$）应用于去年的数据的 MAD 和 MSE 值。

b. 用最小 MAD 值的预测方法预测新的一年 1 月份平均乘客数。

13.33. 再考虑 13.32。经济开始进入扩张期。跨陆航空公司的管理层预计这一年乘坐飞机的人数（经过季节调整）会稳步上升，而不像去年比较平稳。由于 13.32 使用的方法跟上趋势的速度比较慢，所以考虑使用趋势性指数平滑。

一年过去后管理层的预计被证明是正确的。下面的表格显示了新的一年平均乘客数。

| 月份 | 平均数 | 月份 | 平均数 | 月份 | 平均数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1月 | 75 | 5月 | 85 | 9月 | 94 |
| 2月 | 76 | 6月 | 99 | 10月 | 90 |
| 3月 | 81 | 7月 | 107 | 11月 | 106 |
| 4月 | 84 | 8月 | 108 | 12月 | 110 |

E　a. 用两年的数据重复习题 13.32 的 a。

E　b. 在考虑到季节影响后，使用趋势性指数平滑对新的一年进行预测。平均值的初始估计为 80，趋势的初始估计为 2，平滑常数为 $\alpha=0.2$、$\beta=0.2$。比较这种方法的 MAD 和 MSE 值与 a 中的 MAD 和 MSE 值。

E　c. 趋势性指数平滑从第一年初开始重复 b，并如同 a 中的预测方法一样应用于这两年的数据。使用相同的初始估计和平滑常数，除了将趋势的初始估计改为 0。

d. 以这些结果为基础，你会建议跨陆航空公司今后使用何种预测方法？

e. 一个月后（1 月份），乘客的平均数是 97。对所有数据使用 CB 预测的季节趋势性指数平滑预测方法。确定 CB 预测得出得最佳平滑常数值（包括季节因素平滑常数）。同时获得第三年每一个月份的平均乘客数的预测值（如同 1 月底一样）。

13.34. 品质自行车（Quality Bikes）是一个专门分销自行车的批发商。在过去，公司拥有大量的自行车库存使得能够立即满足订货，因此非正规的粗略的需求预测对于决定何时补充库存来说是足够了。然而，公司新的总裁，玛西娅·塞尔格，准备加强管理。科学库存管理将用来减少库存水平并使得总可变库存成本最小。与此同时，玛西娅下令开发基于考虑季节影响的统计预测的计算机预测系统。这个系统将产生三个预测结果——基于移动平均的结果、基于指数平滑的结果、基于趋势性指数平滑的结果。三个预测结果的平均值将被作为每月库存管理的目标。

下面的表格给出了过去三年中十速自行车的月销售量。最后一列也显示了这一年的月销售量，这是使用新的预测系统的第一年。

| 月份 | 过去销售量 | | | 今年销售量 |
|---|---|---|---|---|
| | 第一年 | 第二年 | 第三年 | |
| 1月 | 352 | 317 | 338 | 364 |
| 2月 | 329 | 331 | 346 | 343 |
| 3月 | 365 | 344 | 383 | 391 |
| 4月 | 358 | 386 | 404 | 437 |
| 5月 | 412 | 423 | 431 | 458 |
| 6月 | 446 | 472 | 459 | 494 |
| 7月 | 420 | 415 | 433 | 468 |
| 8月 | 471 | 492 | 518 | 555 |
| 9月 | 355 | 340 | 309 | 387 |
| 10月 | 312 | 301 | 335 | 364 |
| 11月 | 567 | 629 | 594 | 662 |
| 12月 | 533 | 505 | 527 | 581 |

E　a. 在以上 12 个月销售数据的基础上计算季节性因子。

E　b. 考虑季节影响，应用最近三个月的移动平均预测这一年每一个月的销售量。

E　c. 考虑季节影响，使用指数平滑预测这一年的销售量。初始估计为 420，平滑常数 $\alpha=0.2$。

E　d. 考虑季节影响，使用趋势性指数平滑预测这一年的月销售量。平均值初始估计为 420，趋势初始估计为 0，平滑常数 $\alpha=0.2$，$\beta=0.2$。

e. 比较 b、c、d 得到的 MAD 和 MSE 值。

f. 计算以 b、c、d 的预测值求平均得到的每月销售量的结合预测，并计算 MAD 值。

g. 对于这些结果，你会推荐使用什么方法进行下一年的预测？

h. 综合 1，2，3 年和今年的销售数据，使用 CB 预测比较季节性指数平滑法和季节趋势性指数平滑法（使用最佳平滑常数的条件下），这样 CB 预测就能为这个销售量序列选择最佳的预测方法。同时用所

选的方法获得明年每个月份的预测值(如同今年年底的预测)。

13.35. *斯拜尔曼公司(Spellman)长期在重型机械制造领域占据主导地位。目前公司的一种新型车床的销售量稳步上升。过去10个月的销售量如下所示:

| 月份 | 销售量 | 月份 | 销售量 |
|---|---|---|---|
| 1 | 430 | 6 | 514 |
| 2 | 446 | 7 | 532 |
| 3 | 464 | 8 | 548 |
| 4 | 480 | 9 | 570 |
| 5 | 498 | 10 | 591 |

由于销售量的稳定增长,管理层决定使用因果预测来预测将来几个月的销售量,月份为自变量,销售量为因变量。

a. 在两维图中画出这些数据的折线图,以月份为横轴,销售量为纵轴。

E b. 计算得到适合这些数据的线性回归方程。

c. 在a构造的图中画出这条直线。

d. 用这条直线预测11月的销售量。

e. 用这条直线预测12月的销售量。

f. 线性回归方程表明月销售量有怎样的平均增长?

13.36. 再考虑13.13以及13.14。由于Ivy大学申请入学人数有一个稳定的增长率,因果预测可用来预测未来几年的申请人数,年份为自变量,申请人数为因变量。

a. 以年份为横轴,申请人数为纵轴,在两维图上作出第一、二、三年的散点图。

b. 由于图中三个点在一条向上的直线上,这直线就是线性回归直线,画出这条直线。

E c. 找出线性回归直线的方程。

d. 用这条直线预测以后5年(第四年到第八年)的申请人数。

e. 5年过去了,Ivy大学的状况急转直下。以申请人数增长率为指标的最喜爱的大学全国调查排名表明人们对Ivy大学的兴趣正在下降。第四年申请人数为6300人,第五年为6200,然后人数大幅下降,第六年为5600,第七年为5200。用原来的方法预测第八年的申请人数是否仍然可行?请解释。

E f. 画出7年数据散点图。找出基于这7年数据的线性回归方程并画出直线。用这个方程预测第8年的申请人数量。线性回归直线是否与原始数据吻合得很好?你是否对第8年的预测数据很有信心?这是否表明在环境变化导致数据的趋势有大的变动时仍可继续使用线性回归直线?

E g. 以7年的数据用趋势性指数平滑预测第8年的申请人数。平均值的初始估计为3900,趋势的初始估计为700,平滑常数$\alpha=0.5$,$\beta=0.5$。如果这样的趋势继续下去,因果预测将提供最佳的可能线性回归直线(使用最小二乘法)进行预测。然而当环境变化引起趋势的变动,趋势性指数平滑会比因果预测有哪些优势?

13.37. 再考虑13.27。不考虑各年的波动,注意在过去10年中铜矿的年需求量有一个大体上升的趋势。因此将这个趋势外推,因果预测可以用来预测未来几年的销售量,以年份为自变量,需求量为因变量。

a. 在两维图中画出过去10年(从第一年到第十年)数据的散点图。以年份为横轴,需求量为纵轴。

E b. 找到适合这些数据的线性回归方程。

c. 将这条直线画在a构造的图中。

d. 用这条直线预测下一年的需求量(第11年)。

e. 用这条直线预测第15年的需求量。

f. 线性回归直线方程表明的年需求平均增长量说明了什么?

g. 使用管理科学互动模型中的预测模型生成数据图表和线性回归直线。然后观察拖动数据点上下移动时,线性回归直线会如何移动。

13.38. 豪华巡航线公司(Luxury Cruise Lines)拥有一个船队每年夏季往返于阿拉斯加(其他时间往返于其他地方)。每一个冬天,公司会做大量的广告为夏季招揽足够的旅客。新一个冬季即将来到,公司需要为做多少广告进行决策。

下面的表格显示了过去5年的广告量(千美元)和销售量(已经预定的旅客数,以1000人为一个单位)。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 广告量(千美元) | 225 | 400 | 350 | 275 | 450 |
| 销售量(千人) | 16 | 21 | 20 | 17 | 23 |

a. 当用现有数据进行因果预测时,什么是

自变量，什么是因变量？

b. 画出这些数据散点图。

E c. 找到适合这些数据线性回归直线方程。在 b 构造的图中画出这条直线。

d. 预测花费 30 万美元带来的销售量。

e. 预计要获得 22000 名旅客的订单，需要做多少广告。

f. 根据线性回归直线，每 1000 美元的广告量的增长会带来多少销售量的增长？

13.39. 重新考虑 13.38。使用管理科学互动模型中的预测模型生成线性回归直线。在显示回归直线和五个数据点（用蓝点表示）的图表中，注意最左边的数据点、中间的数据点和最右边的数据点都非常接近直线。通过用鼠标垂直拖动这些点，你可以观察相应的线性回归直线的移动。

当上述数据点发生以下变化时（其他点不变），观察线性回归直线是高于、低于或正好穿过这三个点。

a. 当广告量是 225 时，将销售量从 16 变为 19。

b. 当广告量是 450 时，将销售量从 23 变为 26。

c. 当广告量是 350 时，将销售量从 20 变为 23。

13.40. 为了维持庞大的机队，北美航空公司（North American Airlines）拥有一个巨大的零备件库存，包括翼襟。由于使用时间的上升会提高损坏的几率，为了每月更换损坏的翼襟，库存中备有的翼襟数部分取决于那个月里整个机队的飞行时数。

下面的表格显示了整个机队最近几个月每月需要更换的翼襟数量和飞行时数（千小时）。

| 飞行时数（千小时） | 162 | 149 | 185 | 171 | 138 | 154 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 所需翼襟量 | 12 | 9 | 13 | 14 | 10 | 11 |

找到在用给定的飞行时数和所需翼襟数的基础上进行因果预测时的自变量和因变量。

a. 画出散点图。

E c. 找出线性回归直线方程。

d. 在 b 构造的图中画出这条直线。

e. 预计计划飞行时间为 15 万小时时的月平均翼襟需求量。

f. 以飞行时间为 20 万小时重复 e。

g. 使用管理科学互动模型中的预测模型生成数据图表和线性回归直线。然后观察拖动数据点上下移动时，线性回归直线会如何移动。

E13.41. 乔・巴恩斯是城中主要的屋顶制造企业之一斯丹亭托尔公司（Standing Tall）的所有人。公司大量的业务来自于为新的房屋建造屋顶。乔了解到新房屋的总承包商会在建造开始后将屋顶的建造工作外包。因此为了给他的工作人员提供一个长期安排，乔决定用乡镇每月允许建造的房屋数量记录来预测下两个月为新房屋建造屋顶的工程个数。

现在乔收集了过去一年每个月数据，如下表所示，第二列给出了在那个月所允许建造的房屋数量，第三列给出了在那个月新房屋建造屋顶的工程个数。

| 月份 | 许可数 | 项目数 | 月份 | 许可数 | 项目数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 月 | 323 | 19 | 7 月 | 446 | 34 |
| 2 月 | 359 | 17 | 8 月 | 407 | 37 |
| 3 月 | 396 | 24 | 9 月 | 374 | 33 |
| 4 月 | 421 | 23 | 10 月 | 343 | 30 |
| 5 月 | 457 | 28 | 11 月 | 311 | 27 |
| 6 月 | 472 | 32 | 12 月 | 277 | 22 |

使用因果预测方法为乔开发一个预测程序。

# 案例 13.1 预测手段的改进

马克・劳伦斯（Mark Lawrence）已经花了两年多的时间追求一个美好远景。从他当上顶尖公司（Cutting Edge）——一家大型的计算机外围设备制造公司——的人力资源部经理起，不顺心的事就开始了。在那时他领导下的人力资源部为分布在全美国的 60000 名公司员工提供记录及收益管理。在全国有 35 个分散的记录及收益管理中心，雇员通过与这些记录及收益管理中心接触获得关于收入计划及股票期权、税收变动表格及个人信息、请假及退休报批过程的信息。这些管理中心的分散状况使得马克很头疼。他不得不处理员工的抱怨，经常是因为每个中心对公司政策进行了不同的解释——交流不畅给了员工不确切的回答。因为控制 35 个分散的中心很不经济，他的部门也饱受了高成本之苦。

他的美好远景是什么？通过建立惟一的管理中心将记录及收益管理集中起来。这个集中化的记录

和收益管理中心有两个功能:数据管理和顾客服务。数据管理功能包括在员工绩效测评之后更新员工记录以及维护人力资源管理系统。顾客服务功能包括建立一个呼叫中心,解答员工关于记录和收入的问题,并通过电话处理记录和收入的改变。

在他向管理层建议他的想法一年后,马克得到了公司管理层的同意。他列出了一系列要做的事情——明确对计算机及电话系统的要求、配备硬件及软件、将35个分散的管理中心的数据汇总、将记录保存及应答过程标准化和为管理中心配备工作人员。马克将明确系统要求、配备软硬件和汇总工作委托给一群胜任的技术专家完成。他负责过程标准化和管理中心员工配备工作。

马克在人力资源领域已经工作了多年,因此在对记录保存和应答过程标准化方面几乎没有任何困难。然而,他在决定配备给中心的代表人数上却遇到了困难,而且,他对为呼叫中心配备员工特别犯愁,因为代表直接应答来自于顾客——公司的60000名员工的电话。顾客服务代表要接受大量的培训,使得他们知道记录及收入政策的过去和将来,以准确地回答问题并使得操作过程的改变有效率。过量的员工会使得马克为培训过多的代表支付大量的开支并付给多余的代表与工作强度对应的高薪。员工不足会使得马克继续为顾客的抱怨而头疼,这也是他极力避免的情况。

马克所需要的顾客服务代表数取决于记录及收益管理呼叫中心接到的电话数。于是马克需要预测新的集中化的中心将接到的电话数。他原先用判断预测方法来解决这个问题。通过分析35个分散的管理中心其中一个的数据,他发现这个分散的中心向15000个顾客提供服务,每月接到2000个电话。于是,他得出结论:由于新的集中化的中心要向四倍于这个数的顾客——60000位顾客——提供服务,他会每月接到四倍的呼叫量,即8000个电话。

马克慢慢地检查了他的项目清单,集中化的记录和收益管理中心在他得到了公司管理层的批准后开始运行了。

现在,新的中心运行了13个星期之后,马克的呼叫中心预测被证明极为不准。中心接到的电话数是马克预计的每日8000个电话的3倍。由于需求过量,这个呼叫中心慢慢地走向崩溃。在顾客打电话给中心时必须平均等待五分钟才能够与代表通话。马克收到了大量的抱怨。与此同时,顾客服务代表也有意见。因为过量的需求,工作压力过大,他们已处在辞职的边缘了。甚至公司管理层也已经意识到了员工和中心提供服务不足的问题。执行官们已经警告马克进行改进。

马克需要帮助,他向你求助以获得呼叫中心需求的更准确的预测。

幸运的是当马克开始建立呼叫中心时,他意识到了保存数据的重要性。他向你提供了过去13个星期中每一天接到的呼叫量。数据从去年的第44周开始,到今年的第5周结束。

| | 星期一 | 星期二 | 星期三 | 星期四 | 星期五 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第44周 | 1130 | 851 | 859 | 828 | 726 |
| 第45周 | 1085 | 1042 | 892 | 840 | 799 |
| 第46周 | 1303 | 1121 | 1003 | 1113 | 1005 |
| 第47周 | 2652 | 2825 | 1841 | 0 | 0 |
| 第48周 | 1949 | 1507 | 989 | 990 | 1084 |
| 第49周 | 1260 | 1134 | 941 | 847 | 714 |
| 第50周 | 1002 | 847 | 922 | 842 | 784 |
| 第51周 | 823 | 0 | 0 | 401 | 429 |
| 第52周/第1周 | 1209 | 830 | 0 | 1082 | 841 |
| 第2周 | 1362 | 1174 | 967 | 930 | 853 |
| 第3周 | 924 | 954 | 1346 | 904 | 758 |
| 第4周 | 886 | 878 | 802 | 945 | 610 |
| 第5周 | 910 | 754 | 705 | 729 | 772 |

马克说没有电话接入的几天是假日。

a. 马克首先要求你用过去13周的数据预测下周(第5周末开始)每天的需求量。你现在要对下周所有的日子进行预测。你应当将每天的预测值作为实际的呼叫量,对这一周的每一天进行预测。
1. 通过对记录和收益管理中心工作的了解,你发现一周里的需求量有"季节"趋势。例如在一周开始时有较多的员工打电话进来,因为这时他们比在周末盘算周末计划时更有活力和生产积极性。因此你意识到你必须使用季节方式对马克给你的数据进行相应的调整。过去13周的季节调整呼叫量是多少?

2. 用季节调整呼叫量数据，以上期值预测法预测下周每天的需求量。
3. 用季节调整呼叫量数据，以平均值预测方法预测下周每天的需求量。
4. 用季节调整呼叫量数据，以移动平均方法预测下周每天的需求量。你决定使用最近5天的数据。
5. 用季节调整呼叫量数据，以指数平滑方法预测下周每天的需求量。你决定将平滑常数设置为0.1，因为你认为没有季节影响的需求量是相对稳定的。过去13周的日平均呼叫量作为初始值。

b. 一周以后，你的预测时期过去了。你意识到你可以判定你的预测方法的准确性，因为你现在拥有你所预测的这个星期的实际呼叫量。实际呼叫量如下所示：

| | 星期一 | 星期二 | 星期三 | 星期四 | 星期五 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第6周 | 723 | 677 | 521 | 571 | 498 |

用每一种预测方法计算平均绝对误差并评价方法的优劣。在计算平均绝对误差时，你应当使用上面a所得到的实际预测值。你不应该在实际预测值的基础上重复计算预测值。在你的评价中，给出一种方法有效或无效的原因。

你意识到你所使用的预测方法不能提供高的准确度。于是，你决定发挥创造力并结合统计和判断预测方法进行预测。你了解到马克使用了35个分散的记录和收益管理中心之一的数据进行预测。因此你怀疑这个分散中心保存有呼叫量数据。因为分散中心有着现在的集中化的中心相同的功能，你认为来自与分散的中心的呼叫量数据会给你预测新的集中化的中心提供帮助。你只需要弄清分散中心的数据与新的集中化中心的数据间的关系是什么。当你找到了这个联系之后，你就可以用分散中心的数据来预测集中化中心的呼叫量。

你问马克是否有分散中心的数据，他说数据是有的，但不是你所需要的形式。有的是事件数数据而非呼叫量数据。你不知道其中的区别，于是马克继续向你解释，他说有两种需求量数据：事件数数据和呼叫量数据。事件数数据记录了呼叫中心的代表人所采取的行动。呼叫量数据记录了呼叫中心代表人应答的电话数。一个事件可能要用一个或多个电话解决。因此事件数总是小于或等于呼叫量。

你只有分散中心的事件数数据，你当然不愿意拿苹果来和桔子做比较。于是你询问是否有新的集中化中心的事件数数据。马克对你一笑，点了点头。他明白了你将会如何预测，所以他告诉你他将在一小时内将数据给你。

c. 一小时以后，马克来到你的桌前，给了你两套数据：分散中心的周事件数数据和集中化中心的周事件数数据。你问马克是否有日事件数数据。他说没有。因此你不得不首先预测下一周的周需求，然后将这个周需求转化为日需求。

分散化中心于去年新的集中化中心开始运作时关闭。于是你拥有分散中心从两年前的第44周到去年的第5周的事件数数据。你见这些分散中心的数据与集中化中心去年第44周到今年第5周的数据进行了比较。周事件数数据如下表所示：

| | 分散状况数量 | 集中状况数量 |
|---|---|---|
| 第44周 | 612 | 2052 |
| 第45周 | 721 | 2170 |
| 第46周 | 693 | 2779 |
| 第47周 | 540 | 2334 |
| 第48周 | 1386 | 2514 |
| 第49周 | 577 | 1713 |
| 第50周 | 405 | 1927 |
| 第51周 | 441 | 1167 |
| 第52周/第1周 | 655 | 1549 |
| 第2周 | 572 | 2126 |
| 第3周 | 475 | 2337 |
| 第4周 | 530 | 1916 |
| 第5周 | 595 | 2098 |

1. 找出分散中心事件数数据与集中化中心事件数数据间的数量联系。
2. 现在你有了分散中心和集中化中心周事件数数据的联系，你可以对下一周新的中心的事件数进行预测。不幸的是你要的不是周事件数，而是呼叫量数据。为了从事件数数据中计算出呼叫量，你进行了深入的分析，发现每一个事件平均产生了1.5个电话。为了从周呼叫量中计算出日呼叫量，你决定使用季节性因子进行转换。在给出了分散中心去年第6周的事件数数据后，预测新的中心今年第6周的呼叫量数据

| | 第6周 |
|---|---|
| 分散状况数量 | 613 |

3. 使用b给出的实际呼叫量，计算平均绝对误差，并评价这个预测方法的有效性。

d. 你会向马克推荐哪种预测方法？为什么？在呼叫中心继续运作的前提下，你会为改进预测程序提供什么建议？

CHAPTER

# 14 排队模型

## 学习目标

完成本章学习后，你应该掌握：

1. 描述排队模型的要素。
2. 知道排队模型中经常使用的概率分布的特点。
3. 举一些经常碰到的排队系统的例子。
4. 知道排队系统的关键绩效测度以及它们之间的关系。
5. 描述主要几类基本的排队模型。
6. 为排队系统选择适合的排队模型。
7. 应用排队模型为一个排队系统决定关键的绩效测度。
8. 描述在有优先权的排队模型中，顾客的不同重要级别是如何体现出来的。
9. 描述排队模型提供的一些用来帮助设计排队系统的关键信息。
10. 应用经济分析来决定在排队系统中应该提供多少服务台。

排队是日常生活的一个组成部分。我们都会排队购买电影票、在银行存款、邮寄包裹、在咖啡屋购买食品、在游乐园骑马等。我们对此已经习以为常了，但是我们仍然会为排长队而恼怒。

然而，排队不仅仅会引起个人的恼怒。整个国家的人浪费在排队上的时间是影响生活质量和国家经济效率的一个主要因素。例如，前苏联就是由于人们为了购买日常必需品经常不得不排极长的队而臭名远扬。甚至在今日的美国，据估计人们每年消耗在排队中的时间达370亿小时。如果将这些时间用于生产，这几乎将是一年中2000万人的有效工作时间。

甚至这些令人惊愕的数据还没有体现出过多的等待所造成的全部影响。除了人们排队之外，其他类型的排队也会导致严重的无效率。例如，使设备停下来修理会造成生产损失。运输工具（包括轮船和卡车）因为等待卸货而耽误后面的运输。飞机等待起飞或降落会打乱后面的飞行计划。由于线路饱和造成的远程通

讯传输中的延迟会使数据失真。制造工作的等待会打乱后续制造过程。服务工作的耽误超过规定期限可能导致丧失未来的获利机会。

排队论研究所有这些情况下的等待。它使用排队模型代表现实中的各种类型的排队系统(涉及某个排队类型的系统)。每一个模型的公式表示了相应的排队系统如何工作,包括在不同情况下的平均等待量。

这些排队模型对于决定如何以最经济的方式控制排队系统是很有帮助的。提供过多的服务能力来控制这个系统会造成过量的成本。但是提供的服务不足会导致过多的等待以及造成所有不希望看到的结果。这些模型能够找到服务成本和等待量之间的适当平衡。

本章开始的三节描述了排队模型的要素,举出了各种可以使用模型的重要排队系统的例子,并提供衡量这些排队系统绩效的方法。14.4 节介绍了一个案例,这个案例将会贯穿于本章的大部分内容。接下来的三节介绍了与案例分析有关的三个最重要的排队模型。14.8 节根据案例分析中排队系统的设计总结了一些要点。在描述了如何将经济分析用于决定排队系统服务台的数量的选择后,本章通过介绍一些获奖的排队论应用做了总结。

## 14.1 排队模型的要素

我们以介绍本章的排队模型所假设的基本排队系统来开始。

### 基本排队系统

图 14.1 显示了一个典型的排队系统(Queuing System)。顾客(Customer)一个挨着一个到来,接受某种服务。如果一个到达的顾客不能立即接受服务,这个顾客就加入到一个队列(Queue)中(这个队列不包括正在接受服务的顾客)。在服务机构中由一个或多个服务台(Servers)提供服务。每一个顾客都单独地被其中一个服务台服务,然后离开。你可以通过演示在 www.mhhe.com/hillier2e 或者光盘中的管理科学互动模型的排队模型,来看排队系统的例子。

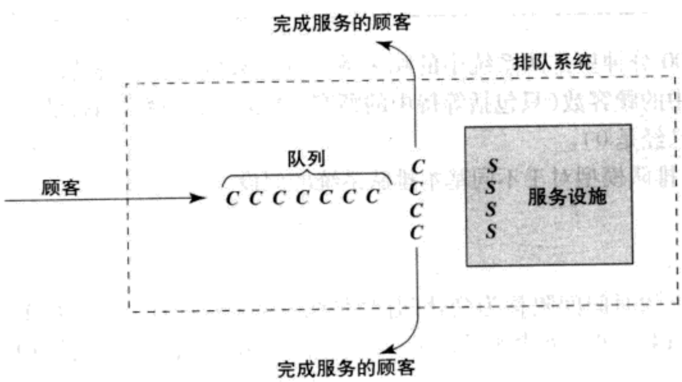



图 14.1 基本的排队系统,每一位顾客用 C 表示,每一个服务台用 S 表示。虽然这里显示有四个服务台,一些服务系统(包括本节举的例子)只有一个服务台。

对于一些排队系统,顾客是人。然而,在其他情况中,顾客可能是运输工具(例如飞机等待在跑道上降落)、机器设备(如设备等待修理)或其他的东西(如生产过程中的工作等待)。

一个服务台通常是一个人。然而,也有可能是一群人一起工作为每一位顾客提供服务。服务台可能是机器设备、运输工具、电子设备等。

在大多数情况下,队列可能就是一个普通的等待队列。然而,对于顾客来说没有必要在

一个拥有服务设施的物理服务台前站成一队。他们可以坐在等待室里。他们还可能分散在一个区域中等待服务者前去服务(例如固定的设备需要修理)。

下一节介绍了更多符合图 14.1 和上面的描述的重要排队系统的例子。本章中所有的排队模型也都基于这张图。

然而,还应当指出的是在实践中有时会有更复杂的排队系统。例如一个服务台可以同时为一群顾客提供服务。顾客也可能一群群而不是一个个地到来。不耐心的顾客在接受服务前可能会离开。排队系统可能包含多个队列,一个队列对应一个服务台,顾客会偶然从一个队列转到另一个队列。它还可能包括多个服务设施,一些顾客需要经过多于一个服务设施得到全部所需的服务(最后这种排队系统成为排队网络)。这些排队系统也十分重要,但是我们将不再深入研究用于处理这些情况的更复杂的排队模型。下一章我们将介绍另一项通常用于分析复杂排队系统的技术(计算机仿真)。

## 一个例子

赫尔卡特先生是一个德国理发师,开了一家单人理发店。因此,他的理发店是一个基本的排队系统,只有他一个服务者。

赫尔卡特先生在每个工作日早上 8 点开始营业。表 14.1 显示了一个早晨开始时他的排队系统的动作。它告诉我们他每次的前 5 名顾客什么时候到,什么时候开始理发,需要理发多长时间以及什么时候理发完毕。

**表 14.1 赫尔卡特先生最先五个顾客的数据**

| 顾　客 | 到达时间 | 理发开始时间 | 理发时间(分) | 理发结束时间 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8:03 | 8:03 | 17 | 8:20 |
| 2 | 8:15 | 8:20 | 21 | 8:41 |
| 3 | 8:25 | 8:41 | 19 | 9:00 |
| 4 | 8:30 | 9:00 | 15 | 9:15 |
| 5 | 9:05 | 9:15 | 20 | 9:35 |
| 6 | 9:43 | — | — | — |

图 14.2 标示出了在开始 100 分钟里排队系统中的顾客数。这个数量包括了等待理发和正在理发的顾客。因此队列中的顾客数(只包括等待中的顾客)要少一个(除非当排队系统中的顾客数是 0 时这个数字已经是 0)。

参考这个例子,让我们看看排队模型对于不同基本排队系统的假设。

## 到　达

连续两个顾客到达排队系统的时间间隔称为到达间隔时间(Interarrival Times)。对于赫尔卡特先生的理发店来说,表 14.1 第二列表明了这个早晨的到达间隔时间为 12 分钟、10 分钟、5 分钟、35 分钟和 38 分钟。

> 连续两个顾客到达排队系统的时间间隔(称为到达间隔时间)通常变化很大。

到达间隔时间的巨大差异对于排队系统来说是很正常的。对于赫尔卡特先生来说,通常不可能预测要过多长时间下一个顾客才会到来。

然而,在搜集了像表 14.1 第二列那样更多的数据后,有可能做下面两件事:

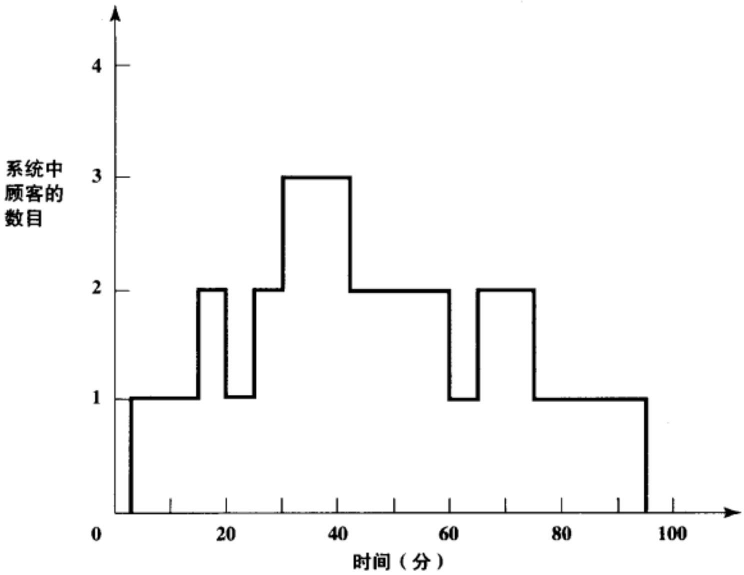



图 14.2　根据表 14.1 的数据，赫尔卡特先生理发店开始 100 分钟顾客数的发展情况。

1. 估计单位时间里顾客到达的期望数。这个数量通常被称为平均到达率(Mean Arrival Rate)(这个量用希腊字母 λ 表示)。
2. 估计到达间隔时间的概率分布形式。

这个分布的均值实际上可以直接从第一步所求得的数据得到。由于

$$\lambda = \text{顾客到达排队系统的平均到达率}$$

间隔时间的概率分布均值是：

$$\frac{1}{\lambda} = \text{期望到达间隔时间}$$

例如，在搜集了更多的数据后，赫尔卡特先生发现在 100 个小时里有 300 个顾客到达[①]。因此 λ 的估计是

$$\lambda = \frac{300\text{ 位顾客}}{100\text{ 小时}} = \text{平均每小时三个顾客}$$

相应的期望到达间隔时间的估计为：

$$\frac{1}{\lambda} = \text{顾客到达平均间隔}\frac{1}{3}\text{小时}$$

大多数的排队模型假设到达间隔时间的概率分布的形式是指数分布，解释如下。

## 到达间隔时间的指数分布

图 14.3 显示了指数分布的形状，这里不同时间对应的曲线的高度代表了这些时间出现

① 300 人到达包括进入理发店但由于等待时间过长而决定离开的顾客，这些立即离开的影响将在 CD-ROM 上本章的补充材料中进行分析。

的相对可能性。注意在曲线最高点时间非常小,随着时间变长曲线以"指数形式"下降。这表明低于均值的较小的到达间隔时间有大的可能性。而分布向右伸展很长表明比均值大得多的到达间隔时间出现的概率很小。所有这些到达间隔时间的特征都能在实践中观察到。一些顾客会很快到达,然后又过了一个很长时间的间隔下一个顾客才来到。

到达间隔时间剧烈的变动使得不可能预测下一个顾客何时到达。当变动的程度像指数分布一样大时,就称为具有随机到达。

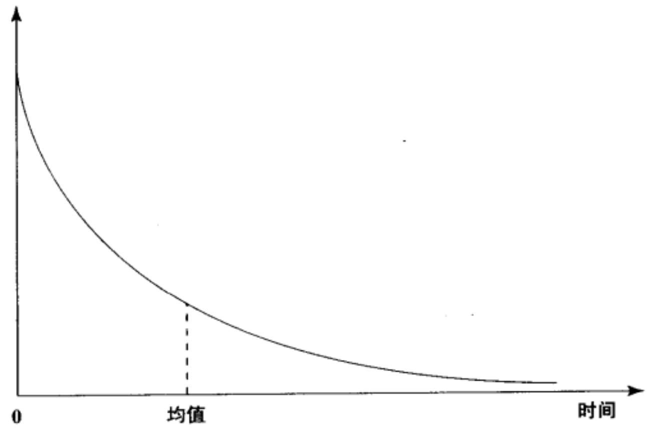



图 14.3 指数分布的形状,在排队模型中通常用于到达间隔时间的分布(有时也用作服务时间的分布)。

对于大多数的排队系统,服务台无法控制顾客何时到达。在这种情况下,顾客总的来说是随机到达的。随机到达意味着到达时间是完全无法凭感觉预测的,下一分钟有顾客到达的概率和其他分钟相同(不多也不少)。从上一个到达发生经过了多长时间并不重要。惟一符合随机到达的到达间隔时间分布是指数分布。

> 当顾客是随机到达的,间隔时间为指数分布。在这种情况下,下一次到达的概率完全不受上一次到达的影响(称为无记忆特性)。

下一分钟到达的概率完全不受上一次到达的影响的事实称为无记忆特性(Lack-of-memoryProperty)[或称为马尔可夫特性(Markovian property)]。这是一个奇怪的特性,因为它表明从现在到下一个到达的剩余时间的概率分布总是相同的,不管下一个到达发生在现在还是一段很长的时间以后。因此从现在开始的剩余时间的概率分布与图 14.2 中总到达间隔时间的分布是相同的(这就是为什么下一分钟到达的概率总是相同的原因)。对无记忆特性的概念要有一段熟悉的时间,它是随机到达的一个组成部分。

## 队　列

队列是顾客接受服务前等待的地方。对于赫尔卡特先生的理发店,队列中的顾客坐在椅子里(除了理发用的椅子)等待理发。

因为有两种方法统计顾客的数量,排队模型将它们用下面的术语区分开来:

**队列中的顾客数**(Number of Customers in the Queue)(或简称为队列大小)是等候服务的顾客数量。
系统中的顾客数(Number of Customers in the System)是队列中的顾客数加上正在接受服务的顾客的数量。

例如,图 14.1 显示了队列中有 7 个顾客,加上正在接受服务的 4 个顾客,在系统中总共有 11 个人。既然赫尔卡特先生是排队系统中惟一的服务者,队列中的顾客数比系统中的顾客数少一个,如图 14.2 所示(除非系统中的顾客数和队列中的顾客数都为 0)。

队列容量(Queue Capacity)是队列所能容纳顾客的最大数量。无限队列(Infinite Queue)是为了应用的方便,可以容纳无限数量顾客的队列。当容量很小,需要将其考虑在

内时，这个队列就称为有限队列(Finite Queue)。当有限队列已满时，任何新到来的顾客会马上离开。

赫尔卡特先生的队列实际上是有限队列。由于他只准备了三张椅子(除了理发用的椅子)，这个队列的容量是3(他发现当已经有三个顾客在等待的时候，新来的顾客就不再愿意等待理发了)。

本章所有的排队模型都假设队列是无限队列，所以对队列中的顾客数没有限制。

除了特别说明的情况，排队模型通常假设队列是无限队列(本章所有的模型都有这个假设，但是 CD-ROM 上本章的补充材料介绍了一个模型，这个模型假设为有限模型。这个模型可以用来分析赫尔卡特先生的理发店的情况)。

顾客服务优先规则(Queue Discipline)是指选择队列中的成员接受服务的顺序。最普通的规则是先到先服务(FCFS)。然而，其他的可能规则包括随机服务、有优先权的服务甚至后到先服务(最后一种情况，例如，当在一台机器上处理的工作是将后到的工作放在先到的工作上面堆积起来的时候，机器操作工将会从最上面开始处理这些工作)。

14.7 节将讨论有优先权的排队模型。对于本章的其他排队模型都遵循先到先服务的传统假设。

## 服 务

对于一个基本的排队系统，每一个顾客单独接受一个服务者提供的服务。拥有多于一个服务台的系统称为多服务台系统，单服务台系统只有一个服务台(就像赫尔卡特先生的理发店那样)。

当一个顾客接受服务时，从服务开始到结束经过的时间称为服务时间(Service Time)。每一位顾客的服务时间是不同的。然而基本的排队模型假设服务时间是一个特定的概率分布，与哪一个服务台正在提供服务无关。

用于表示服务时间分布均值的符号是：

$$\frac{1}{\mu} = \text{期望服务时间}$$

这里 $\mu$ 是一个希腊字母。对 $\mu$ 的解释是：

$$\mu = \text{一个连续工作的服务台单位时间完成的服务量的期望值}$$

这个数量称为平均服务率(Mean Service Rate)。例如，赫尔卡特先生理发的期望时间是：

$$\frac{1}{\mu} = 20\text{ 分钟} = \text{每位顾客}\frac{1}{3}\text{小时}$$

因此他的平均服务率为

$$\mu = \text{每小时 3 位顾客}$$

正如下面所描述的，不同的排队模型提供了服务时间分布的不同选择。

## 一些服务时间的分布

应用最多的服务时间概率分布是指数分布(Exponential Distribution)，其图形已经在图

14.3 介绍过了。使用这个分布的主要原因是这个分布比其他分布容易分析得多。尽管这个分布在大多数情况下非常适合于到达间隔时间,对于服务时间实际上却不全是这样。根据排队系统特性的不同,指数分布可能是一个相当不错的近似,但也可能与实际服务时间分布大相径庭,必须小心。

正如图 14.3 告诉我们的,指数分布表明大量的服务时间是很短的(大大短于均值),但是服务时间有时会非常长(远长于均值)。这准确地表示了这样一个排队系统,许多顾客只有少量的事情需要服务台处理,偶尔也会有一些顾客有大量的事情。例如,如果服务台是银行的出纳,许多顾客只有一笔存取业务,但是偶尔会有一些顾客有许多笔业务。

> 对于有些排队系统,服务时间不像指数分布中的那样容易变动,所以就应该考虑使用其他分布的排队模型。

然而有些排队系统包含一系列固定顺序的操作,对于每一个顾客要花费大约相同的时间。指数分布对于这样类型的排队系统很不适合。例如,当服务台是 ATM 机时就是这样的情况。尽管不同的顾客的服务时间会有很小的一些不同,这些时间从总体来看是大约相同的。

对于后一类型的排队系统,一个好得多的近似是固定服务时间(Constant Service Time),也就是说对于每一位顾客有相同的服务时间[这也被称为服务时间具有退化分布(degenerate distribution)]。

对于服务时间的波动,指数分布和退化分布代表了两种相当极端情况。衡量波动量的一个标准是分布的标准差,用 $\sigma$ 表示。例如一个 $\sigma$ 值几乎与服务时间分布的均值($1/\mu$)一样大。这是一个很大的标准差,说明波动大。对于上面两种分布,标准差是:

$\sigma$ = 均值　　指数分布

$\sigma = 0$　　退化分布(固定服务时间)

> 爱尔朗分布为许多排队系统提供了更实际的服务时间分布。

对于许多排队系统,服务时间的波动量介于指数分布和退化分布之间。另一个波动量介于两者之间的服务时间分布是爱尔朗分布(Erlang Distribution)[这个分布以 20 世纪初的丹麦数学家 A. K. Erlang 的名字命名,他为哥本哈根电话公司(Copenhagen Telephone Company)进行电话等待分析时开始发展了排队论]。这个分布有一个参数 $k$,称为形状参数,它决定了标准差 $\sigma$。特别地:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{k}}\ \text{均值}$$

这里,$k$ 可以是任意正整数($k = 1, 2, 3, \cdots$)。图 14.4 显示了一些 $k$ 值对应的分布的形状。

当 $k = 1$ 时,这个图表明爱尔朗分布的形状与指数分布相同。这不是巧合,这是因为对于 $k = 1$ 时这两种分布是相同的。对于较大的 $k$ 值,这张图表明分布的最高点(称为众数)不再是 0 点,实际上:

$$\text{众数} = \left(\frac{k-1}{k}\right)\text{均值}$$

因此,当 $k$ 值上升时,众数越来越接近均值,同时分布的跨度(标准差)下降。当 $k = \infty$ 时,$\sigma = 0$,爱尔朗就是退化分布。于是前面两种服务时间的分布可以看作是爱尔朗分布的特例。

一些排队模型使用其他的服务时间分布,但这三种是最重要的。

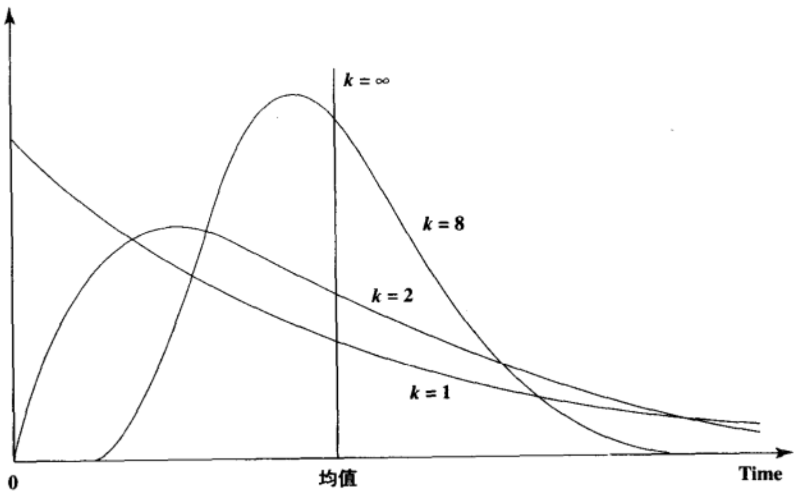



图 14.4　一些均值相同，形状参数 $k$ 不同的爱尔朗分布的形状

表 14.2 根据几个 $k$ 值，将这三种服务时间分布的标准差进行了比较。注意 $k$ 值翻了两番，标准差减小了 1/2。

**表 14.2　服务时间分布标准差与均值的关系**

| 分　布 | 标准差 |
|---|---|
| 指数 | 均值 |
| 退化（固定） | 0 |
| 爱尔朗，任何 $k$ 值（$k=1,2,\cdots$） | $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 均值 |
| 爱尔朗，$k=2$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 均值 |
| 爱尔朗，$k=4$ | $\frac{1}{2}$ 均值 |
| 爱尔朗，$k=8$ | $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 均值 |
| 爱尔朗，$k=16$ | $\frac{1}{4}$ 均值 |

在为一个使用中的排队系统选择排队模型的服务时间分布以重新设计排队系统时，一个很好的途径是积累一些实际服务时间的观察值。将这些数据简单地求平均值就可以得到分布均值的估计。类似地，样本方差的平方根就是标准差的估计。表 14.2 右边的一列可以用来确定分布和整数 $k$ 的值（对于爱尔朗分布来说）。它给出了对标准差的最接近的估计。

当设计一个新的排队系统时，有必要在过去类似系统的经验的基础上估计服务时间分布的均值和标准差。

如果标准差与均值很接近，开发者通常选择指数分布，因为它很方便。

## 排队模型的符号表示

为了表示服务时间（以及到达间隔时间）服从什么概率分布，基本排队系统的排队模型通常用如下的符号表示：

服务时间的分布

—/—/— ←服务台数量

到达间隔时间的分布

用于表示可能的分布的符号是(服务时间以及到达间隔时间):

$M$ = 指数分布(马尔可夫)
$D$ = 退化分布(固定时间)
$E_k$ = 爱尔朗分布(形状参数 = $k$)

> 第一个符号标明间隔时间的分布,第二个符号标明服务时间的分布。

例如,*M/M/*1 模型是单服务台模型,它假设到达间隔时间和服务时间都服从指数分布。*M/M/*2 模型是相应有两个服务台的模型。用 $s$ 代表服务台的数量,*M/M/s* 模型对应有任意个服务台的模型。类似地,*M/D/s*模型具有服从指数分布的到达间隔时间、固定服务时间和任意数量的服务台。$M/E_k/2$ 模型具有服从指数分布的到达间隔时间,服从爱尔朗分布($k$ 是任意值)的服务时间,两个服务台。

除了指数分布外,到达间隔时间也可以是退化分布或爱尔朗分布。*D/M/s* 模型具有固定到达间隔时间、指数分布的服务时间、任意数量的服务台。$E_k/M/2$ 模型具有服从爱尔朗分布的到达间隔时间、指数服务时间、两个服务台。

上面所有的排队模型都会在本章下面的内容中至少作了简要的介绍,并介绍了这些排队模型的使用效果。

还有一些排队模型(有限数量)允许选择任意的概率分布来描述到达间隔时间和服务时间。这种情况下使用的符号是:

$GI$ = 独立的到达间隔时间的一般分布(允许任意类型的分布)
$G$ = 服务时间的一般分布(允许任意类型的分布)

因此 *GI/M/s* 模型允许任意的到达间隔时间分布(到达间隔时间是独立的),服务时间服从指数分布,有任意数量的服务台。*M/G/*1 模型具有服从指数分布的到达间隔时间,一个服务台,但是允许服务时间是任意分布(对于后一种模型我们将会在后面进行讨论)。

## 模型假设的总结

我们在下面列出了基本排队系统排队模型的假设。除非另加说明,所有假设都适用于每一个模型。

1. 到达间隔时间是独立的,服从一种特定的概率分布。
2. 所有到达的顾客都进入排队系统,并待在那里直到服务结束。
3. 排队系统有一个无限队列,因此队列将可以容纳无限量的顾客(出于应用的原因)。
4. 顾客服务优先规则是先到先服务。
5. 排队系统拥有特定数量的服务台,每一个服务台能够为任意一位顾客提供服务。
6. 每一位顾客由一个服务台单独提供服务。
7. 服务时间是独立的,服从特定的概率分布。

## 问题回顾

1. 除了人之外,排队系统的顾客还可能是什么?

2. 除了单个的人,排队系统的服务台还可能是什么?
3. 平均到达率和到达间隔时间概率分布均值之间有什么关系?
4. 指数分布的形状是什么?
5. 指数分布的均值和标准差之间有什么关系?
6. 顾客随机到达表示什么意思?什么样的到达间隔时间对应了随机到达?
7. 队列中的顾客数和系统中的顾客数之间有什么区别?
8. 对于大多数排队模型的队列容量有什么传统的假设?
9. 服务时间分布的均值和一个连续服务的服务台的平均服务率有什么联系?
10. 三种最重要的服务时间分布是什么?比较它们的标准差。
11. 排队模型的三部分的符号表示为我们提供了什么信息?

## 14.2 排队系统的一些例子

上一节对排队系统的描述比较抽象,只适用于一些非常特殊的情况。相反,排队系统应用的广泛程度却令人吃惊。为了扩展你对排队模型应用的了解,让我们看看实际中排队系统的各种例子。

我们日常生活中遇到的一种很重要的排队系统是商业服务系统(Commercial Service Systems),外部顾客接受商业机构的服务。表 14.3 第一列列出了典型的商业服务系统的例子。每一个例子都是排队系统,其顾客和服务台列在了第二和第三列。

商业服务系统是商业机构向外部顾客提供服务的排队系统。

这些例子中大多数是顾客到一个固定位置的服务台接受服务。如果顾客需要等待开始服务,这就形成了一个物理队列。然而,对于像管道修理服务和屋顶修建服务的例子,服务人员会到顾客那里,因此在队列中的顾客在地理上是分散的。在一些其他例子中,服务是通过电话提供的,也许一些顾客不会把电话挂掉(进入等待队列)。

**表 14.3　属于排队系统的商业服务系统的一些例子**

| 系统类型 | 顾　客 | 服务台 |
|---|---|---|
| 理发店 | 人 | 理发师 |
| 银行出纳服务 | 人 | 出纳 |
| ATM 机服务 | 人 | ATM 机 |
| 商店收银台 | 人 | 收银员 |
| 管道服务 | 阻塞的管道 | 管道工 |
| 电影院售票窗口 | 人 | 售票员 |
| 机场检票处 | 人 | 航空公司代理人 |
| 经纪人服务 | 人 | 股票经纪人 |
| 加油站 | 汽车 | 加油泵 |
| 订货呼叫中心 | 人 | 电话代理人 |
| 技术支持呼叫中心 | 人 | 技术代表 |
| 旅游代理 | 人 | 旅游代理人 |
| 汽车维修工厂 | 汽车所有人 | 机修工 |
| 自动售货服务 | 人 | 自动售货机 |
| 医治牙病服务 | 人 | 牙医 |
| 盖屋顶服务 | 屋顶 | 屋顶建造工人 |

内部服务系统是顾客在组织内部接受服务的排队系统。

一些组织有它们自己的内部服务系统(Internal Service System),顾客在组织内部接受服务。正如表 14.4 的例子所表明的,这些也是排队系统。在一些情况下,顾客是组织的雇员。在其他例子中,顾客是需要搬运货物、等待修理的机器、等待检查的项目、等待进行的工作等。

**表 14.4 属于排队系统的内部服务系统的一些例子**

| 系统类型 | 顾 客 | 服务台 |
|---|---|---|
| 秘书服务 | 雇员 | 秘书 |
| 复印服务 | 雇员 | 复印机 |
| 计算机编程服务 | 雇员 | 程序员 |
| 大型计算机 | 雇员 | 计算机 |
| 急救中心 | 雇员 | 护士 |
| 传真服务 | 雇员 | 传真机 |
| 物料处理系统 | 货物 | 物料处理单元 |
| 维护系统 | 设备 | 维修工人 |
| 质检站 | 物件 | 质检员 |
| 制造系统 | 工作 | 设备 |
| 半自动设备 | 设备 | 操作工 |
| 工具架 | 设备操作工 | 管理员 |

运输服务系统是涉及到运输的排队系统,所以顾客或服务台就是运输工具。

运输服务系统(Transportation Service System)提供了另一类重要的排队系统。表 14.5 给出了一些例子。对于一些例子,涉及到的运输工具就是顾客。在其他的例子中,每一台运输工具就是一个服务台。一些不同于基本类型的排队系统的例子在上一节已经描述过了。特别地,航空服务和电梯涉及到一个可以一次同时为一群顾客服务的服务台。停车位的队列是一个容量是零的例子,因为如果停车位已经被占据了(所有的服务台都处于忙的状态),到达的汽车(顾客)会到别的地方。

**表 14.5 属于排队系统的运输服务系统的一些例子**

| 系统类型 | 顾 客 | 服 务 台 |
|---|---|---|
| 公路收费站 | 汽车 | 收费员 |
| 卡车装货地 | 卡车 | 装货工人 |
| 港口卸货区 | 轮船 | 卸货工人 |
| 等待起飞的飞机 | 飞机 | 跑道 |
| 等待降落的飞机 | 飞机 | 跑道 |
| 航班服务 | 人 | 飞机 |
| 出租车服务 | 人 | 出租车 |
| 电梯服务 | 人 | 电梯 |
| 消防部门 | 火灾 | 消防车 |
| 停车场 | 汽车 | 停车空间 |
| 急救车服务 | 人 | 急救车 |

还有其他许多不符合上面任何一种类型的重要排队系统的例子。例如,司法系统是一

个排队网络，法庭是服务设施，法官（或陪审团）是服务台，等待审理的案件是顾客。一些医疗系统，如医院的急救室也是排队系统。例如 X 射线设备和病床可以看作是排队系统中的服务台。排队论的最初应用是电话工程（多亏了爱尔朗和哥本哈根电话公司），并且一般的通讯一直是排队论应用的重要领域。此外，我们都有自己的队列——家庭作业、要读的书等。排队系统确实遍及社会的许多领域中。

### 问题回顾

1. 什么是商业服务系统？给出一个这种系统的例子（除了表 14.3 中的例子之外），并指出其顾客和服务台。
2. 什么是内部服务系统？给出一个这种系统的例子（除了表 14.4 中的例子之外），并指出其顾客和服务台。
3. 什么是运输服务系统？给出一个这种系统的例子（除了表 14.5 中的例子之外），并指出其顾客和服务台。

## 14.3　排队系统的绩效测度

检查排队系统的管理人员主要考虑两种绩效测度：

1. 排队系统中有多少顾客在等待？
2. 这些顾客要等待多少时间？

由于顾客要等多少时间部分取决于当这个顾客到来时已经有多少位顾客在等待，这两个测度在某种程度上是有联系的。哪一个测度更重要取决于实际情况。

### 选择绩效测度

> 让内部服务系统的顾客等待会导致损失生产力。

当顾客是提供服务的组织（内部服务系统）的内部顾客时，第一个测度比较重要。在这种情况下，让顾客等待会使得他们在等待时成为组织中不具有生产力的成员。例如机器操作员的例子，机器操作员在工具槽前等待工具或机器停下来等待修理。让这些顾客等待会损失生产力。损失的生产力直接与等待的顾客数量有关。一个活跃的组织成员可以代替一个或两个闲散人员，但不能代替更多的人。

> 让商业服务系统的顾客等待会导致未来业务利润损失。

商业服务系统（外部顾客接受商业组织的服务）会认为第二个测度更加重要。对于这样的排队系统，一个重要的目标是保持顾客满意，使得他们会再次光临。比起已经有多少顾客在等待，顾客更关心他们会等待多久。使顾客等待时间过长会导致未来业务利润损失。

### 定义绩效测度

这两种测度通常以期望价值（从统计的角度）的形式表达。为此，有必要弄清楚我们统计的是只在队列中的顾客数量（也就是等待服务开始的顾客数量）还是系统中的顾客数量（也就是在队列中以及正在接受服务的顾客数量）。这两种情况定义了衡量的方式，也给了

我们四个绩效测度。这四个测度及其符号如下：

> 这是每个排队系统中的四个关键绩效测度。

$L$ = 系统中的顾客数(Number of Customers in the System)期望，包括正在接受服务的顾客[$L$ 来自于队长(Line Length)]

$L_q$ = 队列中的顾客数(Number of Customers in the Queue)期望，不包括正在接受服务的顾客

$W$ = 一个顾客在系统中的等待时间(Waiting Time in the System)期望(包括服务时间)[$W$ 来自于等待时间(Waiting time)]

$W_q$ = 一个顾客在队列中的等待时间(Waiting Time in the Queue)期望(不包括服务时间)

这些定义假设排队系统处于平稳条件(Steady-state Condition)中，也就是说，这个系统在工作了一段时间后仍然处于正常状态。在排队系统最初的开始阶段，系统中没有顾客，需要过一段时间系统中期望顾客数才会达到正常水平。在达到这个水平后，这个系统就称为处于稳定状态中(这个条件排除了短时间平均到达率突然上升的非正常情况)。

考虑整个排队系统($L$ 和 $W$)或仅仅是队列($L_q$ 和 $W_q$)，这取决于排队系统本身。对于医院的急救室和消防部门，队列(直到服务开始的时间)可能更加重要。对于一个内部服务系统，整个排队系统(组织中所有空闲成员的数量)更加重要。

## $L$、$W$、$L_q$、$W_q$ 之间的关系

$W$ 和 $W_q$ 之间的区别仅在于 $W$ 包括期望服务时间而 $W_q$ 不包括。因此由于 $1/\mu$ 代表了期望服务时间(这里 $\mu$ 称为平均服务率)

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

例如，如果

$$W_q = \text{队列中的平均等待时间}\tfrac{3}{4}\text{小时}$$

$$\frac{1}{\mu} = \text{平均服务时间}\tfrac{1}{4}\text{小时}$$

那么

$$\begin{aligned} W &= \tfrac{3}{4}\text{小时} + \tfrac{1}{4}\text{小时} \\ &= \text{排队系统平均等待时间 1 小时} \end{aligned}$$

> 这是一个立即进行 $L$、$W$ 互相推算的有用公式。

或许在排队论中提供了 $L$ 和 $W$ 间直接联系的最重要的公式是：

$$L = \lambda W$$

这里

$$\lambda = \text{到达排队系统的顾客的平均到达率}$$

为了纪念杰出的管理科学家约翰·律特(John D. C. Little)[MIT 的长期教员(long-term faculty member)]，这被称为 Little 公式(Little's Formula)。Little 在 1961 年给出了对这个公式的第一个严密的证明。

为了解释这个公式，假设

$$W = \text{排队系统的平均等待时间 1 小时}$$
$$\lambda = \text{平均每小时到达 3 位顾客}$$

那么有

$$L = (3\ \text{位顾客/小时})(1\ \text{小时})$$
$$= \text{排队系统中平均有 3 位顾客}$$

这里有一个对 Little 公式的直观解释。由于 $L$ 是任意时间排队系统中顾客的期望数量，所以一个顾客在服务完成后回头看看这个系统，应该看到平均有 $L$ 个顾客。在先到先服务的顾客服务优先规则下，这个顾客在排队系统中等待的时候，会有 $L$ 位顾客到来。平均等待时间是 $W$。由于 $\lambda$ 是单位时间到达顾客数量的期望值，$\lambda W$ 就是这个顾客在系统中等待的时间里，到达系统的期望顾客数量。因此，$L = \lambda W$。

Little 教授证明 $L = \lambda W$ 也适用于 $L_q$ 与 $W_q$ 的关系。因此 Little 公式的另一个形式是：

$$L_q = \lambda W_q$$

例如，如果

$$W_q = \text{队列的平均等待时间为} \tfrac{3}{4} \text{小时}$$
$$\lambda = \text{平均每小时到达 3 位顾客}$$

那么有

$$L_q = (3\ \text{位顾客/小时})(\tfrac{3}{4}\text{小时})$$
$$= \text{队列中平均有} 2\tfrac{1}{4} \text{位顾客}$$

结合上面的联系得到如下 $L$ 和 $L_q$ 的直接联系：

> 这些表达式显示了四个绩效测度之间的相互关系。

$$L = \lambda W = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right)$$
$$= L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

例如，如果 $L_q = 2\tfrac{1}{4}$，$\lambda = 3$，$\mu = 4$，那么

$$L = 2\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} = \text{系统中平均有 3 位顾客}$$

这些联系极为重要，因为它们使得所有四个基本量——$L$、$W$、$L_q$、$W_q$——在确定了一个量后就可以立即得到其他量。这些关系是非常有用的，因为当用基本规则求解排队模型时，这些基本量中有一些比其他容易确定得多。

## 用概率作为绩效测度

管理人员经常并不满足于仅仅知道队列系统中的各种平均值。除了希望 $L$、$W$、$L_q$、$W_q$ 不超过目标值外，他们还关心最坏情况。在只有一小段时间里（小概率）会达到的系统（或队列）中最多的顾客数是多少？在只有一小段时间里会达到的系统（或队列）中顾客最长的等待时间是多少？管理人员可能会认为排队系统应当以最大数量不超过特定值的方式进行设计。

要达到这个目标需要使用这些量(顾客数和等待时间)的平稳概率分布。例如,假设目标是在95%的时间里系统中的顾客数不超过3个。

使用这个符号:

$$P_n = \text{在系统中有 } n \text{ 个顾客的平稳概率}(n=0,1,2,\cdots)$$

实现这个目标要求:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \geqslant 0.95$$

因为顾客的等待时间会变化,$W$ 有概率分布,$W$ 是这个分布的平均数。

类似地,假设另一个目标是至少95%的顾客在系统中的等待时间不超过两个小时。让随机变量 $\mathscr{W}$ 作为系统在平稳条件下一个顾客在系统中的等待时间(因此 $W$ 是这个随机变量的期望值)。使用这个随机变量的概率分布,达到目标需要:

$$P(\mathscr{W} \leqslant 2 \text{ 小时}) \geqslant 0.95$$

如果目标是以队列中的等待时间表述的,相同的方式使用另一个随机变量 $\mathscr{W}_q$ 代表这个等待时间。

对于本章后面部分的一些排队模型,至少其中部分的概率可以用公式算出。管理科学课件中的 Excel 模板会为你进行这些计算。

## 问题回顾

1. 当顾客是组织中的内部顾客时,排队系统中哪个绩效测度比较重要?
2. 对于商业服务系统,哪个绩效测度比较重要?
3. 四个基于期望值的基本绩效测度是什么?它们的符号是什么?
4. 一个排队系统是平稳系统表示了什么意思?
5. 什么公式表示了 $W$ 和 $W_q$ 之间的联系?
6. 联系 $L$ 和 $W$ 的 Little 公式是什么?$L_q$ 和 $W_q$ 呢?
7. 什么公式表示了 $L$ 和 $L_q$ 之间的联系?
8. 什么类型的概率也可以用来衡量排队系统的绩效?

# 14.4 案例研究:杜皮特公司问题

杜皮特公司(Dupit Corporation)在办公复印机市场上长期处于领导地位。其中的一个原因是公司给消费者提供个性化的服务。杜皮特公司已经赢得了一个优良服务的声誉,并且公司想要保持这个声誉。

## 一些背景信息

杜皮特公司有一个服务部门,负责为公司的顾客提供高质量的服务支持,在需要的时候维修公司的设备。这项工作由公司的技术服务代表(service technical representation, tech reps)在顾客所在地进行。

每一位技术服务代表负责一个特定的地域。每次打了服务电话后,顾客都会见到同一

个技术服务代表,这使得公司可以提供个性化的服务。技术服务代表感觉自己是一个地区经理,也为此感到自豪。

约翰·菲塞特是杜皮特公司负责这个服务部门的高级副总裁。他一直都在公司工作,而且实际上也是从技术服务代表开始的。在他还是一个技术服务代表时,他上了多年的夜校得到商业学位。从那以后,他稳步上升到了公司的高级管理层。他因为正确的判断和对公司业务的全面的理解而受到尊重。

多年的技术服务代表工作使得他深深地体会到技术服务代表作为公司代表人角色的重要性。他一直不断强调这一点。他已经建立起成为以及继续作为技术服务代表要达到的很高的个人标准,同时也增加了技术服务代表的薪水。在他的努力下,部门的士气相当高涨。

约翰也强调从公司顾客那里获得服务质量的定期反馈样本。他喜欢将此称为倾听底线的呼声。顾客的反馈是技术服务代表和公司管理层获得信息的一个途径。

约翰的另一个主题是强调不能使技术服务代表工作过于繁重的重要性。当他自己是一个技术服务代表时,公司将区域内足量的设备指定给技术服务代表,每一位技术服务代表在90%的时间里(在八小时工作日里)都在修理设备。这个政策的目标是实现对昂贵的劳动力的高利用率而只提供很少的休息时间。这样顾客不会等待很长时间。约翰根据个人的经验认为这样做效果并不好。他的确有10%的空闲时间,这对完成纸上的记录和维护自己的设备时很有帮助的。然而,由于有许多维修要求,包括一些要花费很长时间的工作,他经常非常忙,还有大量等待维修的不满的顾客。

因此,当他被指定到目前的职位的时候,所做的第一件事就是将这个情况向杜皮特公司高级管理层反映。技术服务代表需要更多的空余时间保证为顾客提供适当的服务。一个主要的证据是顾客的反馈表明公司没有做到下面承诺的第二和第三点:

1. 高质量的产品。
2. 高质量的服务。
3. 及时交货。

公司总裁已经将这三个承诺推广了多年,因此他发现这个证据很有说服力。除了继续在降低成本上加大力度,约翰得到了改变技术服务代表的政策的同意,总结如下:

**目前的政策**:每一位技术服务代表的地域应当有足够的设备,使得技术服务代表在大约75%的时间里处于维修工作状态(或在到维修地点的路上)。当连续工作时,每一个技术服务代表应当能够平均一天修4台设备(平均每台设备两小时,包括行进时间)。因此为了使顾客的等待时间最短,每一个工作日平均要接到三个维修电话。由于公司的设备平均50个工作日需要一次维修,因此要为每一个技术服务代表负责的区域指定大约150台设备。

在这个政策下,这个公司现在已经有10000个技术服务代表,每年的总薪水达大约6亿美元(包括奖金)。

## 高级管理层面临的问题

杜皮特公司由于产品长期的成功,已经保持了多年市场领先的地位。而且,最新的产品已经获得了相当大的成功。这是一种彩色打印—复印机,具有整理、装订以及传真功能。因此对于现代办公来说,这是一种顶级的多合一复印机。销售量已经超过了营销副总裁乐观的估计。

然而,成功也带来了一些问题。由于这种设备有如此多的功能,使得它成为购买者办公

室中的重要设备。当它停下来需要修理时,甚至是仅仅几个小时,所有者都将很难开展工作。因此,即使技术服务代表提供与过去相同的服务水平,对令人无法忍受的修理等待的抱怨也已经充斥了这个部门。

这个危机导致了高级管理层召开紧急会议,当事人约翰也参加了这个会议。他使同事们相信服务质量至少没有恶化。大家达成共识:这是公司成功的代价。这种新的设备如此有价值,它需要更高水平的服务。

在对如何满足所需的服务进行了大量的讨论后,杜皮特公司的总裁建议用以下四个步骤来解决这个问题:

1. 建立所需的新服务水平的试验标准。
2. 开发一些可能达到这个标准的建议做法。
3. 让一个管理科学小组与约翰一起工作,详细分析这些建议做法,评估每一种做法的有效性和成本。
4. 组织高层管理人员再开一次会,进行最终决策。

大家都同意了。

然后讨论转向应当为服务水平设置什么样的新标准。约翰建议这个标准应当明确技术服务代表对顾客的维修需求作出反应前的平均等待时间不能超过一个最大值。顾客关系经理同意这个建议,并且认为这个平均等待时间不能超过两小时(现在是六小时)。大家同意将两小时作为试验标准,最后的标准在管理科学小组进行进一步的分析后再决定。

**建议的新服务标准**:在技术服务代表开始前往顾客所在地修理设备之前,顾客的平均等待时间不应超过两小时。

## 解决问题可供选择的方案

在对各种如何达到这个服务标准的想法进行进一步的讨论之后,会议进行了总结。公司总裁问与会者谁对他们的想法做进一步的考虑。如果他们认为自己的想法是解决这个问题特别有效的方法的话,他们可以给他提交一个支持各自想法的备忘录。

结果总裁收到了四份支持各自想法的备忘录,总结如下:

**约翰建议的做法**:修改目前的政策,降低期望技术服务代表进行维修工作的时间百分率。这涉及到简单地降低分配给每一个技术服务代表的设备的数量以及增加更多的技术服务代表。这个方法可以使得过去为公司服务得很好的服务部门的工作方式能够延续下去,同时还可以提高服务水平,满足市场上新的需求。

**工程副总裁建议的做法**:为技术服务代表提供新的装备,这样可以大大降低所需的较长时间的修理时间。尽管这很昂贵,但可以显著地缩短平均维修时间。更重要的是这样做可能可以大大降低维修时间的波动,减少维修的平均等待时间。

**首席财务官建议的做法**:将现在的单个技术服务代表负责区域转变为较大的区域,由多个技术服务代表提供服务。在忙的时候通过团队支持可以大大缩短平均维修等待时间而不需要雇用新的技术服务代表。

**营销副总裁建议的做法**:授予这种新的打印—复印机的所有者比其他公司的顾客优先接受维修服务的权利。由于服务不及时的抱怨主要来自于这些设备的所有者,这个做法可能可以带给他们所需的服务并且保持提供其他顾客足够的服务。

总裁对拥有四个很有前途的做法供考虑感到高兴。根据前面所同意的步骤，下一步是建立一个管理科学小组（三个来自公司，加上一个外部的咨询员）与约翰一起工作，详细分析这些做法。他们将在六个星期后向高级管理层报告结果并提供推荐的做法。

在往下阅读之前，我们建议你对这四种做法考虑一下，并且决定哪一种做法最有前途。然后通过管理科学研究，你将可以对结果进行比较。

### 管理科学小组对问题的看法

管理科学小组很快发现排队论是分析这个问题的关键技术。每一个技术服务代表的区域可以被认为是包含下面所描述的基本排队系统。

**每一个技术服务代表的排队系统**

1. **顾客**：需要修理的设备。
2. **顾客到达**：打给每一个技术服务代表要求修理的电话。
3. **队列**：顾客所在地等待修理的所有设备。
4. **服务者**：技术服务代表。
5. **服务时间**：技术服务代表花在一台设备上的总时间，包括到待修设备所在地的行进时间和维修时间（因此当技术服务代表开始前往设备所在地时，这台设备就可以视作已经离开队列进入服务系统了）。

根据首席财务官提供的建议（扩大区域，每个区域有多个技术服务代表），这个单服务台排队系统将变为多服务台排队系统。

管理科学小组现在需要决定哪一种排队模型最适合于分析四种做法中的每一种。你将会看到后面几节里在展开故事的同时，我们会介绍各种重要的排队模型。

### 问题回顾

1. 对于技术服务代表的工作量，公司目前的政策是什么？
2. 现在高级管理层面临的问题是什么？
3. 建议的新的服务标准是什么？
4. 对于高级管理层面临的这个问题，有多少可供选择的做法建议？
5. 谁将对这些做法进行分析？
6. 在这个问题的排队系统表述中，什么是顾客？什么是服务台？

## 14.5　一些单服务台排队模型

使用 14.1 节提到的排队模型要素的背景，这一节主要讨论只有一个服务台的基本排队系统模型。在这里（以及本章余下的内容）继续使用的 14.1 节介绍的主要符号有：

$\lambda$ = 到达排队系统的顾客的平均到达率
　= 单位时间期望到达顾客数

$\mu$ = 平均服务率（对于一个连续服务的服务台来说）
　= 单位时间期望服务完成量

另外，$1/\lambda$ 是期望到达间隔时间（连续两位顾客到达的平均间隔时间），$1/\mu$ 是对每一位顾客的期望服务时间

这一节引进的一个新的符号：

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

有效因子对排队系统的有效性起着关键作用。

这里，$\rho$ 是希腊字母 rho。这个 $\rho$ 值称为有效因子（Utilization Factor），因为它代表了服务台用于服务顾客的平均时间比例。

在杜皮特公司案例中，在目前公司的政策下，对于一个技术服务代表：

$\lambda$ = 每天平均到达 3 位顾客（需要修理的设备）

$\mu$ = 当技术服务代表连续工作时，平均每天完成 4 项服务（修理完成）

由于

$$\rho = \frac{3}{4} = 0.75$$

所以，技术服务代表将 75% 的时间用于修理设备。

对于每一种排队模型，我们将考虑 14.3 节介绍的绩效测度。由于四个基本测度——$L$、$W$、$L_q$、$W_q$——之间的联系，包括 Little 公式，四个值中确定了一个就可以很容易地算出其他三个。因此，对于下面的模型，我们有时只需要讨论这些绩效测度中的一个。

## *M/M/*1 模型

使用 14.1 节末的排队模型的标记，*M/M/*1 的第一个符号（*M*）表示到达间隔时间服从的概率分布，第二个符号（*M*）表示服务时间服从的概率分布，第三个符号（1）给出了服务台的数量。由于 *M* 用来表示指数分布，*M/M/*1 模型具有以下假设：

**假设：**

1. 到达间隔时间服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布（见图 14.3 以及 14.1 节对这个分布的介绍）。
2. 服务时间服从均值为 $1/\mu$ 的指数分布。
3. 排队系统只有一个服务台。

正如 14.1 节所讨论的那样，第一个假设对应了顾客随机到达。因此这个假设对实际排队系统通常是有效的。

第二个假设对于大量的服务时间很短（大大低于均值）而偶尔服务时间很长的排队系统也是有道理的。一些排队系统符合这个假设，但是有些其他的系统却与之相差甚远。

第二个假设有时可能有疑问，但是这个模型已经有了最多的可用结论，因此被广泛使用。

与各种多服务台模型相比（将在 14.6 节讨论），*M/M/*1 模型是应用最广泛的排队模型（甚至有时用于不符合第二个假设的排队模型）。主要原因是这个模型已经有了最多的可用结论。因为公式相对简单，我们在下面给出了所有的绩效测度（所有这些测度都假设排队系统处于平稳条件中）。

由 $\rho = \lambda/\mu$，系统中期望顾客数的两个等价的方程是：

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

使用 Little 公式（$L = \lambda W$），系统中期望等待时间是：

$$W = \frac{1}{\lambda}L = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

因此，队列中期望等待时间（不包括服务时间）是：

$$W = W - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - (\mu - \lambda)}{\mu(\mu - \lambda)}$$
$$= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

使用另一个形式的 Little 公式（$L_q = \lambda W_q$），队列中期望顾客数（不包括正在接受服务的顾客）是：

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

甚至对于各种概率的公式也相对简单。系统中有 $n$ 个顾客的概率是：

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

于是：

$$P_0 = (1 - \rho)$$
$$P_1 = (1 - \rho)\rho$$
$$P_2 = (1 - \rho)\rho^2$$
$$\vdots$$

系统中等待时间超过一段时间 $t$ 的概率是

$$P(\mathscr{W} > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad t \geqslant 0$$

相应的队列中等待时间超过 $t$ 的概率是：

$$P(\mathscr{W}_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad t \geqslant 0$$

由于当一个到达发生时，如果系统中没有顾客，这个队列中等待时间是 0，所以：

$$P(\mathscr{W}_q = 0) = P_0 = 1 - \rho$$

所有这些公式都假设服务台有一个可控制的有效因子（$\rho = \lambda/\mu$）：

$$\rho < 1$$

（所有单服务台排队系统都有这个假设。）如果 $\rho > 1$，平均到达率 $\lambda$ 超过平均服务率 $\mu$，这个服务台无法跟上到达的顾客数量，因此这个排队系统没有达到平稳条件（当 $\rho = 1$ 时也是这样）。

> *M/M/s* 模型的 Excel 模板可用于这个 *M/M/1* 模型，只要设置 $s = 1$。

在管理科学课件中有一个 *M/M/s* 模型的 Excel 模板可用于计算这些绩效测度。你所要做的一切就是设置 $s = 1$，然后确定 $\lambda$ 和 $\mu$ 的值。由于 $\lambda$ 和 $\mu$ 是平均到达率和平均服务率的估计值，你可以用各种可能的取值多次使用这个模板进行敏感度分析。所有的工作在几秒钟内就可以完成。

在 www.mhhe.com/hillier2e 网站和光盘中附带的管理科学互动模型

中包含的排队模型提供了更生动的 $M/M/s$ 模型的演示，演示了顾客到达、等待以及服务结束后离开的全过程。在设置了 $s$、$\lambda$ 和 $\mu$ 的值以后，可以看到排队系统的过程（可以重复观看），通过已到达顾客的平均数，模型可以估算出 $L$、$L_q$、$W$、$W_q$ 的值。如果排队系统长时间运行，绩效测度的估算值就会很接近由 Excel 模板计算出的值。

## 目前政策下将 $M/M/1$ 模型应用于案例研究

> 在目前的政策下，技术服务代表是他或她自己排队系统中的服务台，待修设备是顾客。

杜皮特管理科学小组以搜集一些有代表性的技术服务代表的经验数据开始了他们的研究。他们将公司目前对技术服务代表工作量的政策（期望他们在 75% 的时间里在进行维修设备的工作）作为要达到的目标。尽管不同的技术服务代表有一些波动，但他们在一天里平均接到三个维修电话。每一个修理任务他们平均花费两小时（包括短暂的行进时间）。如果他们持续工作，能够在一个八小时工作日中完成四个修理任务。这表明在目前的政策下对技术服务代表排队系统的最好日估计（技术服务代表是服务台，待修设备是顾客）为平均到达率 $\lambda$ = 每天 3 位顾客，平均服务率 $\mu$ = 每天 4 位顾客（因此 $\rho = \lambda/\mu = 0.75$）（其他的时间单位，如小时，也可以用于 $\lambda$ 和 $\mu$，但是重要的是要使用相同的时间单位）。

> $\lambda = 3$、$\mu = 4$ 的 $M/M/1$ 模型代表目前政策下的技术服务代表排队系统。

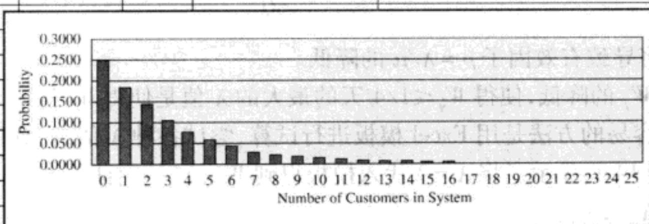
这个工作小组还得出结论，顾客到达（打电话要求维修）是随机发生的，因此 $M/M/1$ 模型（到达间隔时间服从指数分布）的第一个假设对于这种情况是很符合的。工作小组对第二个假设（服务时间服从指数分布）不太肯定，因为总服务时间（维修时间加上行进时间）并不像指数分布所要求的非常的短。然而，许多服务时间至少还是相当短的（低于平均值），偶尔服务时间会非常长。这很符合指数分布的要求。此外，用服务时间计算的结果表明，服务时间分布的标准差与均值差不多（对于指数分布来说，它们是相等的）。因此工作小组认为可以使用 $M/M/1$ 模型代表目前政策下的技术服务代表排队系统。

图 14.5 的 Excel 模板显示了将这个模型的各种公式应用于排队系统的结果。首先看看 $G$ 列上端的结果。需要维修的设备数期望为 $L = 3$。不包括正在维修的设备，等待维修的设备数期望为 $L_q = 2.25$。一台设备的期望等待时间，从服务请求被接受到维修结束，为 $W = 1$ 天。不包括维修时间，到开始服务为止的期望等待时间是 $W_q = 0.75$ 天（当技术服务代表开始前往设备所在地时，设备从队列进入服务台）。

在搜集数据的同时，管理科学小组发现直到维修损坏的机器开始为止的顾客平均等待时间大约是每个工作日 6 小时（也就是 3/4 个工作日）。这个时间符合模型给出的 $W_q$ 值，进一步有力地证明了使用这个模型的有效性。

现在看看 G 列中对 $P_n$（系统中有 $n$ 位顾客的概率）给出的结果。当 $P_0 = 0.25$ 时，技术服务代表只会在 75% 的时间里忙于修理设备（正如有效因子 $\rho = 0.75$ 所表明的那样），由于 $P_0 + P_1 + P_2 = 0.58$，技术服务代表在超过一半的时间里不会有多于两台设备要修理（包括正在修理的设备）。然而，他或她在有些时候也会有大得多的工作强度。例如，$P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_7 = 0.9$，这说明技术服务代表在 10% 的时间里至少会有 8 台设备要修理（大约是两天或更多的工作量）。在这个排队系统的各种随机因素的影响下（到达间隔时间和服务时间的巨大波动），尽管技术服务代表的有效因子仅为 0.75，这些大量的积压（许多不满意的顾客）还是会偶尔出现。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ***M/M/*1 Queueing Model for the Dupit Corp. Problem** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | **Data** | | | | **Results** |
| 4 | | λ = | 3 | (mean arrival rate) | | *L* = | 3 |
| 5 | | μ = | 4 | (mean service rate) | | $L_q$= | 2.25 |
| 6 | | *s* = | 1 | (# servers) | | | |
| 7 | | | | | | W = | 1 |
| 8 | | Pr(𝒲 > *t*) = | 0.368 | | | $W_q$= | 0.75 |
| 9 | | when *t* = | 1 | | | | |
| 10 | | | | | | ρ = | 0.75 |
| 11 | | Prob($\mathscr{W}_q$ > *t*) = | 0.276 | | | | |
| 12 | | when *t* = | 1 | | | *n* | $P_n$ |
| 13 | | | | | | 0 | 0.2500 |
| 14 | | | | | | 1 | 0.1875 |
| 15 | | | | | | 2 | 0.1406 |
| 16 | | | | | | 3 | 0.1055 |
| 17 | | | | | | 4 | 0.0791 |
| 18 | | | | | | 5 | 0.0593 |
| 19 | | | | | | 6 | 0.0445 |
| 20 | | | | | | 7 | 0.0334 |
| 21 | | | | | | 8 | 0.0250 |
| 22 | | | | | | 9 | 0.0188 |
| 23 | | | | | | 10 | 0.0141 |




| Range Name | Cells |
|---|---|
| *L* | G4 |
| Lambda | C4 |
| $L_q$ | G5 |
| Mu | C5 |
| *n* | F13:F38 |
| $P_0$ | G13 |
| $P_n$ | G13:G38 |
| Rho | G10 |
| *s* | C6 |
| Time1 | C9 |
| Time2 | C12 |
| *W* | G7 |
| $W_q$ | G8 |

| | B | C |
|---|---|---|
| 8 | Pr(𝒲>*t*) = | =EXP(-Mu*(1-Rho)*C9) |

| | B | C |
|---|---|---|
| 11 | Prob($\mathscr{W}_q$>*t*) = | =Rho*EXP(-Mu*(1-Rho)*C12) |

| | F | G |
|---|---|---|
| 4 | *L* = | =Lambda/(Mu-Lambda) |
| 5 | $L_q$= | =Lambda^2/(Mu*(Mu-Lambda) |
| 6 | | |
| 7 | W = | =1/(Mu-Lambda) |
| 8 | $W_q$= | =Lambda/(Mu*(Mu-Lambda)) |
| 9 | | |
| 10 | ρ = | =Lambda/Mu |
| 11 | | |
| 12 | *n* | $P_n$ |
| 13 | 0 | =1-Rho |
| 14 | 1 | =(1-Rho)*Rho^*n* |
| 15 | 2 | =(1-Rho)*Rho^*n* |
| 16 | 3 | : |
| 17 | 4 | : |

**图 14.5**　这个 *M/M/s* 模型的 Excel 模板显示了通过设置 $\lambda=3$、$\mu=4$、$s=1$ 将 *M/M/*1 模型应用于杜皮特案例研究的结果。*M/M/*1 模型的公式写在相应的输出单元格中，如图底部所示。

> *M/M/*1 模型的结果显示，在现行政策下经常会发生损坏的机器在得到修理前等待时间过长的情况。

最后，看看单元格 C8:C12 中的结果。设 $t=1$，顾客在损坏的设备能够继续工作之前需要等待超过一天（8 小时）的概率为 $P(\mathscr{W}>1$ 天$)=0.368$。在开始维修之前需要等待超过一天的概率是 $P(\mathscr{W}_q>1$ 天$)=0.276$。

通过这些结果，约翰表示他已经更好地了解了为什么会产生这些抱怨。任何一个将这种新式打印—复印机作为重要设备的拥有者都不应该在维修前等待超过一天（甚至大半天）。

## 将 *M/M/*1 模型应用于约翰建议的做法

管理学工作小组现在开始分析将每一个服务开始前的平均等待时间降为 2 小时（¼工

作日)的建议做法。因此,新的限制是:

$$W_q \leq 1/4 \text{天}$$

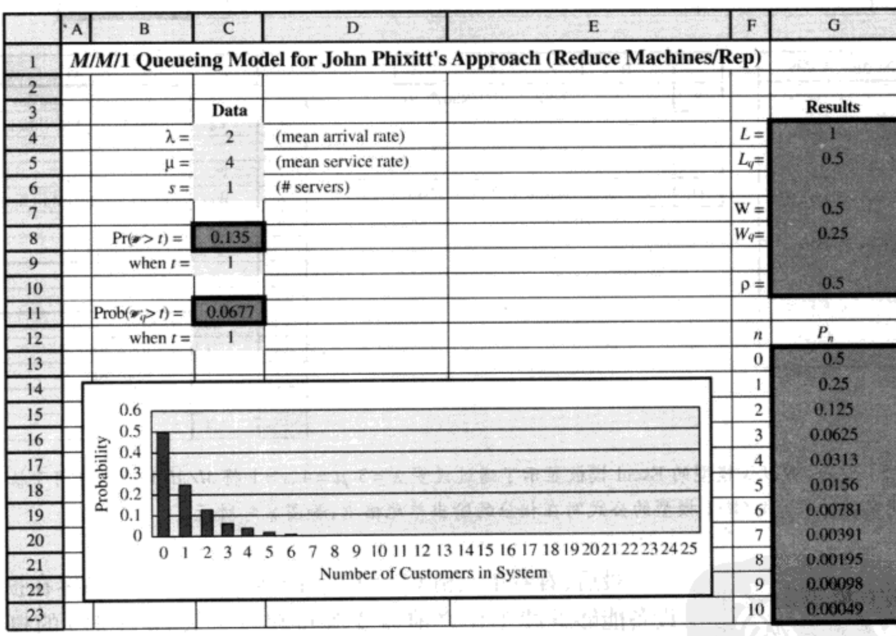
> 为了符合现行服务标准 $W_q \leq 1/4$ 天,约翰建议将指派给技术服务代表的设备数从大约150降低到一个较小的数目。

约翰提出的第一个建议是修改目前的政策,降低技术服务代表的有效因子以适应新的服务要求。这涉及到将指派给技术服务代表的设备数从大约150降低到一个较小的数目。由于每一台设备平均每50个工作日需要修理一次,降低技术服务代表负责区域内的设备数量导致了平均到达率 $\lambda$ 从3降为:

$$\lambda = \frac{\text{指定给每一位技术服务代表的设备数}}{50}$$

$\mu$ 仍然为4,$\lambda$ 的降低将导致有效因子 $\rho = \lambda/\mu$ 的降低。

由于 $\lambda$ 的降低引起了 $W_q$ 的降低,使得 $W_q \leq 1/4$ 天的最大的 $\lambda$ 值是使得 $W_q$ 等于1/4天的 $\lambda$ 值。找出这个值的最容易的方法是用Excel模板进行试算,尝试各种 $\lambda$ 值,直到找到一个使得 $W_q = 0.25$ 的值。图14.6显示了将 $\lambda = 2$ 代入模板得到 $W_q$ 值(使用计算 $W_q$ 的公式,也可以用代数的方法求得 $\lambda = 2$)。



| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *M/M/*1 Queueing Model for John Phixitt's Approach (Reduce Machines/Rep) | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Data | | | | Results |
| 4 | | λ = | 2 | (mean arrival rate) | | L = | 1 |
| 5 | | μ = | 4 | (mean service rate) | | $L_q$ = | 0.5 |
| 6 | | s = | 1 | (# servers) | | | |
| 7 | | | | | | W = | 0.5 |
| 8 | | Pr(W > t) = | 0.135 | | | $W_q$ = | 0.25 |
| 9 | | when t = | 1 | | | | |
| 10 | | | | | | ρ = | 0.5 |
| 11 | | Prob($W_q$ > t) = | 0.0677 | | | | |
| 12 | | when t = | 1 | | | n | $P_n$ |
| 13 | | | | | | 0 | 0.5 |
| 14 | | | | | | 1 | 0.25 |
| 15 | | | | | | 2 | 0.125 |
| 16 | | | | | | 3 | 0.0625 |
| 17 | | | | | | 4 | 0.0313 |
| 18 | | | | | | 5 | 0.0156 |
| 19 | | | | | | 6 | 0.00781 |
| 20 | | | | | | 7 | 0.00391 |
| 21 | | | | | | 8 | 0.00195 |
| 22 | | | | | | 9 | 0.00098 |
| 23 | | | | | | 10 | 0.00049 |



**图14.6** 这个对图14.5的Excel模板的应用显示,当 $\mu = 4$ 时($\lambda$ 从3变为2)*M/M/*1模型给出的服务开始的期望等待时间为 $W_q = 0.25$ 天(满足杜皮特建议新服务标准的最大值)。

> *M/M/*1模型表明按照约翰的建议,需要将指派给每一位技术服务代表的设备数量从150降低到100。

将 $\lambda$ 从3降到2需要将指派给每一位技术服务代表的设备数量从150降低到100。100是能够满足 $W_q \leq 1/4$ 天的最大值。在 $\lambda = 2, \mu = 4$ 的条件下,每一位技术服务代表的有效因子将只有:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{4} = 0.5$$

前面提到过，公司每年为将近 10000 位技术服务代表支付的工资（包括奖金）大约是 6 亿美元。将指派给每一位技术服务代表的设备数量从 150 降低至 100 要求公司再雇用大约 5000 位技术服务代表，来维修所有的设备。每年增加的工资大约是 2.7 亿美元（这略少于目前工资的一半，因为新的技术服务代表的资历比现有的技术服务代表浅）。然而，管理科学小组估计雇用和培训新的技术服务代表、报销工作花费、提供工作设备和增加更多的地域服务经理来管理他们的额外费用每年大约是 3000 万美元。

**约翰的建议带来总的增加成本是**：每年大约 3 亿美元。

## *M/G/*1 模型

这个模型与 *M/M/*1 模型的不同之处仅在于如下所表示的第二个假设有所不同：

**假设**：

1. 到达间隔时间服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。
2. 服务时间可能是任意形式的概率分布。不需要明确概率分布的具体形式。你仅需要估计这个分布的均值($1/\mu$)和标准差($\sigma$)。
3. 排队系统有一个服务台。

> 现在你需要估计 $\sigma$，服务时间的标准差。

由此可见，这是一个极为灵活的模型，只需要随机到达这个普通的条件（与第一个假设等价）以及一个服务台，加上 $\lambda$、$\mu$ 和 $\sigma$ 的估价值。

由 $\rho=\lambda/\mu$，这个模型的一些公式为：

$$P_0 = 1-\rho$$

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$L = L_q+\rho$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q+\frac{1}{\mu}$$

这些稳定的绩效测度仅要求 $\rho<1$，这样就可以使得排队系统达到平稳条件。

为了说明这些公式，假设服务时间服从均值为 $1/\mu$ 的指数分布。然后，由于标准差 $\sigma$ 是：

$$\sigma = \text{均值} = \frac{1}{\mu} \qquad \text{对于指数分布}$$

计算 $L_q$ 的公式表明：

$$L_q = \frac{\lambda^2\left(\frac{1}{\mu^2}\right)+\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2+\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

与 *M/M/*1 模型一样。$\sigma=1/\mu$ 也使得用公式计算出的 $L$、$W_q$、$W$ 小于 *M/M/*1 模型给出的值。实际上，*M/M/*1 模型是 *M/G/*1 模型的一种 $\sigma=1/\mu$ 的特例（然而，*M/M/*1 模型有些

结论对于 $M/G/1$ 模型并不适用）。

**表 14.6 $M/G/1$ 模型不同服务时间分布的 $\sigma$ 和 $L_q$ 值**

| 分　布 | 均　值 | $\sigma$ | 模　型 | $L_q$ |
|---|---|---|---|---|
| 指数 | $\frac{1}{\mu}$ | $\frac{1}{\mu}$ | $M/M/1$ | $\frac{\rho^2}{1-\rho}$ |
| 退化（固定服务时间） | $\frac{1}{\mu}$ | 0 | $M/D/1$ | $\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{1-\rho}$ |
| 爱尔朗，形状参数为 $k(k=1,2,\cdots)$ | $\frac{1}{\mu}$ | $\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{1}{\mu}$ | $M/E_k/1$ | $\frac{k+1}{2k}\frac{\rho^2}{1-\rho}$ |

表 14.6 给出了 14.1 节介绍的每一种服务时间分布的标准差 $\sigma$。第四列显示了模型在这些服务时间分布下的每一种特例的标志。最右边的一列通过公式表明了 $M/G/1$ 模型中的 $L_q$ 值对于各种特例是如何下降的。在管理科学课件中有一个单独的 Excel 模板可用于计算 $L_q$ 和第四列的每一种特例的其他值的结果。

注意在表的第三列爱尔朗分布的 $\sigma$ 值在另两种分布对应值之间（大多数实际排队模型也是这样）。$k$ 值决定了 $\sigma$ 落在这个区间内的哪一个位置（$k=1$ 的爱尔朗分布与指数分布相同）。最右边的一列显示了爱尔朗分布的 $L_q$ 值在其他两种服务时间分布的对应值之间。

$M/G/1$ 模型的 $L_q$ 公式是很有启发性的一个公式，因为它比表格更清楚地反映了服务时间分布的波动对绩效测度的影响。在 $\lambda$、$\mu$、$\rho$ 不变的情况下，降低波动（也就是降低 $\sigma$）明显地降低了 $L_q$。相同的情况也发生在 $L$、$W_q$、$W$ 上。因此，服务台提供服务的稳定性对排队系统的表现有关键的影响。在两个平均速度相同（都是 $1/\mu$）的服务台中选择一个，波动性较小（$\sigma$ 较小）的一个显然要好于另一个（我们将会在 14.8 节进行进一步的讨论）。

降低服务时间分布的波动明显地降低了 $L_q$、$L$、$W_q$ 以及 $W$。

考虑一下对允许任意服务时间分布的模型进行分析的复杂性，用这样一个简单的公式获得 $L_q$ 是很了不起的。由于使用方便和 $M/G/1$ 排队模型在现实中广为使用，这个公式是排队论中最重要的结论之一。计算 $L_q$（和对应的 $W_q$）的等式通常被称为波拉克查克—辛特查尼（Pollaczek-Khintchine）公式，以两位排队论发展先驱的名字命名，他们在 20 世纪 30 年代各自独立得到了这个公式。

## 将 $M/G/1$ 模型应用于工程副总裁提出的建议

杜皮特公司的工程副总裁建议为技术服务代表提供新式的设备以大大降低需要较长时间的修理工作。这样做会使平均维修时间有所降低，也会大大降低维修时间的波动。

在从这位副总裁那里获得了更多的信息并进一步分析之后，管理科学小组对这种做法对服务时间分布的影响作出了如下估计：

均值将从¼天降低到⅕天。
标准差将从¼天降低到⅒天。

由此可见，标准差将会从等于前一个均值的水平（对于指数分布）下降到只有新的均值的一半（形状参数 $k=4$ 的爱尔朗分布）。由于 $\mu=1/$均值，我们现在用 $\mu=5$ 代替 $\mu=4$。

M/G/1 模型表明，所建议的新的服务标准通过这种方法很容易实现。

在 $\sigma=0.1$ 的情况下，M/G/1 模型的 Excel 模板在图 14.7 中显示了计算的结果。注意，$W_q=0.188$ 天。这个从目前政策下的 $W_q=0.75$ 的巨大下降很大程度上归功于 $\sigma$ 的大大下降。如果服务时间的分布还是指数分布，将 $\mu$ 从 4 上升到 5 会使 $W_q$ 从 0.75 天下降到 0.3 天。从 0.3 天到 0.188 天的进一步下降归因于服务时间波动大大下降。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **M/G/1 Model for VP of Engineering's Approach (New Equipment)** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | **Data** | | | | **Results** |
| 4 | | λ = | 3 | (mean arrival rate) | | $L=$ | 1.163 |
| 5 | | 1/μ = | 0.2 | (expected service time) | | $L_q=$ | 0.563 |
| 6 | | σ = | 0.1 | (standard deviation) | | | |
| 7 | | $s=$ | 1 | (# servers) | | $W=$ | 0.388 |
| 8 | | | | | | $W_q=$ | 0.188 |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | ρ = | 0.6 |
| 11 | | | | | | | |
| 12 | | | | | | $P_0=$ | 0.4 |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| $L$ | G4 |
| Lambda | C4 |
| $L_q$ | G5 |
| OneOverMu | C5 |
| Rho | G10 |
| $s$ | C7 |
| Sigma | C6 |
| $W$ | G7 |
| $W_q$ | G8 |

| | F | G |
|---|---|---|
| 4 | $L=$ | =Lq+Rho |
| 5 | $L_q=$ | =((Lambda)^2)*(Sigma^2)+(Rho^2))/(2*(1-Rho)) |
| 6 | | |
| 7 | $W=$ | =Wq+OneOverMu |
| 8 | $W_q=$ | =Lq/Lambda |
| 9 | | |
| 10 | ρ = | =Lambda*OneOverMu |
| 11 | | |
| 12 | $P_0=$ | =1-Rho |

**图 14.7** 这个 M/M/1 模型的 Excel 模板显示了通过将这个模型应用于杜皮特公司制造副总裁使用新式装备的建议得到的结果。

别忘了建议的新的服务标准是 $W_q\leq 0.25$ 天。因此，工程副总裁建议的做法将能够满足这个标准。

不幸的是，管理科学小组同样认为这个做法也很昂贵，总结如下：

**工程副总裁的建议带来的总的增加成本**：一次性成本大约是 5 亿美元（为每一个技术服务代表提供价值大约 5 万美元的新装备）。

## 问题回顾

1. 符号 $\lambda$ 和 $\mu$ 表示了什么？$1/\lambda$ 和 $1/\mu$ 呢？$\rho$ 呢？
2. M/M/1 模型有哪些假设？
3. 哪些绩效测度标准的公式适用于模型 M/M/1？
4. 什么样的 $\rho$ 值使得单服务台排队系统拥有可控的有效因子，允许系统达到平稳条

件?

5. 在杜皮特公司目前的政策下,从设备损坏到开始维修的顾客平均等待时间有多长?
6. 为了通过减少指派给每一个技术服务代表的设备数将平均等待时间降低到 1/4 天,杜皮特公司将多花费多少?
7. $M/G/1$ 模型与 $M/M/1$ 模型有哪些区别?
8. $M/D/1$ 模型假设服务时间服从什么分布? $M/E_k/1$ 模型呢?
9. 对于 $M/G/1$ 模型,降低服务时间分布的标准差对 $L_q$、$L$、$W$、$W_q$ 有什么影响?
10. 杜皮特的工程副总裁提出的建议的总增加成本是多少?

## 14.6 一些多服务台排队模型

许多排队系统有不止一个服务台,于是我们将注意力转向多服务台排队模型。我们将讨论上一节的单服务台模型中的哪些结论可以用于多服务台模型。

回想排队模型标记的第三个符号表示了服务台的个数。例如 $M/M/2$ 模型有两个服务台。$M/M/s$ 模型允许选择任意数量的服务台,这里 $s$ 是代表这个数量的符号。

另外,$\rho(=\lambda/\mu)$是用来表示单服务台排队模型的有效因子的符号。对于多服务台模型,有效因子的公式变为:

$$\rho=\frac{\lambda}{s\mu} \qquad (\text{有效因子})$$

这里 $\lambda$ 仍然是平均到达率(因此 $1/\lambda$ 仍然是期望到达间隔时间)。$\mu$ 仍然是一个连续工作的服务台的平均服务率(因此 $1/\mu$ 仍然是期望服务时间)。这些模型假设所有的服务台都具有相同的服务时间分布,因此对于所有的服务台 $\mu$ 是相同的。由于

> 同单服务台排队模型一样,有效因子 $\rho$ 仍然是每个服务台用来服务顾客的平均时间

$\lambda$ = 单位时间期望到达顾客数

$s\mu$ = 当所有的 $s$ 个服务台都连续工作时,单位时间期望服务完成量

这时 $\rho=\lambda/s\mu$ 是每一个服务台都单独用来为顾客提供服务时花在服务上的平均时间。

为了每一个服务台都有一个可控的有效因子,仍然需要

$$\rho<1$$

所有的模型都有这个假设以使排队系统可以达到平稳条件。

对于前面四种单服务台模型($M/M/1$、$M/G/1$、$M/D/1$、$M/E_k/1$)中,只有 $M/G/1$ 模型对应的多服务台模型没有任何有实用价值的分析结论。而将多服务台模型和允许任意服务时间分布结合起来分析处理时会过于复杂。

我们从 $M/M/s$ 模型开始,包括将其应用到杜皮特公司的案例研究中,然后我们将提到一些 $M/D/s$ 模型和 $M/E_k/s$ 模型的有限结论。

### $M/M/s$ 模型

除了最后一个,所有的假设都与 $M/M/1$ 模型相同:

**假设：**

1. 到达间隔时间服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。
2. 服务时间服从均值为 $1/\mu$ 的指数分布。
3. 对于一个排队系统可以选择任意数量的服务台(数量用 $s$ 表示)。

*M/M/*1 模型的所有绩效测度都可以外推应用于 *M/M/s* 模型。然而，当 $s>1$ 时，公式太复杂了，无法手工计算。因此你应当使用 *M/M/s* 模型的 Excel 模板(正如前面图 14.5 和图 14.6 所显示的)来得到所有的结果(你可以通过 www.mhhe.com/hillier2e 网站和光盘上的管理科学互动模型中的排队模型来看 *M/M/s* 排队系统的演示)。

> Excel 模板提供了 *M/M/s* 模型的绩效测度，如同 14.5 节中对 *M/M/*1 模型的描述一样。

另一个选择是使用图 14.8。这张图显示了对于不同的 $s$ 值导致的不同有效因子和 $L$ 值之间的关系(注意纵轴使用对数刻度，因此你需要依靠刻度确定这个数轴上的值)。通过在这个图上估计 $L$ 值，你可以使用 Little 公式($L=\lambda W$ 和 $L_q=\lambda W_q$)，加上 $W=W_q+1/\mu$，来计算 $W$、$W_q$ 和 $L_q$。

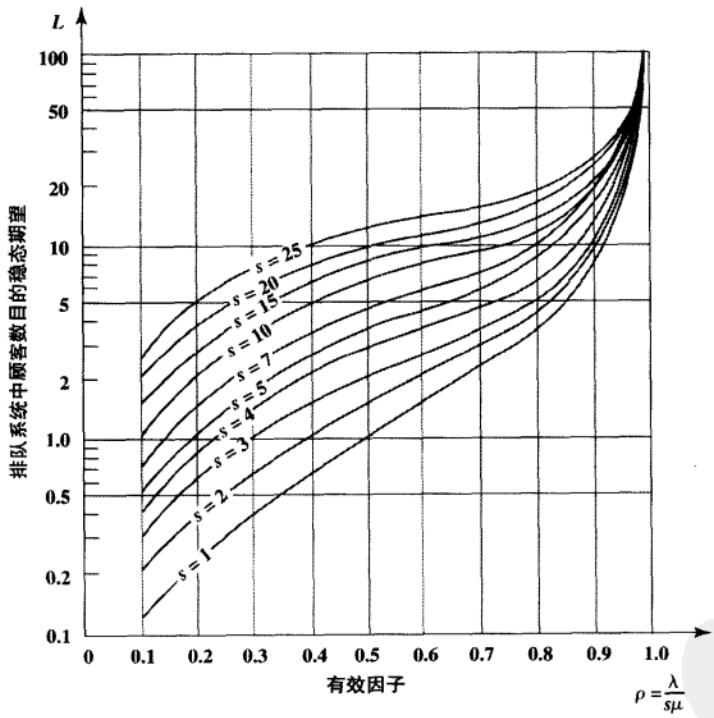



图 14.8　*M/M/*1 模型中不同服务台数 $s$ 对应的 $L$ 值。

## 根据首席财务官的建议将 *M/M/s* 模型应用于案例分析

杜皮特的首席财务官建议将目前的单人技术服务代表区域合并为一些较大的区域，由多位技术服务代表一起提供服务。这样做的目的是，不改变技术服务代表的数量，这个组织可以将 $W_q$ 从目前的水平($W_q=0.75$ 天)降低到可以满足建议的新的服务标准的水平($W_q\leqslant 0.25$ 天)。

让我们考虑为每一个区域配备两个技术服务代表的情况。

**有两位技术服务代表的区域**

| | | |
|---|---|---|
| 设备数: | 300 | (过去是 150) |
| 平均到达率: | $\lambda=6$ | (过去 $\lambda=3$) |
| 平均服务率: | $\mu=4$ | (与过去相同) |
| 服务台数: | $s=2$ | (过去 $s=1$) |
| 有效因子: | $\rho=\dfrac{\lambda}{s\mu}=0.75$ | (与过去相同) |

将这些数据代入 $M/M/s$ 模型的 Excel 模板得到如图 14.9 所示的结果，包括 $W_q=0.321$ 天(输出单元格中输入的等式没有在这个图中给出，因为它们非常复杂，但你可以在本章的 Excel 文件中看到这些公式)。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *M/M/s* Model for CFO's Approach (Combine into Teams of Two) | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Data | | | | Results |
| 4 | | λ = | 6 | (mean arrival rate) | | L = | 3.429 |
| 5 | | μ = | 4 | (mean service rate) | | $L_q$= | 1.929 |
| 6 | | s = | 2 | (# servers) | | | |
| 7 | | | | | | W = | 0.571 |
| 8 | | Pr(𝒲 > t) = | 0.169 | | | $W_q$= | 0.321 |
| 9 | | when t = | 1 | | | | |
| 10 | | | | | | ρ = | 0.75 |
| 11 | | Prob(𝒲q > t) = | 0.087 | | | | |
| 12 | | when t = | 1 | | | n | $P_n$ |
| 13 | | | | | | 0 | 0.1429 |
| 14 | | | | | | 1 | 0.2143 |
| 15 | | | | | | 2 | 0.1607 |
| 16 | | | | | | 3 | 0.1205 |
| 17 | | | | | | 4 | 0.0904 |
| 18 | | | | | | 5 | 0.0678 |
| 19 | | | | | | 6 | 0.0509 |
| 20 | | | | | | 7 | 0.0381 |
| 21 | | | | | | 8 | 0.0286 |
| 22 | | | | | | 9 | 0.0215 |
| 23 | | | | | | 10 | 0.0161 |

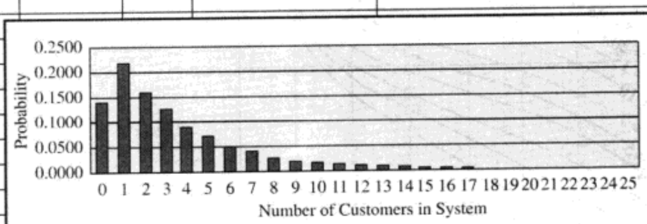



图 14.9 $M/M/s$ 模型的 Excel 模板显示了将这个模型用于杜皮特首席财务官建议的为每一个区域指派两个技术服务代表的建议的结果。

这是对目前 $W_q=0.75$ 天的相当大的改进，但还没有满足 $W_q\leq 0.25$ 的服务标准。因此我们看看为每一个区域指定三个技术服务代表会出现什么情况。

**有两位技术服务代表的区域**

| | | |
|---|---|---|
| 设备数: | 450 | (过去是 150) |
| 平均到达率: | $\lambda=9$ | (过去 $\lambda=3$) |
| 平均服务率: | $\mu=4$ | (与过去相同) |
| 服务台数: | $s=3$ | (过去 $s=1$) |
| 有效因子: | $\rho=\dfrac{\lambda}{s\mu}=0.75$ | (与过去相同) |

在这个有效因子下，图 14.8 表明 $L$ 与 4 非常接近。将 4 作为近似值，使用 14.3 节的公

式(包括 Little 公式等)得到：

> *M/M/s* 模型表明通过将三个一人区域合并成一个大的三人区域可以很容易地满足建议的新服务标准。

$$W=\frac{L}{\lambda}=\frac{4}{9}=0.44\text{ 天}$$

$$W_q=W-\frac{1}{\mu}=0.44-0.25=0.19\text{ 天}$$

图 14.10 的 Excel 模板给出了更精确的结果 $L=3.953$ 天、$W_q=0.189$天。由于一个工作日是 8 小时，这个期望等待时间是 1 小时 30 分。

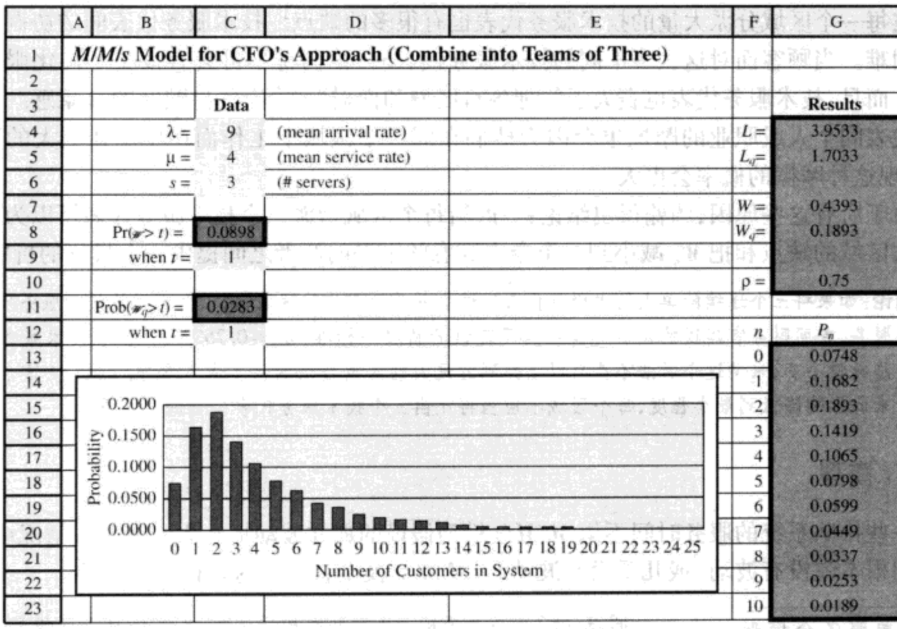



图 14.10　通过为每一个区域指派三个技术服务代表，这个 Excel 模板对图 14.9 的结果进行了修改。

**表 14.7　杜皮特公司问题不同大小的区域对应 $W_q$ 值的比较**

| 技术服务代表数 | 设备数 | $\lambda$ | $\mu$ | $s$ | $\rho$ | $W_q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 150 | 3 | 4 | 1 | 0.75 | 0.75 工作日(6 小时) |
| 2 | 300 | 6 | 4 | 2 | 0.75 | 0.321 工作日(2.57 小时) |
| 3 | 450 | 9 | 4 | 3 | 0.75 | 0.189 工作日(1.51 小时) |

表 14.7 总结了每一个区域有一个、两个、三个技术服务代表的各项数据和 $W_q$ 值。注意在不改变有效因子的情况下 $W_q$ 值随着技术服务代表(服务台)的数量的上升而急剧下降。$s=2$ 的 $W_q$ 值比 $s=1$ 的 $W_q$ 值一半还要小，$s=3$ 的 $W_q$ 值大约是 $s=1$ 的 1/4。

由此可见，三人区域可以很容易地满足建议的新服务标准 $W_q \leqslant 0.25$ 天(两小时)的要求。甚至考虑到更大的区域将会增加每一个技术服务代表的在途时间的情况，他们仍然可以很轻松地满足这个服务标准。

这些结果表明，通过指派四名或更多的技术服务代表进一步增大区域将会进一步降低

$W_q$。然而,增大区域的做法也有不足之处。一个是这样做有可能大大增加技术代表前往设备所在地所花费的平均时间。当将两个或三个技术服务代表的区域合并为一个联合区域时,由于技术服务代表可以通过合作,在评估技术服务代表从现在的位置赶到新的工作地点的可能性的基础上,有效地分配维修工作,因此这个平均行进时间不会增加多少。然而,对于一个更大的区域中更多的技术服务代表,这种工作方式会比较困难。因为前往维修地点的时间是技术服务代表用于维修工作的总时间的一部分,当技术服务代表的数量多于三个时,平均服务率$\mu$会比表14.7假设的每天四个维修工作有所下降。对于任何技术服务代表的数量,降低$\mu$会增加$W_q$。因此不太清楚将每一个区域的技术服务代表的数量增加到超过三个的时候,$W_q$会进一步下降多少。

在每一个区域分派大量的技术服务代表也有很多的缺点。技术服务代表间的协调变得更加困难。当顾客面对这么多不同的技术服务代表时,他们将不再会有接受个性化服务的感觉。而且,技术服务代表也丧失了管理各自区域和面对"他们"各自顾客的自豪感。技术服务代表间个人或职业的摩擦也会因为他们在同一个区域中工作而产生。在更大的团队中,出现这种摩擦的概率会更大。

由于所有这些原因,约翰得出结论:一般给每个区域指派三个技术服务代表可以为在最小化大区域的缺点和把$W_q$减小到一个令人满意的水平的两者之间提供一个最好的折中。

**结论**:如果将三个连续的单人技术服务代表区域合并为一个大的区域,由三个相同的技术服务代表提供服务,首席财务官建议的做法将能够满足建议的新服务标准($W_q \leq 0.25$天)。由于技术服务代表的总数量不变,采纳这个做法不会有以上提到的更大的区域带来的很多成本增加。为了使这个不足带来的影响降低到最小程度,每个区域不应当再比由三个技术服务代表负责的区域更大。

## *M/D/s* 模型

一些排队系统的服务时间不像*M/M/s*模型假设的那样波动那么大。在一些情况中,服务时间根本就没有波动(或几乎没有波动)。*M/D/s*模型就是为这种情况设计的。

如同单服务台模型一样,降低服务时间的波动可以大大增加多服务台排队系统的效率。

**假设**:除了现在所有的服务时间都相同之外,其他与*M/M/s*模型相同。固定服务时间是$1/\mu$(这称为具有退化服务时间分布,在模型标志中用*D*表示)。

当为每一位顾客提供的服务完全相同时就会出现固定服务时间。当服务台是机器设备时,服务时间可能是完全没有波动的。如果服务者是人,为所有的顾客提供相同常规服务,固定服务时间的假设也可以作为合理的类似。

上一节的表14.6说明了当$s=1$时*M/D/*1模型的$L_q$值仅仅是*M/M/*1模型的一半。当$s>1$时,两个多服务台模型之间也有类似的$L_q$值的差异(特别是在有效因子$\mu$比较大的时候)。这两个模型的$L$、$W$、$W_q$值也有很大的差异。

这些显著的差异强调了使用最适合排队系统模型的重要性。由于*M/M/s*模型是最简单的一种,将这个模型机械地用在大多数情况下是很普遍的。然而,在服务时间没有波动或波动很小的情况下使用这个模型会引起一些绩效测度的显著误差。

计算*M/D/s*模型的各种绩效测度的过程要比*M/M/s*模型复杂得多。因此$s>1$的情况下没有Excel模板可以使用。然而,用一些特殊的方法可以计算出这些指标。图14.11显示了许多$s$值对应的$\rho$和$L$的关系。其他的主要指标($L_q$、$W$、$W_q$)可以通过使用Little公式等(14.3节介绍的公式)从$L$中计算出来。

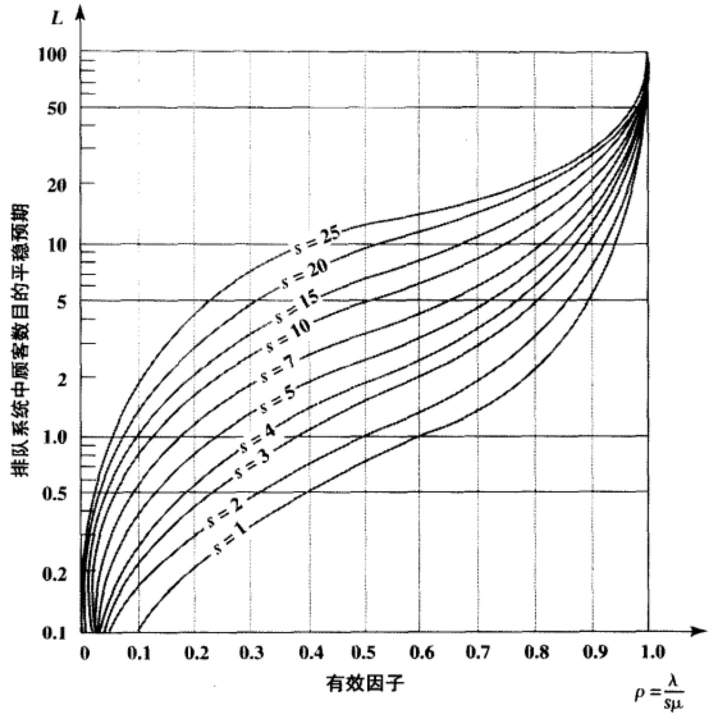



**图 14.11** *M/D/s* 模型中不同服务台数 *s* 对应的 *L* 值。

## *M/E<sub>k</sub>/s* 模型

当服务时间有一些波动，但不像指数分布那样剧烈时，$M/E_k/s$ 模型提供了一个介于 $M/M/s$ 和 $M/D/s$ 模型的相当好的中间类型。

**假设**：除了服务时间服从均值为 $1/\mu$ 和形状参数为 $k(k=1,2,\cdots)$ 的爱尔朗分布外（见 14.1 节和图 14.4 对这个分布的介绍），与 $M/M/s$ 模型相同。

就像上一节表 14.6 所表明的，形状参数为 $k$ 的爱尔朗分布的标准差 $\sigma$ 为：

> 当 $\sigma$ 远小于平均值时，取适当 $k$ 值的 $M/E_k/s$ 模型可以提供比 $M/M/s$ 模型准确的结果。

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ 均值} = \frac{1}{k}\frac{1}{\mu}$$

通过选择任意正整数 $k$，这个模型具有相当大的柔性使得 $\sigma$ 很好地符合所研究排队系统的期望的标准差。

计算 $M/E_k/s$ 模型的各种绩效测度的过程甚至比 $M/D/s$ 模型还要复杂。然而，大量的数据结果已经得到了[1]。图 14.2 将两个服务台（$s=2$）情况下三个 $k$ 值对应的 $L$ 值进行了比较。$L_q$、$W$、$W_q$ 值可以从 $L$ 得到（在 $k=1$、$k=2$、$k=8$ 的情况下 $L_q$ 值差异的百分比比这个图中显示的 $L$ 值之间的差异要大得多）。

## 问题回顾

1. 对于多服务台模型，计算有效因子 $\rho$ 的公式是什么？从服务台如何使用时间的角度

① $M/E_k/s$ 和 $M/D/s$ 模型的大量图表在 F. S. Hillier, O. S. Yu, D. Avis, L. Fossett, F. Lo, M. Reiman 的 *Queueing Tables and Graphs* 中（纽约：1981），Elsevier North-Holland。

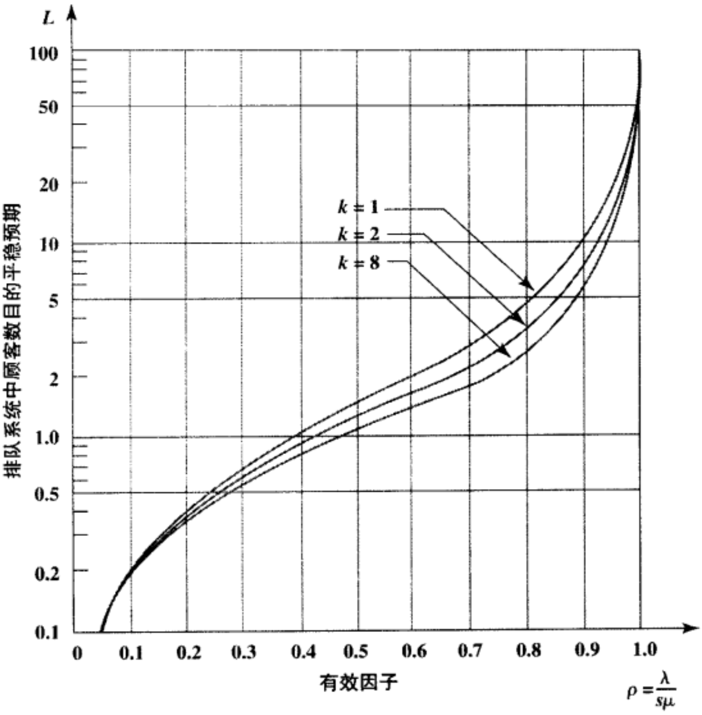



图 14.12 $M/E_k/2$ 模型中不同形状参数 $k$ 对应的 $L$ 值。

解释 $\rho$ 的含义?

2. 什么样的 $\rho$ 值对应了服务台有可控的可以使得系统达到平稳条件的有效因子?
3. 是否有一些只适用于 $M/M/1$ 模型而不适用于 $M/M/s$ 模型的绩效测度标准?
4. 为了满足杜皮特公司新的建议服务标准,需要将多少单人技术服务代表区域合并为一个较大的区域?
5. 比较 $M/M/s$、$M/D/s$、$M/E_k/s$ 模型的服务时间的波动。

## 14.7 有优先权的排队模型

有优先权的排队模型用于当比较重要的顾客在其他已经等待了更长的时间的顾客之前得到服务的情况。

到目前为止,所介绍的所有排队模型都假设顾客是先到先服务的。但是并不是所有的排队系统都是这样运作的。在一些系统中,比较重要的顾客在其他已经等待了更长的时间的顾客之前得到服务。管理层会给特定的特殊顾客相对其他顾客而言优先的权利。在一些情况中,排队系统中的顾客是要做的工作,而不同工作的不同最后期限决定了顾客接受服务的顺序,紧急的工作需要在常规工作之前进行。

医院急诊室是一个自动地具有优先权的排队系统的例子。一个情况危急的病人将在已经在等候的普通病人之前接受治疗。

这种排队系统的模型一般具有以下假设:

### 一般假设

1. 有两类或更多类的顾客。每一类都具有一个优先级(Priority Class)。优先级 1 的顾

客将比优先级 2 的顾客优先接受服务。如果优先级多于两个，优先级 2 的顾客将具有优先于优先级 3 的顾客的权利。

2. 除了在较高优先级的顾客后面接受服务外，同一优先级内的顾客服从先到先服务的规则。因此，在一个优先级内接受服务的优先权是以已经在排队系统中花费的等待时间为基础的。

如下所述，实际上有两种类型的优先权：

**无强制的优先规则**（Nonpreemptive Priorities）：当一个服务台开始为一个顾客服务时，服务必须在不被打断的条件下完成，即使在服务的过程中有更高优先级的顾客到来。然而，这个服务一完成，如果队列中有顾客，将根据优先权从中选出一个顾客进行服务。被选中的顾客是在具有最高优先级的顾客中等待时间最长的一个。

**强制优先规则**（Preemptive Priorities）：当一个具有更高优先权的顾客进入排队系统时，正在接受服务的最低优先级的顾客被挤出（退回到队列中）。于是一个服务台空闲，可以立即开始为一个新到达的顾客服务。当一个服务台成功完成了一个服务工作后，下一个开始接受服务的顾客将以上面无强制优先规则描述的相同规则选出（被挤出的顾客成为具有相同优先级的顾客中等待时间最长的一个，因此它有希望很快再次接受服务，可能在经过多次挤出后，最终服务会完成）。

这一节包含了两类优先级下的一个基本排队模型。

## 强制优先规则排队模型

除了上面给出的一般假设外，这个模型还作了如下假设：

### 附加假设

1. 强制优先级如上所述（$n$ 表示优先级数）。
2. 对于优先级 $i(i=1,2,\cdots,n)$，这个优先级顾客的到达间隔时间服从均值为 $1/\lambda_i$ 的指数分布。
3. 不管优先级是多少，所有服务时间服从均值为 $1/\mu$ 的指数分布。
4. 排队系统有一个服务台。

> 该模型除了使用强制优先级外，其余的与 $M/M/1$ 模型相同。

于是，除了使用强制优先级带来一些复杂外，其余的假设与 $M/M/1$ 模型相同。

由于 $\lambda_i$ 是优先级为 $i$ 的顾客的平均到达率，$\lambda=(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$ 是所有顾客的总平均到达率。因此服务台的有效因子为：

$$\rho=\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}{\mu}$$

与前面的模型一样，要求 $\rho<1$ 使得对于所有的优先级排队系统都可以达到平稳条件。

使用优先级的原因是降低高优先级顾客的等待时间。这样做的代价是增加低优先级顾客的等待时间。

通过假设 $\rho<1$，可以用公式计算出每一个优先级的主要绩效测度（$L$、$L_q$、$W$、$W_q$）。管理科学课件中的 Excel 模板可以很快为你计算出这些结果。

## 无强制优先规则排队模型

除了上面给出的一般假设外，这个模型的假设还有如下几个。

**附加假设**

1. 无强制优先级如上所述($n$ 仍然表示优先级数)。
2. 和 3. 与强制优先排队模型相同。
4. 排队系统可以有任意数量的服务台。

除了使用无强制优先级,这个模型与 $M/M/s$ 模型相同。

除了使用无强制优先级,这些假设与 $M/M/s$ 模型相同。

服务台的有效因子为:

$$\rho = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{s\mu}$$

同样,要求 $\rho < 1$ 使得对于所有的优先级排队系统都可以达到平稳条件。

与前面一样,可以用管理科学课件中的 Excel 模板计算出每一个优先级的主要绩效测度。

## 将无强制优先规则排队模型应用于营销副总裁的建议

现在我们到了杜皮特公司管理科学小组讨论的四种做法的最后一种。营销副总裁建议给打印—复印机高于其他设备的接受服务的优先权。换句话说,当一个技术服务代表完成一项修理任务后,如果同时有打印—复印机和其他设备等待修理,技术服务代表总是选择打印—复印机(等待时间最长的一台)进行修理,即使其他设备等待的时间更长。

这样建议的一个理由是打印—复印机有很多的关键功能,如果这台设备的停机等待维修时间与其他设备一样长,其拥有者是无法忍受的。事实上几乎所有的关于超时等待维修的抱怨都来自于这些设备的拥有者,即使其他设备也等待了同样长的时间。因此营销副总裁认为建议的新服务标准($W_q \leq 2$ 小时)仅需要应用于打印—复印机。给予这种设备接受服务的优先权有希望在仍然为其他设备提供令人满意的服务的同时达到这个标准。

为了分析这个建议,管理科学小组使用了无强制优先规则排队模型。有两个优先级:

优先级 1:打印—复印机。
优先级 2:其他设备。

这样就体现了在每一个技术服务代表负责区域的排队系统中两类到达顾客(需要修理的设备)的区别。为了分别确定这两个优先级的平均到达率(用 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 表示),工作小组了解到目前分派给技术服务代表的设备中有大约 1/3 是打印—复印机。每一台打印—复印机需要维修服务的频率与其他设备大致相同(大约每 50 工作日一次)。因此,由于一个单人技术服务代表负责区域所有设备的总平均到达率是每天三台设备,因此

$\lambda_1 = 1$ 位顾客(打印—复印机)每天 (现在)
$\lambda_2 = 2$ 位顾客(其他机器)每天 (现在)

然而,据估计在几年里这种打印—复印机的比例会逐渐上升到顶峰,大约是一半。在这种情况下,平均到达率会变为:

$\lambda_1 = 1.5$ 位顾客(打印—复印机)每天 (以后)
$\lambda_2 = 1.5$ 位顾客(其他机器)每天 (以后)

使用优先级后,因为每一个技术服务代表的平均服务率不变,因此对其最好的估计仍然是每个工作日 $\mu = 4$ 位顾客。在公司目前的单人技术服务代表负责区域的政策下,每一个区

域的排队系统有一个服务台($s=1$)。由于不管是现在还是以后$(\lambda_1+\lambda_2)=3$,有效因子的值始终是:

$$\rho=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{s\mu}=\frac{3}{4}$$

图 14.13 显示了用无强制优先规则排队模型的 Excel 模板针对现在这个排队系统得到的结果($\lambda_1=1$、$\lambda_2=2$)。图 14.14 同样显示了这个系统预期以后的结果($\lambda_1=1.5$、$\lambda_2=1.5$)。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Nonpreemptive Priorities Model for VP of Marketing's Approach** | | | | | | |
| 2 | **(Current Arrival Rates)** | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | $n$ = | 2 | (# of priority classes) | | | |
| 5 | | μ = | 4 | (mean service rate) | | | |
| 6 | | $s$ = | 1 | (# servers) | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | | | $\lambda_i$ | $L$ | $L_q$ | $W$ | $W_q$ |
| 10 | | Priority Class 1 | 1 | 0.5 | 0.25 | 0.5 | 0.25 |
| 11 | | Priority Class 2 | 2 | 2.5 | 2 | 1.25 | 1 |
| 12 | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | | λ = | 3 | | | | |
| 17 | | ρ = | 0.75 | | | | |

**图 14.13**　这个 Excel 模板将无强制优先规则排队模型应用于杜皮特公司营销副总裁建议的赋予打印—复印机优先权的结果。

管理科学小组对 $W_q$ 的值,这个系统中的期望等待时间,非常感兴趣。这些值在两张图的最后一列给出,在表 14.8 进行了总结。表的第一列来自于图 14.13,第二列来自于图 14.14。

对于打印—复印机,注意现在 $W_q=0.25$ 工作日勉强满足建议的新服务标准 $W_q\leqslant0.25$ 工作日。但是以后这个期望等待时间将会变为 0.3 个工作日。因此,这种做法有点不满足要求。而且,其他设备的服务开始前的期望等待时间现在是 $W_q=1$ 工作日和以后的 $W_q=1.2$ 工作日,比平均等待时间从目前政策下的 $W_q=0.75$ 工作日(如图 14.5 所示)延长很多,可能会招致大量顾客的不满。

**表 14.8**　**无强制优先规则应用于杜皮特公司问题时的期望等待时间***

| $s$ | 时　间 | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\mu$ | $\rho$ | 打印—复印机的 $W_q$ | 其他设备的 $W_q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 现在 | 1 | 2 | 4 | 0.75 | 0.25 工作日(2 小时) | 1 工作日(8 小时) |
| 1 | 以后 | 1.5 | 1.5 | 4 | 0.75 | 0.3 工作日(2.4 小时) | 1.2 工作日(9.6 小时) |
| 2 | 现在 | 2 | 4 | 4 | 0.75 | 0.107 工作日(0.86 小时) | 0.429 工作日(3.43 小时) |
| 2 | 以后 | 3 | 3 | 4 | 0.75 | 0.129 工作日(1.03 小时) | 0.514 工作日(4.11 小时) |
| 3 | 现在 | 3 | 6 | 4 | 0.75 | 0.063 工作日(0.50 小时) | 0.252 工作日(2.02 小时) |
| 3 | 以后 | 4.5 | 4.5 | 4 | 0.75 | 0.076 工作日(0.61 小时) | 0.303 工作日(2.42 小时) |

* 这些时间的单位是工作日,每个工作日包括 8 小时,然后转换到小时。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Nonpreemptive Priorities Model for VP of Marketing's Approach** | | | | | | |
| 2 | **(Future Arrival Rates)** | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | $n=$ | 2 | (# of priority classes) | | | |
| 5 | | $\mu=$ | 4 | (mean service rate) | | | |
| 6 | | $s=$ | 1 | (# servers) | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | | | $\lambda_i$ | $L$ | $L_q$ | $W$ | $W_q$ |
| 10 | | Priority Class 1 | 1.5 | 0.825 | 0.45 | 0.55 | 0.3 |
| 11 | | Priority Class 2 | 1.5 | 2.175 | 1.8 | 1.45 | 1.2 |
| 12 | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | | $\lambda=$ | 3 | | | | |
| 17 | | $\rho=$ | 0.75 | | | | |

**图 14.14** 将相同的模型应用于未来杜皮特公司问题对图 14.13 的修改。

上一节的表 14.7 展示了将单人技术服务代表负责区域合并为一个较大的区域对降低期望等待时间有很大的影响。因此管理科学小组决定在无强制优先规则下将两种方法结合起来。

将两个单人技术服务代表负责区域合并为一个两人技术服务代表负责区域将使新区域内每一个优先级($\lambda_1$、$\lambda_2$)的平均到达率翻倍。由于技术服务代表的人数也是原来的两倍(从 $s=1$ 到 $s=2$),而 $\mu$(每一个服务台的平均服务率)没有发生改变,因此有效因子 $\rho$ 也没变。这些现在和以后的值显示在表 14.8 的第三列和第四列中。然后使用无强制优先规则排队模型得到最后两列的期望等待时间。

$W_q$ 值从 $s=1$ 的情况大大下降导致了等待时间相当幅度的下降。无论是现在还是以后,打印—复印机的 $W_q$ 大约仅仅是建议的新服务标准($W_q \leqslant 2$ 小时)最大值的一半。尽管现在和以后其他设备的 $W_q$ 某种程度上大于这个最大值,这些等待时间也在目前的平均等待时间(6 小时)以下,而现在这个优先级的成员也没有发出很多的抱怨。约翰对此很满意。他感到打印—复印机 $W_q \leqslant 2$ 小时的服务水平实际上是通过头脑风暴提出的,其他的高层管理人员可能也会对表 14.8 第三列和第四列中的 $W_q$ 值感到满意。

由于表 14.7 中,在无优先级的情况下对三人技术服务代表负责区域的分析结果如此之好,管理科学小组决定对具有优先级的情况进行分析。表 14.8 最后两列显示了这种情况下的结果。注意 $s=3$ 对应的 $W_q$ 值甚至小于 $s=2$。实际上,甚至其他设备的 $W_q$ 值也几乎满足了建议的新服务标准。然而,约翰指出与两人负责区域相比三人负责区域有许多不足之处。一个是前往设备所在地的时间较长。还有一个是当顾客的三个不同的技术服务代表来修理设备而不是两个时会感觉服务相当缺乏个性化。另一个可能更重要的不足是三个技术服务代表比两个技术服务代表更难于协调工作。约翰认为 $s=3$ 带来的 $W_q$ 值的下降值无法补偿这些(以及相关的)不足。

**结论**:由于高优先级需求可以改进打印—复印机的服务,应当考虑给这些设备高于其他设备的优先级以接受服务。然而,如果继续使用目前的单人技术服务代表负责区域,打印—复印机和其他设备的等

待时间将无法满足要求。将这个区域扩大到两人负责区域将降低等待时间到符合要求的水平，而不用大量增加（货币）成本。进一步扩大区域会因为大区域的不足而显得不值得。

## 管理层的结论

管理科学小组受杜皮特公司总裁布置研究四种建议方法后，工作小组和约翰被要求在六个星期之内向高级管理层报告工作结果。现在他们将报告给了管理层的每一位成员。这份报告包含了对要求他们研究的四种做法中每一种的分析结论（上面和前几节所表述的），还包含了对这些途径的绩效测度结果（表 14.7 和表 14.8）。

表 14.9 对经过管理科学小组提炼后的四个做法做了总结。

这时，总裁再次召集了高层管理层成员（包括约翰）。这个会议以管理科学小组的负责人对工作小组的分析和结论的简短而准备充足的总结开始了。陈述经常被其他人的评论和提问打断。总裁接下来要求约翰提出他的建议。

约翰以强调目前单人负责区域政策的众多优点开始。表 14.9 的前两个建议将继续沿用这个政策，但是成本很高。然后他得出结论为成本过高，对时间的要求使得系统必须修改，以满足现在市场对高效提供服务的要求（一个短暂的讨论表明了工作小组在这一点上的一致）。

**表 14.9　杜皮特公司管理层考虑的四种做法**

| 建议人 | 建　议 | 增加的成本 |
|---|---|---|
| 约　翰 | 保持单人负责区域，但是将每个区域指派的设备数从 150 减少到 100 | 每年 3 亿美元 |
| 工程副总裁 | 保持现在的单人负责区域，但是为技术服务代表提供新式的装备 | 一次性成本 5 亿美元 |
| 首席财务官 | 变为三人负责区域 | 没有，除了较大区域的缺点 |
| 营销副总裁 | 变为两人负责区域，给打印—复印机维修优先权 | 没有，除了较大区域的缺点 |

剩下了表 14.9 的第三列和第四列可供考虑。约翰再次表达了先前对管理科学小组说过的两人负责区域与三人负责区域相比的优越之处。然后他指出第四个建议不仅会使得出现两人负责区域，而且还会导致与第三个建议相比打印—复印机有较小的平均维修等待时间。当顾客关系经理指出其他设备的平均等待时间没有达到新服务标准（最大两小时）时，约翰强调这些等待时间仍然会大大低于现在的水平，而这些设备的拥有者现在也没有抱怨。在总结时，约翰建议采纳第四种做法。

一些次要的问题在随后的讨论中提了出来，包括其他设备的拥有者感觉被作为二等顾客对待的可能性。然而，约翰表示新的政策将不会被公开公布，但是如果被发觉了，会很容易向顾客做出解释。讨论小组一致同意了约翰的建议。

**决策**：采纳表 14.9 中第四个建议。

最后，约翰指出，目前由于相对来说一些单人负责区域人口分散，组成两人负责区域会造成技术服务代表行进时间过长。这种情况削弱了新政策的目标，因此他建议在这些区域采用第二种做法，然后根据使用新装备的经验对以后向所有的技术服务代表提供哪一种装备以适应未来增长的需求做决策。管理层同意了。

**决定**：作为新政策的例外，表 14.9 中的第二项建议将用于目前人口特别分散的单人负责区域。使用新装备的经验将被紧密监视，以指导未来为所有技术服务代表提供装备的采购决策。

由于约翰和管理科学小组指出了解决公司棘手问题的非常好的方法，总裁对他们的出色工作表示感谢。约翰谦虚地说真正的关键在于管理科学小组通过有效使用合理的排队模型领悟到的一些东西。总裁笑了，约翰的工作给了他深刻的印象，他表示会更多地向约翰咨询。

## 问题回顾

1. 先到先服务和给予顾客优先权有何不同？
2. 无强制优先规则与强制优先规则有何不同？
3. 除了使用强制优先级，强制优先规则模型的假设与哪一种基本排队模型相同？
4. 除了使用无强制优先级，无强制优先规则模型的假设与哪一种基本排队模型相同？
5. 对于这些模型，什么样的有效因子可以使得每一个优先级的排队系统达到平稳条件？
6. 当使用无强制优先规则排队模型分析杜皮特公司案例时，两个优先级是什么？
7. 在这个应用中，为了降低维修等待时间以达到满意水平，每一个区域所需的技术服务代表数是多少？
8. 杜皮特公司高级管理层对四种建议做法中选择哪一种的决策是什么（除了人口特别分散的区域）？

# 14.8 关于设计排队系统的一些启示

杜皮特公司的案例研究给了我们一些排队模型如何应用于排队系统设计的重要启示。本节将要用较大的篇幅来突出这些启示。

这里我们将介绍四个启示，每一个都在分析杜皮特公司问题的四个建议做法之一时出现过。在总结了每一个启示后，我们将简单地重温一下它在案例研究中的应用，然后以一般的形式表述这些启示。

**启示 1**：当设计一个单服务台排队系统时，注意相对较高的服务台有效因子（工作强度）将使得系统的绩效测度令人吃惊地低下。①

这个启示来自于 14.5 节当分析约翰提出的通过大幅度降低每一位技术服务代表的有效因子 $\rho$ 来达到新服务标准（最大维修平均等待时间为 2 小时）的过程。现在的 $\rho=0.75$ 使得平均等待时间为六个小时，与新标准相差甚远。有必要将 $\rho$ 降低到 $\rho=0.5$ 以满足这个标准。

为了进一步说明这个启示，我们用 *M/M/s* 模型的 Excel 模板（如图 14.9、图 14.10 所示），以 $s=1$、$\mu=1$（因此有效因子 $\rho$ 等于 $\lambda$），得到图 14.15 所示的数据表。下面是步骤。首先，建立一张表格，列的标题与图 14.15 中的 I、J、K 列的标题一样。在表格的第一列（I5：I16）列出数据单元格的试算值（平均到达率或者相应的效用因子），第一行空白。第二列的标题表明会算出的结果。对每一列，用第一行（J4：K4）来写有关输出单元格的公式。在这个例子中，我们感兴趣的单元格是系统中预计的顾客数（$L$）和队列中的顾客数（$L_q$），所以

① 一个例外是具有固定（或近似固定）的到达间隔时间和服务时间的排队系统。这样的系统在有效因子很大的情况下表现得非常好。

J4:K4 中的公式就是图 14.15 表下部所示的。

然后选择整张表(I4:K16),并从数据菜单中选择表格。在表格对话框中(如图 14.15 左下角所示)标明输入单元格(λ 或 C4),表示表格第一列中变动的数据单元格。没有输入到输入单元行的数据,因为在这个例子中,没有行用来列出试算值。

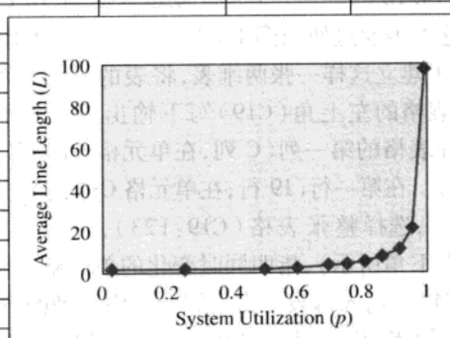
> 有效因子 $\rho$ 很小的增长也会带来排队系统中平均顾客数 $L$ 的快速增长,因此 $\rho$ 要保持远小于1。

按下 OK 按钮,就会生成如图 14.15 所示的数据表格。对表格中第一列中列出的试算值,相应的输出单元格值在表格的另一列中计算并展示(表格中第一行的数字来自原始的电子表格值)。

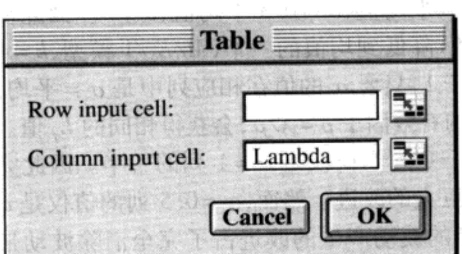
注意在 $\rho$ 有一个很小的增长的情况下,$L_q$ 和 $L$ 也有很快速

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Template for *M/M/s* Queueing Model | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Data | | | | Results |
| 4 | | λ = | 0.5 | (mean arrival rate) | | $L$ = | 1.0000 |
| 5 | | μ = | 1 | (mean service rate) | | $L_q$= | 0.5000 |

| | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Data Table Demonstrating the Effect of Increasing ρ on $L_q$ and $L$ for *M/M/*1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | λ = ρ | $L$ | $L_q$ | | | | |
| 4 | | | 1 | 0.5 | | | | |
| 5 | | 0.01 | 0.010 | 0.000 | | | | |
| 6 | | 0.25 | 0.333 | 0.083 | | | | |
| 7 | | 0.5 | 1 | 0.5 | | | | |
| 8 | | 0.6 | 1.5 | 0.9 | | | | |
| 9 | | 0.7 | 2.333 | 1.633 | | | | |
| 10 | | 0.75 | 3 | 2.25 | | | | |
| 11 | | 0.8 | 4 | 3.2 | | | | |
| 12 | | 0.85 | 5.667 | 4.817 | | | | |
| 13 | | 0.9 | 9 | 8.1 | | | | |
| 14 | | 0.95 | 19 | 18.05 | | | | |
| 15 | | 0.99 | 99 | 98.01 | | | | |
| 16 | | 0.999 | 999 | 998.001 | | | | |
| 17 | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | |




Select entire table (I4:K16), before choosing Table from the Data menu.




| | J | K |
|---|---|---|
| 3 | $L$ | $L_q$ |
| 4 | $=L$ | $=L_q$ |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| $L$ | G4 |
| Lambda | C4 |
| $L_q$ | G5 |

**图 14.15**　这个数据表表明了 14.8 节得到的启示 1。

的增长。例如,当$\rho$从0.5增长到0.75时翻了3倍,当$\rho$从0.75增长到0.9时又翻了3倍。当$\rho$增长到超过0.9时,$L_q$和$L$如天文数字般增长上去(虽然这张表格是在$\mu=1$的情况下生成的,但当第一列的数值是有效因子$\rho=\lambda/\mu$时,在$\mu$取其他值的情况下,也会获得相同的$L_q$和$L$值)。

管理人员通常努力争取雇员、设备、装备等的高有效因子。这是公司高效运作的重要一环。有效因子达到0.9或更高是可喜的。然而,当雇员、设备或装备是单服务台排队系统的服务台,服务时间和到达间隔时间有很大波动时(如$M/M/1$系统),所有这些都将会改变。对于大部分这种系统,一个优秀的管理人员不会接受系统中平均有9个顾客在等待的情况(在$\rho=0.9$时$L=9$)。如果出现这种情况,将需要一个低于0.9(可能是大大低于)的有效因子。例如我们刚刚提到了用约翰建议的将有效因子降低到$\rho=0.5$的方法达到公司建议的新服务标准。

**启示2**:降低服务时间的波动(不改变均值)可以大大改进单服务台排队系统的绩效(对于多服务台排队系统也是这样,特别是有较高有效因子的系统)。

这个启示得自于14.5节分析工程副总裁提出的为所有的技术服务代表提供新式装备的建议的过程。

正如14.5节末尾所描述的,这种做法将同时降低服务时间分布的均值和标准差。降低均值意味着降低有效因子,也就会使得期望等待时间$W_q$降低。降低标准差$\sigma$(衡量波动的参数)将再次使$W_q$降低37.5%。启示2指的是后一个$W_q$的显著改进(以及其他绩效测度的改进)。

图14.16的数据表表明了降低任何$M/G/1$排队系统服务时间分布的标准差$\sigma$对$L_q$的影响(这个表通过使用图14.7介绍的$M/G/1$模型的Excel模板得到)。

为了建立这样一张两维表,将表的行与列的名字按照图14.16的19~23行所示的列出。在表格的左上角(C19)写下输出单元格的公式,也就是你感兴趣的结果值($=L_q$或G5)。在表格的第一列(C列,在单元格C19的等式下面)输入所有第一个可变单元格的不同值($\lambda$)。在第一行(19行,在单元格C19的等式右面)输入第二个可变单元格的不同值($\sigma$)。

然后,选择整张表格(C19:F23),在数据菜单中选择表格。在表格对话框中(如图14.16左下角所示),指明同时变化的单元格。输入列表示表格第一列中变动的数据单元格($\lambda$或C4)。输入行表示表格第一行中变动的数据单元格($\sigma$或C6)。

按下OK按钮,就会自动生成如图14.16所示的数据表格。对表格中每一对在第一列和第一行中列出的试算值,Excel相应的输出单元格值在表格的左上角中列出。然后填入表格中。

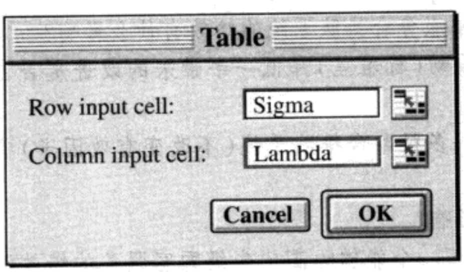
在生成这张表格之前,服务时间的平均分布在单元格C5中规定了$1/\mu=1$(使$\rho=\lambda$),所以标题列$\sigma=1,\sigma=0.5,\sigma=0$分别对应于$\sigma=$平均值,$\sigma=0.5$平均值,$\sigma=0$。因此从左向右看这个表格,从等于分布均值($M/M/1$模型)降低到均值的一半($M/E_k/1$模型,$k=4$),然后到$\sigma=0$($M/D/1$模型)。如果平均值不等于1,只要$\sigma$的值在相应列中是$\sigma=$平均值,$\sigma=0.5$平均值,$\sigma=0$,对每一个C20:C23列出的有效因子$\rho=\lambda/\mu$,会获得相同的$L_q$值。

> 如果服务时间波动很大,降低波动性可以降低一半的$L_q$。

在这个表的每一行中,$\sigma=0$列的值仅是$\sigma=1$列的一半。因此完全消除服务时间的波动带来了巨大的改进。然而,$\sigma=0.5$列的值仅是$\sigma=1$列的62.5%,因此降低一半的波动产生的改进占了完全消除波动带来的改进的大部分。降低波动性,甚至是部分降低,就可以大大改善系统的绩效。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Template for the *M/G/*1 Queueing Model** | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | **Data** | | | | **Results** | | |
| 4 | | $\lambda$ = | 0.5 | (mean arrival rate) | | $L$ = | 0.8125 | | |
| 5 | | $1/\mu$ = | 1 | (expected service time) | | $L_q$= | 0.3125 | | |
| 6 | | $\sigma$ = | 0.5 | (standard deviation) | | | | | |
| 7 | | $s$ = | 1 | (# servers) | | $W$ = | 1.625 | | |
| 8 | | | | | | $W_q$= | 0.625 | | |
| 9 | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | $\rho$ = | 0.5 | | |
| 11 | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | $P_0$ = | 0.5 | | |
| 13 | | | | | | | | | |
| 14 | **Data Table Demonstrating the Effect of Decreasing $\sigma$ on $L_q$ for *M/G/*1** | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | |
| 16 | | | | Body of Table Shows $L_q$ Values | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | $\sigma$ | | | | |
| 19 | | | 0.3125 | 1 | 0.5 | 0 | | | |
| 20 | | | 0.5 | 0.500 | 0.313 | 0.250 | | | |
| 21 | | $\rho$ (=$\lambda$) | 0.75 | 2.250 | 1.406 | 1.125 | | | |
| 22 | | | 0.9 | 8.100 | 5.063 | 4.050 | | | |
| 23 | | | 0.99 | 98.010 | 61.256 | 49.005 | | | |

Select entire table (C19:F23), before choosing Table from the Data menu.




| | C |
|---|---|
| 19 | $=L_q$ |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| Lambda | C4 |
| $L_q$ | G5 |
| Sigma | C6 |

图 14.16　这个数据表表明了 14.8 节得到的启示 2。

**启示 3**：具有较高有效因子的多服务台排队系统能够比单服务台排队系统表现得更令人满意。例如，通过将分立的单服务台排队系统组合为一个多服务台排队系统产生的联合服务台大大改善了系统的绩效。

这个启示来自于 14.5 节分析首席财务官提出将单人负责区域组合为较大的由多个技术服务代表共同提供服务的区域的建议的过程。14.6 节的表 14.7 总结了这种做法对开始维修的平均等待时间（$W_q$）的改善产生的巨大影响。两人负责区域的 $W_q$ 低于单人负责区域的一半，三人负责区域的 $W_q$ 大约是单人负责区域的 1/4，尽管这些情况下的有效因子相同。

这种巨大改进很正常。实际上，下面所描述的联合服务台总是提供了类似的改进。

**联合服务台的影响**：假设你有一定数量（以 $n$ 表示）的符合 $M/M/1$ 模型的单服务台排队系统。然后假设你将这 $n$ 个系统组合为一个符合 $M/M/s$ 模型的排队系统，服务台数为 $s=n$。这种变化总会比通过将 $W_q$ 除以 $n$ 得到更多的改善：

$$W_q(\text{组合后的系统}) < \frac{W_q(\text{每一个单服务台系统})}{n}$$

尽管这个不等式对于不符合 $M/M/1$ 和 $M/M/s$ 模型的排队系统不一定成立，但是其他模型中组合系统对 $W_q$ 的改进也非常显著。

**启示 4**：应用优先级选择顾客服务可以大大改善对高优先级顾客服务的绩效测度。

> 应用优先级可以大大减少高优先级顾客的等待时间，但会增加低优先级顾客的等待时间。

这个启示在分析营销副总裁提出的给打印—复印机比其他设备更高的维修服务优先级（无强制）中得到了证实。上一节的表 14.8 给出了在这个建议下打印—复印机和其他设备的 $W_q$ 值。将这些值与表 14.7 中无优先级的数据比较，得到给打印—复印机优先权可以大大降低它们的等待时间（但是同时也会增加其他设备的等待时间）的结论。以后，当对打印—复印机的服务将占有更大的比例时（从 1/3 增长到一半），他们的等待时间的降低就不会这么大了。

对于其他的排队系统，使用优先权的影响取决于各个优先级顾客的比例。如果最高优先级的比例小，对这些顾客服务的绩效测度会大大改善。如果比例大，改善会比较平缓。

强制优先规则比杜皮特公司问题中使用的无强制优先规则对高优先级的顾客更加有利。因此使用强制优先规则比使用无强制优先规则能够带来高优先级顾客服务绩效测度更大幅度的改善。

### 问题回顾

1. 给一个单服务台排队系统一个相对较大的有效因子（工作强度）有什么影响？
2. 当 $\rho$ 增长到超过 0.9 时，$M/M/1$ 模型的 $L_q$ 和 $L$ 值会出现什么情况？
3. 降低服务时间的波动（不改变均值）对单服务台排队系统的绩效有什么影响？
4. 对于 $M/G/1$ 排队系统，将服务时间的波动（标准差）降低一半带来的改进是否占了完全消除波动带来的改进的大部分？
5. 将分立的单服务台排队系统组合为一个多服务台排队系统（不改变有效因子）有什么影响？
6. 使用优先级选择顾客开始服务有什么影响？
7. 强制优先规则和无强制优先规则相比，哪一个能够为高优先级顾客服务的绩效测度带来更大的改进？

## 14.9 服务台数量的经济分析

当设计一个排队系统时，关键的一个问题经常是需要提供多少个服务台。过多会造成成本过高，太少会造成顾客的过度等待。因此选择服务台数量涉及到服务台成本和等待量之间的适当平衡。

在许多情况下，一个组织让顾客等待的结果可以称为等待成本（Waiting Cost）。当顾客是组织的内部顾客，如公司雇员时，这个名词表述特别贴切。使一个雇员等待会造成生产力损失，这将导致利润损失。损失的利润就是等待成本。

一个管理人员对最小化总成本很感兴趣。设：

TC = 单位时间期望总成本

SC = 单位时间期望服务成本

$$WC = 单位时间期望等待成本$$

然后，选择服务台数量的目标是：

$$最小化 \qquad TC = SC + WC$$

当每一个服务台成本相同，则服务成本（Service Cost）是：

$$SC = C_s s$$

这里

$$C_s = 单位时间服务台成本$$
$$s = 服务台数量$$

当等待成本与等待量成比例时，等待成本可以表达为：

$$WC = C_w L$$

这里

$$C_w = 每一位排队系统中的顾客单位时间等待成本$$
$$L = 排队系统中的期望顾客数$$

因此，在估计了常数 $C_s$ 和 $C_w$ 后，目标就成为选择一个 $s$ 值使得

$$最小化 \qquad TC = C_s s + C_w L$$

通过选择适合排队系统的排队模型，对于不同的 $s$ 值可以得到 $L$ 值，增加 $s$ 将降低 $L$，开始很快，以后逐渐变慢。

> 通过以连续的 $s$ 值计算 TC 直到 TC 停止下降可以找出最佳的服务台数量。

图 14.17 显示了以 $s$ 为自变量，SC、WC、TC 曲线的一般形状（尽管可能的 $s$ 值是 $s = 1, 2, \cdots$，为了更好概念化，我们画出了这些光滑的曲线）。通过以连续的 $s$ 值计算 TC，直到 TC 停止下降并开始上升，可以很直观地找到使得总成本最小的服务台的数量。下面的一个例子说明了这个过程。

## 一个例子

艾可米机械制造厂（Acme Machine Shop）有一个存放工厂技术人员所用工具的工具架。有两个管理员在管理这个工具架。当技工来要工具时，管理员将工具递给他们。当他们不再需要工具时将工具还给管理员。主管人员抱怨他们的技工不得不为在工具架前等待服务而浪费了大量的时间。另一方面，管理层正在施加压力减少工厂中的冗员，这将会导致工具管理员更少。为了解决这些矛盾的压力，管理科学研究被用来决定工具架应当有多少个管理员。

工具架是一个排队系统，管理员是服务台，技工是顾客。在获得了更多的到达间隔时间和服务时间数据后，管理科学小组得出结论，最适合于这个排队系统的排队模型是 $M/M/s$ 模型。平均到达率 $\lambda$ 和平均服务率 $\mu$（每个服务台）为：

$$\lambda = 120 \text{ 位顾客每小时}$$
$$\mu = 80 \text{ 位顾客每小时}$$

两个管理员的有效因子为：

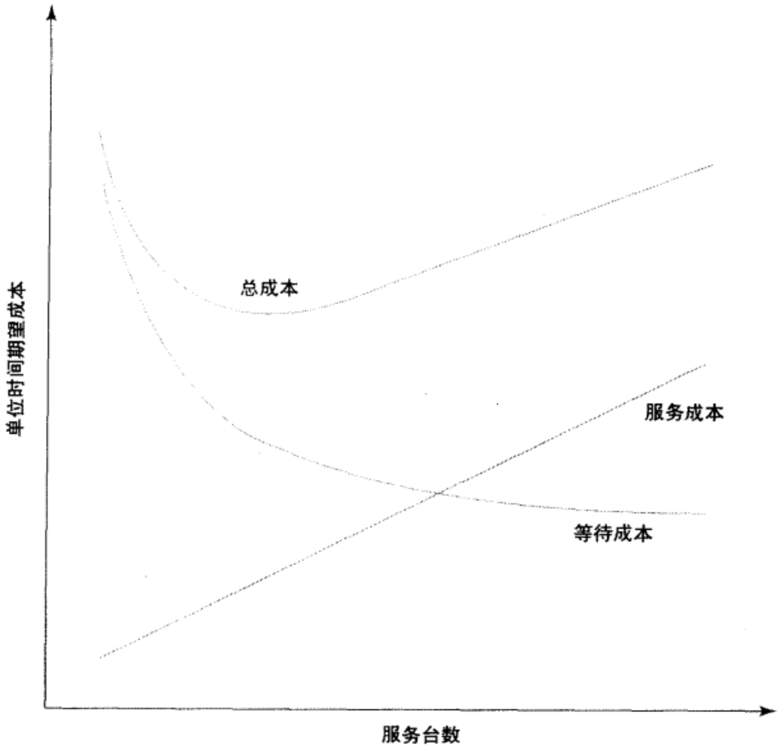



图 14.17 确定服务台数量的成本曲线的形状。

$$\rho=\frac{\lambda}{s\mu}=\frac{120}{2(80)}=0.75$$

每一个工具架管理员给公司带来的总成本大约是每小时 20 美元，因此 $C_s=20$ 美元。当技工很忙时，她或他为公司带来的产出价值平均为每小时 48 美元，故 $C_w=48$ 美元。因此，管理科学小组现在需要找到服务台数量 $s$ 使得：

$$\text{最小化}\quad \text{TC}=20s+48L$$

管理科学课件中的 *M/M/s* 模型的 Excel 模板可以用来计算这些成本。你所要做的就是输入模型的数据，单位服务成本 $C_s$、单位等待成本 $C_w$ 以及你想要试的服务台数 $s$。在图 14.18 中以 $s=3$ 为例显示了结果。通过反复代入不同的 $s$ 值，这个模板可以在几秒钟内展现出哪一个值使得 TC 最小。

低有效因子0.5 对工具架管理员最佳，因为这大大降低了技工浪费在工具架等待的时间。

图 14.19 显示了用这个模板以 $s=1,2,3,4,5$，计算得到的数据表（见 14.8 小节来获得更多生成数据表的信息）。由于 $s=1$ 的有效因子是 $\rho=1.5$，所以一个管理员将无法跟上顾客到来的速度（在单元格 K6、M6:N6 中显示#N/A），因此这个选择被排除。其他较大的 $s$ 值可以用，但是 $s=3$ 有最小的总成本。而且，$s=3$ 比目前的 $s=2$ 每小时总成本低了 62 美元。因此，尽管管理层现在正在着手降低管理费用（包括工具架管理员费用），管理科学小组建议增加第三个工具架管理员。注意这个建议将使管理员的有效因子从已经处于中等水平的 0.75 降低到 0.5。但是，由于通过降低技工浪费在等待上的时间，技工（它们比管理员贵）的生产力大为提高，管理层接受了这个建议。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Economic Analysis of Acme Machine Shop Example | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Data | | | | Results |
| 4 | | $\lambda$ = | 120 | (mean arrival rate) | | $L$ = | 1.736842105 |
| 5 | | $\mu$ = | 80 | (mean service rate) | | $L_q$ = | 0.236842105 |
| 6 | | $s$ = | 3 | (# servers) | | | |
| 7 | | | | | | $W$ = | 0.014473684 |
| 8 | | Pr($\mathscr{W}$ > $t$) = | 0.02581732 | | | $W_q$ = | 0.001973684 |
| 9 | | when $t$ = | 0.05 | | | | |
| 10 | | | | | | $\rho$ = | 0.5 |
| 11 | | Prob($\mathscr{W}_q$ > $t$) = | 0.00058707 | | | | |
| 12 | | when $t$ = | 0.05 | | | $n$ | $P_n$ |
| 13 | | | | | | 0 | 0.210526316 |
| 14 | | Economic Analysis: | | | | 1 | 0.315789474 |
| 15 | | $C_s$ = | $20.00 | (cost/server/unit time) | | 2 | 0.236842105 |
| 16 | | $C_w$ = | $48.00 | (waiting cost/unit time) | | 3 | 0.118421053 |
| 17 | | | | | | 4 | 0.059210526 |
| 18 | | Cost of Service | $60.00 | | | 5 | 0.029605263 |
| 19 | | Cost of Waiting | $83.37 | | | 6 | 0.014802632 |
| 20 | | Total Cost | $143.37 | | | 7 | 0.007401316 |

| | B | C |
|---|---|---|
| 18 | Cost of Service | $= C_s * s$ |
| 19 | Cost of Waiting | $= C_w * L$ |
| 20 | Total Cost | =CostOfService+CostOfWaiting |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| CostOfService | C18 |
| CostOfWaiting | C19 |
| $C_s$ | C15 |
| $C_w$ | C16 |
| $L$ | G4 |
| $s$ | C6 |
| TotalCost | C20 |

图 14.18　这个用经济分析选择 $M/M/s$ 模型中服务台数的 Excel 模板应用于 $s=3$ 的艾可米机械制造厂的例子。

## 问题回顾

1. 选择排队系统的服务台数量涉及到一个什么平衡?
2. 当排队系统的顾客是公司自己的雇员时,等待成本实际上是什么?
3. 当等待成本与等待量成比例时,等待成本如何表示?
4. 关于在一个排队系统中始终保持一个相对较高的服务台有效因子的可取性,艾可米机械制造厂的例子说明了什么?

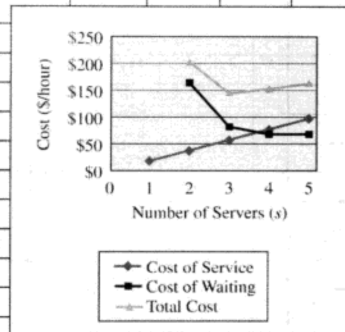
## 14.10　排队模型的一些获奖应用

1.3 节介绍了每年颁发的享有崇高声望的弗兰茨·厄德曼管理科学成果奖。这个奖多次授予具有创新性的排队模型应用。下面我们将简要介绍其中的一些应用。

早期的一等奖获得者之一(Interfaces 1975 年 11 月号,第二部分)是施乐公司(Xerox Corporation)。这个公司推出了一种主要的新型复印系统,这个系统被证明对拥有者很有价

| | H | I | J | K | L | M | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Data Table for Expected Total Cost for Alternatives in the Acme Machine Shop Example | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | Cost of | Cost of | Total |
| 4 | | *s* | ρ | *L* | Service | Waiting | Cost |
| 5 | | | 0.50 | 1.74 | $60.00 | $83.37 | $143.37 |
| 6 | | 1 | 1.50 | #N/A | $20.00 | #N/A | #N/A |
| 7 | | 2 | 0.75 | 3.43 | $40.00 | $164.57 | $204.57 |
| 8 | | 3 | 0.50 | 1.74 | $60.00 | $83.37 | $143.37 |
| 9 | | 4 | 0.38 | 1.54 | $80.00 | $74.15 | $154.15 |
| 10 | | 5 | 0.30 | 1.51 | $100.00 | $72.41 | $172.41 |
| 11 | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | |

Select entire table (I5:N10), before choosing Table from the Data menu.




| | J | K | L | M | N |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | Cost of | Cost of | Total |
| 4 | ρ | *L* | Service | Waiting | Cost |
| 5 | =Rho | =*L* | =CostOfService | =CostOfWaiting | =TotalCost |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| CostOfService | C18 |
| CostOfWaiting | C19 |
| *L* | G4 |
| Rho | G10 |
| *s* | C6 |
| TotalCost | C20 |

**图 14.19** 这个数据表对各种指派到艾可米机械制造厂工具架的管理员数的期望小时成本进行了比较。

值。因此,这些顾客要求施乐的技术服务代表降低修理设备的等待时间。然后一个管理科学小组用一个排队模型研究如何以最好的方式满足新服务的要求。结果是用较大的三人技术服务代表负责区域代替先前的单人技术服务代表负责区域。这个变化显著地降低了顾客的平均等待时间并使技术服务代表利用率的上升超过了 50%。

不错,杜皮特公司的案例分析就是基于这个获奖应用(还有一些新增加的内容)。尽管这个应用发生在许多年前,它所表明的如何应用排队模型的规则今天依然一样有效。

在 2.1 和 4.8 节我们介绍了一个使联合航空公司(United Airline)每年节省超过 600 万美元的获奖应用(Interfaces 1986 年 1 月号)。这个应用涉及为联合航空公司的 11 个机票预定处的 4000 个销售代表和支持人员以及 10 个最大的机场的 1000 名顾客服务代理人安排工作计划。在确定了每一个地点一个星期里每半个小时所需的雇员数后,我们在前面几节里讨论了如何用线性规划为所有的雇员设计工作计划以最有效地满足这些服务要求。但是我们没有提到这些每半个小时里的雇员需求数量的服务要求是如何确定的。

我们现在可以说这些服务要求是用排队模型确定的。每一个特定的地点(如机场的售票处)形成了一个以雇员为服务台的排队系统。在预测了一个星期里每半小时的平均到达率后,排队模型被用来找出能够提供满意的排队系统绩效测度的最少的服务台数。

L. L. Bean 公司,一个大型的电话销售商和邮购订货目录公司,基于对如何分配通讯资源的排队模型的研究而获奖(介绍这个研究的文章在 Interfaces 1991 年 1 月号上,其他给出更多信息的文章在这份期刊的 1989 年 11 月号和 1993 年 3~4 月号上)。进入呼叫中心的订购电话是一个庞大的排队系统的顾客,电话代理人是服务台。在研究中提出的关键问题如下:

1. 需要多少条电话干线用来接入打进呼叫中心的电话？
2. 在各个时间段需要多少电话代理人？
3. 应当为等待电话代理人接听电话的顾客提供多少等待位？（注意有限数量的等待位使得这个系统有一个有限队列。）

对于这三个量的每一个有意义的组合，排队模型提供了排队系统的绩效测度。有了这些指标，管理科学小组可以小心地评估顾客遇到忙音或顾客等待时间过长带来的销售损失成本。通过增加在电话销售资源上的花费，工作小组找出了能够使得期望总成本最小的三个量的组合。这使得每年的成本节约达 900 万 ~ 1000 万美元。

纽约市有一个使用管理科学技术来规划并运营许多复杂城市服务系统的一贯传统。从 20 世纪 60 年代开始，设计排队模型的一个获奖研究就从消防队和警察局开始了（消防队和警察局分别是这些排队系统的顾客）。接着，主要的管理科学研究（包括其他一些涉及排队模型的研究）在卫生部、运输部、健康医疗部、环境保护部、管理和预算办公室、鉴定部展开。由于这些研究的成功，现在这些部门中有许多都有自己的内部管理科学小组。

我们将在这里介绍的纽约市的获奖研究涉及到它的逮捕—提审系统。这个系统由一个从个人被捕到他们被提审的过程组成（由提审法官确定是否有充分理由实施逮捕）。在研究前，这个城市的被捕者（排队系统中的顾客）被监禁等待平均 40 小时后才提审（有时超过 70 小时）。这些等待时间太长了，因为被捕者被关押在又挤又吵的环境中，那里情绪压抑，不健康，而且经常有身体上的危险。因此，进行了为期两年的管理科学研究来检查这个系统。在这个过程中使用了排队模型和计算机仿真（下一章的主要内容），导致了整个运作过程和政策的改变，将提审的等待时间减低到 24 小时或更少，并且每年节省了 950 万美元的开支（详细介绍参见 Interfaces 1993 年 1 ~2 月号）。

1993 年的一等奖为 AT&T 获得。AT&T 的研究（同上一个例子一样）也将排队模型和计算机仿真的应用结合了起来（Interfaces 1994 年 1 ~2 月号）。这些模型是关于拥有 AT&T 远程通讯网络和呼叫中心业务的商业客户的。研究的目的是开发一个界面友好、基于个人电脑的系统，使得 AT&T 的商业客户可以用来设计或再设计他们的呼叫中心。由于呼叫中心是美国成长最快的行业之一，到 1992 年为止，AT&T 的商业客户大约已经使用了这个系统 2000 次，为客户自身每年带来的利润超过了 7.5 亿美元。

惠普（HP）公司是世界领先的跨国电子设备制造商。在 1993 年，公司在温哥华和华盛顿的工厂安装了机械装配线系统来生产喷墨打印机，以满足这种打印机的巨大市场需求。很快这个系统就表现出不能快速且可靠地满足公司生产目标。所以，由惠普和麻省理工共同组成了管理科学小组来研究如何改进系统，提高它的绩效。

> 装配线是一种特殊的排队系统，顾客以固定次序经过一系列服务台得到加工。

如 Interfaces 1998 年 1 ~2 月号描述的那样，惠普/麻省理工小组迅速认识到装配线可以被看作是一种特殊的排队系统，顾客（要装配的打印机）以固定次序经过一系列服务台（装配台）。为这类系统设计的特殊排队模型迅速提供了如何重新设计系统的分析结果，使得可以以最经济的办法获得需要的容量。变化包括在一些关键点上增加一些缓冲存放空间使得到下一个工作台的渠道顺畅并减少机器损坏带来的影响。新的设计将生产力提高了 50% 并累计带来打印机及其附属产品的销售额约 2.8 亿美元。这种对特殊排队模型的创新应用同样给惠普公司提供了在其他方面创造快速高效的系统设计的新方法。

如果你想阅读这方面应用的更多文章，我们引用了 Interfaces 期刊中的一些全文。除了

施乐公司的文章,其他这些文章都能在 www. mhhe. com/hillier2e/articles 中下载。

还有许多获奖的排队模型的应用,以及大量的介绍其他成功应用的文章。但是我们希望这一节介绍的几个例子能够使你对各种应用以及它们的影响有一些感觉。

### 问题回顾

1. 施乐公司获奖的排队模型的应用给技术服务代表负责区域带来了什么样的变化?
2. 在联合航空公司的获奖研究中使用排队模型得到了什么发现?
3. 在 L. L. Bean 公司的获奖研究中,需要在哪三个量上进行决策?
4. 在纽约市的获奖应用中,谁是排队系统的顾客?
5. 通过使用 AT&T 的系统指导呼叫中心的设计和再设计,AT&T 的商业客户年利润增加了多少?
6. 在惠普公司的获奖应用中分析了哪种特殊的排队系统?

## 14.11 本章小结

排队系统在社会上应用广泛。大量的这些系统能够对生活质量和经济生产力产生重要的影响。

排队系统的主要组成部分有到达的顾客、他们等待服务的队列以及提供服务的服务台。代表了一个排队系统的排队模型需要明确服务台数、到达间隔时间的分布和服务时间的分布。通常选择指数分布作为到达间隔时间的分布,因为这符合到达事件随机发生的现象。有时指数分布也符合服务时间的分布,在简化分析中是一个特别方便的选择。其他用于服务时间分布的概率分布包括退化分布(服务时间固定)和爱尔朗分布。

排队系统的主要绩效测度是队列中或系统中顾客数的期望值(后者包括正在接受服务的顾客)和队列中或系统中顾客的等待时间的期望值。这些期望值的一般联系,包括 Little 公式,使得所有四个值中只要找到一个就可以立即全部确定出来。除了这些期望值,这些量的概率分布有时也用作绩效测度。

这一章的案例研究是杜皮特公司的高级管理层处理一个困难的问题。公司的顾客现在要求更高的服务水平,及时维修从公司购买的打印机(特别是新式打印—复印机)。杜皮特已经每年花费 6 亿美元为这些设备提供服务。每一个技术服务代表负责区域包含了一个排队系统,技术服务代表是服务台,需要修理的设备是顾客。一个管理科学小组发现 $M/M/1$ 模型、$M/G/1$ 模型、$M/M/s$ 模型和无强制优先规则模型可以用来分析重新设计这个排队系统的途径选择。这个分析导致了高级管理层采纳了将两个单人技术服务代表负责区域合并为一个两人负责区域,并赋予维修复印机优先级的政策。这样做在没有显著增加成本的基础上达到了服务水平。

本章讨论的其他排队模型包括 $M/D/1$ 和 $M/D/s$ 模型、$M/E_k/1$ 和 $M/E_k/s$ 模型、强制优先规则模型。CD-ROM 上本章的补充材料还介绍了有限队列变化和有限呼叫人数变化的 $M/M/s$ 模型。

14.8 节陈述了排队模型提供的关于如何设计排队系统的四个关键启示。每一个启示都在杜皮特案例研究中得到了体现。

本章对五个排队模型获奖应用进行了总结。每一个应用每年都节约了好儿百万美元。

## 专业术语

**商业服务系统**（Commercial service system）：一个商业组织向组织外部的顾客提供服务的排队系统。（14.2 节）

**固定服务时间**（Constant service times）：每一位顾客有相同的服务时间。（14.1 节）

**顾客**（Customer）：到达排队系统接受服务的任何一种实体（人、交通工具、设备、物体等）的一般称谓。（14.1 节）

**爱尔朗分布**（Arlang distribution）：一个通用的服务时间分布，它的形状参数 k 决定了服务时间的波动程度。图 14.4 显示了其形状。（14.1 节）

**指数分布**（Exponential distribution）：到达间隔时间和服务时间最常用的概率分布。图 14.3 显示了其形状。（14.1 节）

**有限队列**（Finite queue）：只能容纳有限数量顾客的队列。（14.1 节）

**无限队列**（Infinite queue）：能够容纳无限数量顾客的队列。（14.1 节）

**到达间隔时间**（Interarrival time）：连续两个顾客到达排队系统的间隔时间。（14.1 节）

**内部服务系统**（Internal service system）：一种排队系统，其接受服务的顾客是提供服务的组织的内部成员。（14.2 节）

**无记忆特性**（Lack-of-memory property）：指的是下一个顾客到达的时间完全不受上一个顾客到达的时间的影响。（14.1 节）

Little **公式**：（Little formula）公式 $L=\lambda W$，或 $L_q=\lambda W_q$。（14.3 节）

**平均到达率**（Mean arrival rate）：单位时间到达一个排队系统的期望顾客数。（14.1 节）

**平均服务率**（Mean service rate）：单位时间一个连续工作的服务台完成的期望服务数。（14.1 节）

**无强制优先规则**（Nonpreemptive priorities）：当服务台空闲时用于选择下一个顾客以开始服务的优先级。然而，这些优先级不影响已经开始服务的顾客。（14.7 节）

**队列中的顾客数**（Number of customers in the queue）：等待服务开始的顾客数。（14.1 节，14.3 节）

**系统中的顾客数**（Number of customers in the system）：系统中的顾客总数，包括等待服务的顾客和正在接受服务的顾客。（14.1 节，14.3 节）

**强制优先规则**（Preemptive priorities）：为顾客提供服务中的优先级，包括为刚刚进入排队系统的较高优先级的顾客提供服务而将正在服务的低优先级的顾客挤出到队列中。（14.7 节）

**优先级**（Priority classes）：拥有不同的接受服务优先权的顾客类别。（14.7 节）

**队列**（Queue）：系统中的等待队伍。队列不包括正在接受服务的顾客。（14.1 节）

**队列容量**（Queue capacity）：队列可以容纳的最大顾客数量。（14.1 节）

**顾客服务优先规则**（Queue discipline）：决定选择队列中的顾客以开始接受服务的顺序的规则。（14.1 节）

**排队系统**（Queue system）：顾客，可能在队列中等待一段时间后，从服务台接受到某种服务的地方。（14.1 节）

**服务台**（Server）：向进入排队系统的顾客提供服务的实体。（14.1 节）

**服务成本**（Service cost）：为一个排队系统提供服务台的成本。（14.9 节）

**服务时间**（Service time）：顾客服务开始到结束的时间段。（14.1 节）

**平稳条件**（Steady-state condition）：一个排队系统在运作了一段时间后有效因子固定在一个小于 1 的值时这个排队系统所处的正常状态。（14.3 节）

**技术服务代表**（Tech rep）：杜皮特案例研究中技术服务代表的缩写。（14.4 节）

**运输服务系统**（Transportation service system）：一个涉及运输的排队系统，顾客或者服务台是运输工具。（14.2 节）

**有效因子**（Utilization factor）：服务台用于为顾客提供服务的平均时间比率。（14.5 节，14.6 节）

**等待成本**（Waiting cost）：使顾客在排队系统中等待产生的成本。（14.9 节）

**队列中的等待时间**（Waiting time in the queue）：一个顾客在队列中花费在等待服务开始上的时间。（14.3 节）

**系统中的等待时间**（Waiting time in the system）：在服务开始前以及在服务过程中顾客在排队系统中花费的时间。（14.3 节）

## 主要符号

$\lambda$ = 平均到达率(14.1 节)
$\mu$ = 平均服务率(14.1 节)
$s$ = 服务台数(14.1 节)
$L$ = 系统中的期望顾客数(14.3 节)
$L_q$ = 队列中的期望顾客数(14.3 节)
$W$ = 系统中的期望等待时间(14.3 节)
$W_q$ = 队列中的期望等待时间(14.3 节)
$\rho$ = 服务台的有效因子(14.5 节,14.6 节)

## 本章管理科学课件的学习辅助

"Ch. 14—排队模型"Excel 文件:

*M/M/s* 模型模板
*M/G/1* 模型模板
*M/D/1* 模型模板
$M/E_k/1$ 模型模板
无强制优先规则模型模板
强制优先规则模型模板
*M/M/s* 模型服务台数的经济分析模板

**管理科学互动模型:**

排队模型

**CD-ROM 上本章的补充材料:**

有限队列和有限呼叫人数变化的 *M/M/s* 模型

"Ch. 14—补充材料"的 Excel 文件:

有限队列变化的 *M/M/s* 模型模板
有限呼叫人数变化的 *M/M/s* 模型模板

## 习　　题

下面的习题(或习题的一部分),我们使用了"E"(Excel)提示模板可能会有用。对于题号前带有星号的习题书后给出了至少部分的答案。

14.1. 考虑一个典型的医院急诊室。
- a. 解释为什么它是一个排队系统。
- b. 这里什么是队列?你认为应当用什么顾客服务优先规则运作。
- c. 你是否认为存在随机到达?
- d. 这里什么是服务时间?你认为服务时间是否有巨大的波动?

14.2. 找出下面情况中排队系统中的顾客和服务台。
- a. 杂货店的收银台。
- b. 消防队。
- c. 桥梁的收费站。
- d. 自行车修理店。
- e. 船坞。
- f. 指派给一个操作工的一组半自动设备。
- g. 工厂的物料处理设备。
- h. 一个铅制品工厂。
- i. 一个根据订单运作的企业。
- j. 一个文字处理中心。

14.3.* 对于以下关于使用指数分布作为到达间隔时间概率分布的说法,标出哪些是对的,哪些是错的,然后根据本章的有关论述检查你的答案是否正确。
- a. 这是惟一符合随机到达的到达间隔时间的分布。
- b. 由于它无法知道下一个顾客何时到达,因此它具有无记忆特性。
- c. 在大多数情况下非常符合到达的间隔时间。

14.4. 对于以下关于使用指数分布作为服务时间概率分布的说法,标出哪些是对的,哪些是错的,然后根据本章的有关论述检查你的答案是否正确。
- a. 一般情况下,它为实际的服务时间分布提供了一个相当好的近似。
- b. 它的均值和方差总是相等。
- c. 对于服务时间的波动量,它代表了一个相当极端的情况。

14.5. 对于以下关于排队系统中的队列的说法,标出哪些是对的,哪些是错的,然后

根据本章的有关论述检查你的答案是否正确。

a. 队列是顾客在排队系统中等待直到服务结束为止的地方。

b. 排队模型通常假设队列只能容纳有限数量的顾客。

c. 最普通的顾客服务优先规则是先到先服务。

14.6. 米德城银行一直有两个出纳。顾客到达接受一个出纳的服务的平均率是每小时 40 人。一个出纳平均要用两分钟为一个顾客提供服务。当两个出纳都在忙时，新到来的顾客进入一个单列的队伍等待服务。经验表明，顾客在服务开始前平均在队伍里等待一分钟。

a. 解释为什么这是一个排队系统。

b. 确定这个系统的基本绩效测度——$L$、$L_q$、$W$、$W_q$（提示：我们不知道这个排队系统的到达间隔时间和服务时间的概率分布，因此你需要使用这些指标间的关系来帮助找出答案）。

14.7. M&P 食品杂货店附近有一个小型停车场，可以为顾客提供三个停车位。在营业的时候，当停车场未满时，汽车驶入停车场使用停车位，平均每小时占用两个。当停车场已满时，到达的车辆会离开而且不再回来。对于 $n=0,1,2,3$，$n$ 个停车位被占用的概率 $P_n$ 是 $P_0=0.2$，$P_1=0.3$，$P_2=0.3$，$P_3=0.2$。

a. 解释为什么这个停车场可以看作为一个排队系统，找出顾客和服务台。停车场提供了什么服务？什么是服务时间？队列容量是多少？（提示：见表 14.5。）

b. 确定这个系统的基本绩效测度——$L$、$L_q$、$W$、$W_q$（提示：你可以用给出的概率确定被占用的停车位的平均数）。

c. 使用 $b$ 的结果确定一辆车在一个停车位平均逗留时间。

14.8.* 内维尔和杰夫是拥有并经营一家理发店的两个理发师。他们为等待理发的顾客提供了两张椅子，因此理发店里的顾客数在 0 到 4 之间。对于 $n=0,1,2,3,4$，理发店里有 $n$ 个顾客的概率是 $P_0=1/16$，$P_1=4/16$，$P_2=6/16$，$P_3=4/16$，$P_4=1/16$。

a. 使用公式 $L=0P_0+1P_1+2P_2+3P_3+4P_4$ 计算 $L$。你将如何向内维尔和杰夫解释 $L$ 的含义？

b. 对于排队系统中每一个可能的顾客数量，确定队列中有多少顾客。将队列中每一个可能的顾客数量乘以它的概率，然后再将结果相加计算 $L_q$。你将如何向内维尔和杰夫解释 $L_q$ 的含义？

c. 已知平均每小时有四位顾客到达并理发，确定 $W$ 和 $W_q$。将这两个量的含义解释给内维尔和杰夫。

d. 已知内维尔和杰夫的理发速度是相同的，理发的平均时间是多少？

14.9. 请解释为什么单服务台排队系统服务台的有效因子 $\rho$ 必须等于 $1-P_0$，这里 $P_0$ 是系统中有 0 个顾客的概率。

14.10. 友谊邻居杂货店有一个全职收银员负责的收银台。顾客随机到达收银台，平均到达率是 30 人每小时。服务时间服从指数分布，均值为 1.5 分钟。这种情况有时导致了很长的队伍以及顾客的抱怨。由于没有地方可以再增加一个收银台，经理考虑雇用一个人帮助这个收银员将商品打包。这样可以使为一个顾客提供服务的期望时间降低到 1 分钟，但是分布仍然是指数分布。

经理想将收银台前有多于两个顾客的时间控制在 25% 以内。她还希望开始服务前等待时间超过 5 分钟或结束服务前等待时间超过 7 分钟的顾客不超过 5%。

a. 使用 $M/M/1$ 模型的公式计算目前运作方式下的 $L$、$L_q$、$W$、$W_q$、$P_0$、$P_1$、$P_2$。收银台前有多于两个顾客的概率是多少？

E b. 使用这个模型的 Excel 模板计算 a 的结果。求出开始服务前等待时间超过 5 分钟的概率以及结束服务前等待时间超过 7 分钟的概率。

c. 对于经理考虑的方案，重新计算 $a$。

E d. 根据这个方案重复 $b$。

e. 为了尽可能接近地达到她的标准，应当怎样做？

14.11.* 4M 公司有一个六角车床，是车间的一个关键的工作中心。零件以平均每天两个

的到达率随机到达这个工作中心。处理每一个零件的时间服从均值为 1/4 天的指数分布。由于零件很大,没有处理的零件暂时被存放在离机器有一段距离的房间里。然而,为了节省搬运时间,生产经理建议在六角车床旁增加足够大的在制品存放地,除了正在加工的一个零件外再提供三个零件(多余的零件仍然暂时存放在远处的房间里)。在这个建议下,这个六角机床旁的存放地足够放置所有的等待的零件的时间比例是多少?

a. 使用已有的公式计算结果。

E b. 使用 Excel 模板上的相关信息以回答这个问题。

14.12. 杰里·詹森是卡斯帕-爱迪生(Casper-Edison)公司新工厂的物料处理经理,要决定购买小型的拖车还是重型叉车来在工厂的固定制造中心间运输很重的货物。要求物料处理单元运送一批货的电话平均每小时随机打来四个。运送一批货物的总时间服从指数分布,小型拖车的期望时间是 12 分钟,重型叉车的期望时间是 9 分钟。每小时总成本(重置成本加上运作成本)为:小型拖车 50 美元,重型叉车 150 美元。由于在制品库存的增加,空闲货物(等待搬运或运输的货物)的成本估计为每批货物每小时 20 美元。

杰里还建立了希望物料处理单元满足的特定的标准,以尽可能地保持生产按计划进行。他希望在收到要求搬运的电话后搬运平均完成时间不超过半小时。他还希望搬运平均完成时间在 80% 的时间内不超过一小时。最后,他希望至少在 80% 的时间里,等待搬运的货物不超过三批。

E a. 如果选择小型拖车,计算各项绩效测度。评价这些指标是否满足上面的标准。

E b. 如果选择重型叉车,重复 a。

c. 以每小时的期望总成本(包括空闲货物)比较这两个选择。

d. 你认为杰里应当选择哪种方案?

E*14.13. 假设一个排队系统符合 $M/M/1$ 模型,$W=120$ 分钟,$L=8$ 位顾客。用这些条件(以及计算 $W$ 的公式)得出 $\lambda$ 和 $\mu$。然后计算出这个排队系统的其他各个绩效测度。

14.14.* S&R 公司在南加利福尼亚有一个大型的仓库存放存货物资,这个区域公司的许多家具商店需要这些货物。一个有四个工人组成的工作队负责为每一辆到达仓库装卸地的卡车装卸货物。管理层现在正在削减成本,因此需要对未来工作队的规模进行决策。

卡车以平均每小时一辆随机到达装卸地。工作队装卸一车货物的时间服从指数分布(与工作队大小无关)。四人工作队的均值是 15 分钟。如果改变工作队的大小,估计工作队的平均服务率(现在是 $\mu=4$ 位顾客每小时)与其规模成正比。

向这个工作队每增加一位成员的成本是每小时 20 美元。卡车未在使用(也就是卡车停在装卸地)的成本估计是每小时 30 美元。

a. 找出这个排队系统的顾客和服务台。目前有多少个服务台?

E b. 求出工作队中有四个成员时这个排队系统的绩效测度(在等待时间概率的 Excel 模板中设置 $t=1$ 小时)。

E c. 当有三个成员时,重复 b。

E d. 当有两个成员时,重复 b。

e. 是否要考虑单个成员工作队?请解释。

f. 有了前面的结果,你认为管理层应当选择什么样的工作队规模?

g. 使用成本数据确定多大的工作队规模使得每小时的期望总成本最小。

14.15. 杰克家族机械制造工厂有一个打磨设备切削工具的砂轮。现在需要决策将砂轮的速度设置为多少。

设备操作工要求的切削工具打磨时间服从指数分布,均值 $1/\mu$ 可以为 1 分钟、1.5 分钟或 2 分钟,这取决于砂轮的速度。打磨设备的运行和维护成本随着砂轮速度上升增加很快,估计每小时的成本均值是 1 分钟是 1.60 美元,1.5 分钟为 0.90 美元,2 分钟为 0.40 美元。

设备操作工平均每两分钟一个人随

机到来打磨他们的工具。操作工离开他或她的设备到打磨设备的成本估计为每分钟 0.80 美元。

E a. 求出三种打磨设备速度选择的各项绩效测度(在等待时间概率的 Excel 模板中设置 $t=5$ 小时)。

b. 使用成本数据确定哪一种打磨设备速度使得每小时的期望总成本最小。

E14.16. 森特维力(Centerville)国际机场有两条跑道。一条专门用于起飞,另一条专门用于降落。飞机平均每小时 10 架到达森特维力机场上空请求降落指示。一架飞机从收到允许降落指令到完成降落的时间服从均值为 3 分钟的指数分布,并且这个过程必须在另一架飞机得到降落指令前完成。等待指令的飞机必须在机场上空盘旋。

联邦航空管理局有一套关于等待降落飞机拥挤程度安全水平的标准。这个标准取决于机场的一些因素,如可供降落的跑道数。对于森特维力来说,这些标准是:(1)等待允许降落指令的飞机数平均不能超过一架;(2)在 95% 的时间里,实际等待允许降落指令的飞机数不能超过 4 架;(3)99% 的飞机在接收到允许降落指令前在机场上空盘旋的时间不能超过 30 分钟(因为超过这个时间通常要求飞机在油料耗完之前转飞另一个机场紧急降落)。

a. 评价目前的状况是否满足了这些标准。

b. 一家大的航空公司考虑将这个机场增添为它的一个中枢。这将会使平均到达率增加到每小时 15 架飞机。如果出现这种情况,评价是否能满足上述这些标准。

c. 为了吸引更多的业务(包括 b 中提到的航空公司),机场管理层考虑为降落再增加一条跑道。据估计,这样可以使得平均到达率达到每小时 25 架飞机。如果出现这种情况,评价是否能满足上述这些标准。

14.17.* 考虑 $M/G/1$ 模型。$1/\lambda$、$1/\mu$、$\sigma$ 都降低一半对 $L_q$ 和 $W_q$ 有什么影响?

14.18. 考虑 $\lambda=0.2$ 和 $\mu=0.25$ 的 $M/G/1$ 模型。

E a. 当 $\sigma$ 取下面每一个值 4,3,2,1,0 时,使用这个模型的 Excel 模板计算主要绩效测度 $L$、$L_q$、$W$、$W_q$。

b. 当 $\sigma$ 从 4 变到 0 时,$L_q$ 的变化幅度是多少?对于降低服务时间波动的重要性,这说明了什么?

c. 计算当 $\sigma$ 从 4 到 3、从 3 到 2、从 2 到 1、从 1 到 0 降低时,$L_q$ 的减少量。减少量最大是多少?最小是多少?

E d. 使用模板以试算法大概确定 $\sigma=4$ 时 $\mu$ 需要增加多少才能获得 $\mu=0.25$ 和 $\sigma=0$ 时相同的 $L_q$ 值。

E e. 在 $\sigma=4$,$\mu$ 从 0.25 每隔 0.01 增长到 0.35 的条件下,用模板生成数据表格求 $L_q$ 值。

E f. 用模板生成两维数据表格,求在不同的 $\mu$ 和 $\sigma$ 的组合下 $L_q$ 值,其中 $\mu=0.22,0.24,0.26,0.28,0.3$;$\sigma=4,3,2,1,0$。

14.19. 考虑以下关于 $M/G/1$ 排队模型的说法,这里 $\sigma^2$ 是服务时间的方差。标出哪些是对的,哪些是错的,然后根据本章的有关论述检查你的答案是否正确。

a. 增加 $\sigma^2$($\lambda$ 和 $\mu$ 不变)将会使 $L$ 和 $L_q$ 上升,但 $W$ 和 $W_q$ 不变。

b. 当在乌龟($\mu$ 和 $\sigma^2$ 小)和兔子($\mu$ 和 $\sigma^2$ 大)中选择一个作为服务台时,乌龟总会以较小的 $L_q$ 胜出。

c. $\lambda$ 和 $\mu$ 不变,服务时间服从指数分布的 $L_q$ 值是固定服务时间的 $L_q$ 值的两倍。

14.20. 玛莎开了一家咖啡店,顾客以平均每小时 30 人随机到达。玛莎向一个顾客提供服务的时间服从均值为 75 秒的指数分布。

E a. 使用 $M/G/1$ 模型的 Excel 模板计算。$L$、$L_q$、$W$、$W_q$。

E b. 假设用一个为每一位顾客提供服务的时间固定是 75 秒的咖啡机代替玛莎,计算 $L$、$L_q$、$W$、$W_q$。

c. 从 b 到 a $L_q$ 的变化幅度是多少?

E d. 使用模板以试算法大概确定玛莎需要将期望服务时间降低多少才能获得与咖啡机相同的 $L_q$ 值。

E e. 当玛莎的期望服务时间分别为 75,70,

65,64,63,62,61,60 时，用模板生成数据表格求 $L_q$ 值。

14.21.* 在吉姆巴克公司拖拉机的生产过程中需要生产一些装配件，再将装配件与其他零件在装配线上装配成拖拉机。以这种方法每天大约生产三台拖拉机。一个生产过程质检站用于装配件进入装配线前对其进行检查。现在质检站中有两名质检员一起检查每一个装配件。检查时间服从均值为 15 分钟的指数分布。这个检查系统的成本是每小时 40 美元。

现在有一项简化检查过程的建议，只需要一个质检员。质检员首先检查装备件的外观，然后她使用新式高效设备作全面检查。尽管这个只有一个质检员的过程会使检查时间的分布均值从 15 分钟增长到 16 分钟，它可以使分布的方差降低到目前值的 40%。成本是每小时 30 美元。

装配件以平均每小时 4 个的速度随机到达质检站。装配件在质检站等待的成本（增加了在制品库存并有可能干扰下面的生产过程）估计是每一个装配件每小时 20 美元。

管理层现在需要决定保持现状还是采纳这个建议。

E a. 计算现在排队系统的主要绩效测度 $L$、$L_q$、$W$、$W_q$。

E b. 对于建议的系统，重复 a。

c. 根据 a 和 b 的结果，你认为管理层应当怎样做？

d. 计算并比较在目前状况下和建议系统下的每小时期望总成本。

14.22. 安东尼奥自己开了一家修鞋店。顾客以平均每小时 4 个人的速度随机带来一双鞋要求修理，安东尼奥修理每一只鞋的时间服从均值为 15 分钟的指数分布。根据统计理论，修理一双鞋的时间服从均值为 30 分钟、形状参数为 $k=2$ 的爱尔朗分布。

a. 计算店中的鞋平均有几双。

b. 计算从顾客丢下一双鞋到开始修鞋和修理完毕的平均时间。

E c. 使用 $M/G/1$ 模型的 Excel 模板检查你得到的 a 和 b 的结果。

E d. 使用 $M/E_k/1$ 模型的 Excel 模板重复 c。

14.23.* 友谊天空航空公司的维护基地有一些设施，一次只能检查一台飞机引擎。因此为了尽早使飞机交付使用，公司使用交叉检查每一架飞机的 4 台发动机的政策。换句话说，每次飞机进入车间时仅检查一台引擎。在这个政策下，飞机以每天一架随机到达。检查引擎的时间（从工作开始时计）服从均值为天的指数分布。

一项改变政策的建议提出每次飞机进入车间后连续检查 4 台引擎。这意味着每架飞机的维护次数将下降到1/4。由于检查一台引擎的时间服从指数分布，统计理论表明检查 4 台引擎的时间服从均值为维修一台引擎的 4 倍时间、形状参数 $k=4$ 的爱尔朗分布。

管理层现在需要决定保持现状还是采纳这个建议。目标是引擎检查造成的整个机队损失的平均飞行时间最小。

E a. 比较在两个方案下一架飞机每次进入维护基地损失的平均飞行时间。

E b. 比较在两个方案下由于飞机在维护基地中发生飞行时间损失的平均飞机数。

E c. 比较这两种方式哪一种适合于管理层做出决策？请解释。

E14.24. 证券和信托银行有 4 个出纳为顾客提供服务。顾客以平均每分钟 2 人随机到达。然而，业务量在增长，管理层预测从 1 年后平均到达率将是每分钟 3 个人。

为了向顾客提供满意的服务水平，管理层已经建立了以下的指标。在队伍中等待服务开始的平均顾客数不超过 1 个。至少在 95% 的时间里，在队伍中等待的顾客数不超过 5 个，对于至少 95% 的顾客，花在等待上的时间不超过 5 分钟。

a. 使用 $M/M/s$ 模型评价目前是否满足这些指标。

b. 如果出纳数不变，评价 1 年后是否能够满足这些指标。

c. 为了完全满足这些指标，确定 1 年后需要多少出纳。

E14.25. 考虑 $M/M/s$ 模型。对以下 2 种情况，分别生成数据表格求平均到达率是 0.5、

0.9 和 0.99 个顾客每分钟时的 $L$、$L_q$、$W$、$W_q$ 和 $P\{\mathscr{W}>5\}$ 值。

a. 假设有一个服务台，期望服务时间是 1 分钟。比较平均到达率是 0.5，0.9 和 0.99 个顾客每分钟时的 $L$。对 $L_q$、$W$、$W_q$ 和 $\{\mathscr{W}>5\}$ 作同样的分析。对于有效因子 $\rho$ 从较小的值（如 $\rho=0.5$）到较大的值（如 $\rho=0.9$）甚至更接近 1 的值（如 $\rho=0.99$）产生的影响，你能够得出什么结论？

b. 现在假设有两个服务台，期望服务时间为两分钟，解出 a 的结果。

E14.26. 考虑平均到达率为每小时 10 人和期望服务时间为 5 分钟的 $M/M/s$ 模型。当服务台数是 1，2，3，4，5 时，使用这个模型的 Excel 模板计算出各个绩效测度（对于两种等待时间概率 $t=10$ 和 $t=0$）。然后对于下面每一种可能的令人满意的服务水平（时间的单位是分钟），用显示的结果决定需要多少服务台来满足这个标准。

a. $L_q \leqslant 0.25$

b. $L \leqslant 0.9$

c. $W_q \leqslant 0.1$

d. $W \leqslant 6$

e. $P\{\mathscr{W}_q>0\} \leqslant 0.01$

f. $P\{\mathscr{W}_q>10\} \leqslant 0.2$

g. $\sum_{n=0}^{s} P_n \geqslant 0.95$

14.27. 格雷格正在计划开一家快餐店。他估计在每天最高峰的时候顾客以每小时 150 人随机到达，计划雇用 3 个员工直接为顾客提供服务。现在它需要决策如何组织这些员工。

选择 1 是 3 个雇员每人负责一台收款机接收订单、取食物和饮料。在这种情况下，估计为每一个顾客提供服务的平均时间是一分钟，服务时间服从指数分布。

选择 2 是由一个收款机和 3 个雇员一起工作为顾客提供服务。一个人接收订单，一个人取食物，一个人取饮料。格雷格估计这将会使每位顾客的平均服务时间降低到 20 秒，服务时间同样服从指数分布。

格雷格想要一个能够为顾客提供最佳服务的选择。然而，由于选择 1 有 3 个收款机，当每一个人都在工作时，每一个选择每分钟平均都可以为 3 个顾客提供服务，因此哪一个选择较好并不清楚。

E a. 使用主要的绩效测度——$L$、$L_q$、$W$、$W_q$——比较这两个选择。

b. 解释为什么感觉上这些比较是有意义的。

c. 你认为哪一个指标对格雷格的顾客最重要？为什么？根据这个指标，选择哪一个方案比较好？

E14.28.* 在蓝芯（Blue Chip）保险公司，一个特定投资品的存入和取出是分别由两个职员完成的。存入单以每小时 16 份随机到达克拉拉的桌前。取出单以每小时 14 份随机到达克拉伦斯的桌前。进行交易的时间服从均值为 3 分钟的指数分布。为了降低存入单和取出单在系统的期望等待时间，保险精算部门提供了以下建议：(1)培训每一个员工处理存入和取出业务；(2)将存入单和取出单放入一个队列，有两个职员一起处理。

a. 计算在目前处理一种单据的情况下系统中的期望等待时间。然后将这些结果组合起来（对于存入单，用 $^{16}/_{30}$ 乘以 $W$；对于取出单，用 $^{14}/_{30}$ 乘以 $W$；然后将两个结果相加）计算任意一种随机到达的单据在系统中的期望等待时间。

b. 如果建议被采纳，计算到达的单据在系统中的期望等待时间。

c. 现在假设采纳建议导致了期望处理时间有一个小幅增长。使用这个模型的 Excel 模板以试算法确定期望处理时间（误差在 0.01 分钟以内），使得在现在程序下和建议程序下系统中随机到达单据的期望等待时间相同。

E14.29. 人类软件公司（People's Software）刚刚建立一个呼叫中心为新的软件包提供技术支持。两个技术代表接电话，每一个代表回答顾客问题的时间服从均值为 8 分钟的指数分布。电话以平均每小时 10 个随机打来。

到明年，电话的平均到达率估计会降低到每小时 5 个电话，因此公司计划将技术代表的数量降低到一个。确定在目前的排队系统下和明年的系统下 $L$、$L_q$、$W$、$W_q$ 的值。对于每一个绩效测度，哪一个

系统提供了较小的值？

14.30. 麦克力斯特工厂在其生产区目前有2个工具架，每一个工具架由一个管理员负责。一个工具架只有重型机器的工具；另一个存放其他工具。然而，对于每一个工具架，技工以平均每小时24人随机来取工具，期望服务时间是2分钟。

因为技工到工具架要等待的时间过长而产生的抱怨，有建议提出将两个工具架合并为一个使得当出现需求时每一个管理员可以处理任何一种工具。将两个工具架合并后平均到达率将翻一番达到每小时48人，期望服务时间仍然是2分钟。但是没有服务时间概率分布形式的信息，因此不知道何种排队模型最合适。

E a. 针对在工具架前等待的技工的期望数和每一个技工的期望等待时间，对现状和建议进行比较。对于4种排队模型将数据列表进行比较。这4种排队模型服务时间的分布是(1)指数分布，(2)形状参数为 $k=2$ 的爱尔朗分布，(3)形状参数为 $k=8$ 的爱尔朗分布，(4)退化分布(固定服务时间)。如图14.11和图14.12那样在需要的时候使用Excel模板。

b. 有了这些结果，应当选择哪一个方案？

c. 这些结果体现了14.8节中4个启示的哪一个？

14.31. 南部铁路公司(Southern Railroad)一直将列车车厢上漆的工作转包出去。但是管理层发现自己做这项工作可以为公司节省一笔开支。现在需要决策在这两个途径中选择哪一种。

选择1是提供两个上漆车间，上漆工作手工完成(每个车间每次有一节车厢)，每小时总成本是70美元。一节车厢的上漆工作需要6小时完成。选择2是提供一个喷漆车间，每小时成本是100美元。在这种情况下，一节车厢的上漆工作(一次为一节车厢上漆)是3小时。对于这两种选择。列车车厢以每5小时一节随机到达。每一节车厢的空闲时间损失是每小时100美元。

a. 使用图14.11估计选择1的 $L$、$L_q$、$W$、$W_q$。

E b. 对于选择2求出这些绩效测度的值。

c. 确定并比较这两个选择的每小时总期望成本。

14.32. 一个叫努力奋斗(Try Harder)的汽车租赁公司，将汽车维护工作转包给位于圣路易斯的公司做。然而由于汽车返回时间太长，公司决定建立自己的维护车间，更快地进行这项工作。这个车间每周工作42个小时。

选择1是雇用2名技工(成本是每周1500美元)，这样可以同时维护两辆汽车。一个技工为一辆汽车提供服务的时间服从均值为5小时、形状参数为 $k=8$ 的爱尔朗分布。

选择2是雇用1个技工(成本是每周1500美元)，但是提供一些特殊设备(资本成本是每周1250美元)来加快工作速度。在这种情况下，每一辆汽车的维护工作分两个步骤完成，每一个步骤的时间服从形状参数 $k=4$ 的爱尔朗分布，第一个步骤的均值是2小时，第二个步骤的均值是1小时。这表明两个步骤总时间的概率分布均值为3小时，方差等于两个步骤方差的和。然而，概率分布的形式不知道(不是爱尔朗分布)。

对于这两个选择，汽车以每小时0.3辆(工作时间内)随机到达。公司估计汽车无法出租的收入损失是每辆车每星期150美元。

a. 用图14.12估计选择1的 $L$、$L_q$、$W$、$W_q$ 值。

E b. 对于选择2求出这些绩效测度的值。

c. 确定并比较这两个选择的每星期总期望成本。

14.33.* 东南航空公司(Southeast Airlines)是一个主要在佛罗里达提供服务的小型航空公司。在奥兰多机场的售票处有一个售票员。买票的队伍有两队，一队是头等舱乘客，另一队是经济舱乘客。当售票员准备好为下一个顾客服务时，如果头等舱顾客队列中有人，则向头等舱顾客提供服务。如果没有，则向下一个经济舱顾客提供服务。两类顾客的服务时间都服从均值为3分钟的指数分布。在每天12小时的营业时间里，头等舱乘客以每小时2人随机

到达，经济舱为每小时 10 人。

a. 什么样的排队模型适合这个排队系统？

E　b. 求出对于头等舱乘客和经济舱乘客服务的绩效测度。

c. 头等舱乘客在服务开始前的期望等待时间是经济舱乘客的多少分之一？

d. 确定售票员平均每天工作的小时数。

14.34. 康健（County）医院的急救室总是有一个医生值班。在过去，有一个医生已经足够了。然而由于紧急情况下去医院而不找私人医生的情况有上升的趋势，要求急救的人数稳定上升。到明年，估计高峰时间（黄昏时）病人将以每小时两位随机到达。因此有建议提出明年在这个时段里为急救室增加一位医生。医院管理层（HMO）拒绝了这个建议，但是请了一个管理科学家（就是你）分析一个医生明年是否够用。

病人不是先到先服务。护士将病人分成三类：(1) 危重情况，需要立即抢救；(2) 严重情况，早期治疗对于防止恶化很重要；(3) 稳定情况，治疗可以推迟，不会有不利情况发生。然后病人以这个优先顺序接受治疗。在同一类中，还是采用通常的先到先服务。如果高优先级的病人到来，医生将会暂停对一个病人的治疗。大约 10% 的病人属于第一类，30% 属于第二类，60% 属于第三类。因为更加严重的病人将在做了紧急处理后送往医院做进一步治疗，急救室中一个医生的平均治疗时间在这三类之间没有很大差异。治疗时间可以看作服从均值为 20 分钟的指数分布。

管理层确定了如下的标准。治疗开始前的在急救室中的平均等待时间对于危重情况不超过 2 分钟，严重情况不超过 15 分钟，稳定情况不超过 2 小时。

a. 什么样的排队模型适合这个排队系统？

E　b. 使用这个模型确定如果明年继续只有一个医生当值，管理层的标准是否能够满足。

c. 使用 $M/M/1$ 模型中 $W_q$ 的公式确定如果采用先到先服务是否能够满足这个标准。

E　d. 明年高峰时段平均到达率为每小时两个病人只是一个估计。如果这个平均到达率为每小时 2.25 个病人，重复 b，进行敏感度分析。

E14.35. 贝克公司工厂中由于六角车床部的工作能力不足，工作耽误时间很长。部门领导认为需要 5 台机床，而不是现在的 3 台。然而由于公司管理层减少资本投入的压力，除非有足够证据证明需要添加第二台机床，公司只会授权增加一台。

这个车间做三项工作，官方任务、商业任务、标准产品生产任务。当一个六角机床完成一项工作后，如果有官方任务在等待就开始完成官方任务。如果没有，但是有商业任务在等待则开始完成商业任务。如果没有商业任务则生产正在等待的标准产品。相同类型的工作实行先到先服务。

尽管现在已经进行了大量的加班，管理层希望六角机床部以每星期 5 天、每天 8 小时为基础运作。一台六角机床完成一项工作的时间服从均值为 10 小时的指数分布。工作以官方任务每周 6 项、商业任务每周 4 项、标准生产任务每周 2 项随机到达（这些数据以后仍然保持不变）。

管理层感到六角机床部工作开始前的平均等待时间为官方任务不能超过 0.25 工作日、商业任务不能超过 0.5 工作日、标准产品生产任务不能超过 2 工作日。

a. 确定为了达到这个标准，需要增添多少台六角机床。

b. 官方任务、商业任务、标准产品生产任务耽误一个工作日的成本分别是 750 美元、450 美元、150 美元。每一台六角机床的平均资本成本估计是每一个工作日 250 美元。确定为了使期望总成本最小，需要增添多少台六角机床。

E14.36. 在对一个排队系统提供的服务台数量进行经济分析时，14.9 节引入了一个成本模型，目标是 $TC = C_s s + C_w L$ 最小。分析这个问题的目的是使你能够发现 $C_s$ 和 $C_w$ 的相关大小对最佳服务台数量的影响。

假设所考虑的排队系统符合 $\lambda$ = 每小时 8 位顾客和 $\mu$ = 每小时 10 位顾客的

*M/M/s* 排队模型。使用 *M/M/s* 模型经济分析的 Excel 模板找出下面情况中的最佳服务台数。

a. $C_s = 100$ 美元，$C_w = 10$ 美元

b. $C_s = 100$ 美元，$C_w = 100$ 美元

c. $C_s = 10$ 美元，$C_w = 100$ 美元

d. 对这三种情况，生成数据表格比较在不同数量的服务台的情况下预期的每小时成本。

E14.37.* 快餐汉堡餐馆麦克鲍格(McBurger)的经理吉姆·麦当劳意识到提供快速的服务是餐馆成功的关键。等待时间很长的顾客下一次会到另一家快餐馆。他估计在服务完成前等待一分钟，顾客会在以后的业务中平均损失 30 美分。因此他想要确认总是有足够的收银台使等待时间降低到最短。每一个收银台有一个兼职的雇员操作，他接收每一位顾客的食品订单并收钱。每一个雇员每小时的总成本时是 9 美元。

午饭时间，顾客以每小时 66 人随机到达。为一个顾客服务的时间估计服从均值为 2 分钟的指数分布。

确定在午饭时间，吉姆应该开放多少个收银台使得每小时期望总成本最小。

E14.38. G&T 公司在其复印室中为雇员提供了 3 台复印机。然而，最近有一些关于等待复印机空闲而浪费大量时间的抱怨，管理层正在考虑增加一台或更多的复印机。

在每年的 2000 个工作时中，雇员以平均每小时 30 人随机到达复印室。每一位雇员复印时间服从均值为 5 分钟的指数分布。雇员由于在复印室花费时间而损失的生产力估计每小时给公司带来平均损失 25 美元。一台复印机一年的租赁费用是 3000 美元。

确定为了使每小时的期望总成本最小，公司应当拥有多少台复印机。

## 案例 14.1　排队窘境

### (案例 13.1 的继续)

从不枯燥！这就是你对自己在一家大型的计算机及外围设备制造商极致公司(Cutting Edge)的集中化的记录和收入管理中心所做工作的评价。自从 6 个月前中心开始运作起，你和人力资源部经理马克·劳伦斯经历了一个过山车式的工作经历，获得了管理层的同意并建立了集中化的记录和收入管理中心是一个上升，由于对记录和收入呼叫中心的需求过大，受到恼怒的顾客(极致公司的所有雇员)的指责则是一个下降，准确预测对呼叫中心的需求又是一个上升。

现在你又面临一个下降。马克面带愁容地到你的桌前。

他马上开始了抱怨："我真是不明白，2 个月前你为我们所做的预测工作已经让我们了解了中心的周需求量，但是我们还是没有解决雇员的问题。我们使用了历史数据和你的预测计算呼叫中心的周平均需求。我们将这个平均周需求量通过除以一周的工作时数转化为小时平均需求量。然后，我们通过考虑顾客服务代表平均每小时可以处理的电话量，为中心配备员工以满足平均每小时的需求量。

但是情况很糟糕。运作数据显示超过 35% 的顾客等待顾客服务代表接听电话的时间超过 4 分钟！顾客仍然向我发出大量的抱怨，公司管理层的执行官还在向我施加压力！我需要帮助！"

你让马克平静了下来，向他解释说你知道出现了什么问题：一个特定小时内接收到的电话数远远大于(或远远小于)平均数，这是因为需求的随机性在作怪。而且，由于电话类型的不同，顾客服务代表每小时所能够处理的电话数也远远大于(或远远小于)平均数。

然后，你告诉他不用害怕，你可以处理这个问题。你已经阅读过将排队模型成功应用于呼叫中心运作的例子。你认为在学校里学过的排队模型将帮助你决定适当的雇员数水平。

a. 你要求马克说出需求率和服务率。他告诉你呼叫中心随机接收到电话，中心平均每小时收到 70 个电话。回应和保持电话不挂断的计算机系统很先进，其容量远远超过需求量。由于电话的打进是随机的，因此处理一个电话的时间是随机的，时间通常很短，但有时会相当长。然而，平均来说，一个顾客服务代表一小时可以处理 6 个电话。什么样的排队模型适合于这种情况？在略有超过 35% 的顾客在顾客服务代表接听电话前

要等超过 4 分钟的情况下，使用这个模型估计目前马克雇用了多少个顾客服务代表。

b. 马克告诉你除非 95% 的顾客等待顾客服务代表接听电话的时间是 1 分钟或更短，他是不会满意的。有了这个顾客服务水平和 a 得到的平均到达率及平均服务率，马克应当雇用多少个顾客服务代表？

c. 每一个顾客服务代表的年薪水是 30000 美元，马克告诉你它没有资源来雇用足够的雇员来实现 b 的服务水平。他要求你进行敏感度分析。在保证 80% 的顾客等待时间不超过 1 分钟的前提下，他需要雇用多少个顾客服务代表？在保证 95% 的顾客等待时间不超过 90 秒的前提下，他需要雇用多少个顾客服务代表？你会向马克建议什么样的服务水平？如果马克的呼叫中心为外部顾客（与公司无关）而不是内部顾客（雇员）服务，决策标准是否会有所不同？

d. 马克告诉你他对达到一个高的服务水平所需的服务代表数不满意。因此他想要找出一些除了简单地增加顾客服务代表外的方案。他所考虑的一个方案是建立一个培训计划，培训顾客服务代表更加高效率地使用计算机工具来应答电话。他相信这个方案可以将顾客服务代表平均每小时可以处理的电话数从 6 个增加到 8 个。由于每年雇员的知识都需要更新，这个培训计划每年在每个雇员上要花费 2500 美元。为了达到 b 的服务水平马克需要雇用并培训多少个顾客服务代表？在这个方案以及增加顾客服务代表的方案中你会选择哪一个？为什么？

e. 马克意识到排队论只能在决定所需的顾客服务代表数方面提供这么多帮助。他发现如果模型的输入数据不准确，排队模型将无法提供准确的答案。你认为哪些输入量需要重新评估？你会怎样估计这些输入量？

## 案例 14.2　降低在制品库存

北方（Northern）飞机制造公司的制造副总裁吉姆·威尔士被激怒了。这个早晨他走过公司最重要的制造厂，使他情绪非常得差。但是现在他可以将脾气发泄在这个厂的制造经理杰里·卡斯塔斯身上。杰里刚刚被吉姆叫进办公室。

"杰里，我刚刚从厂子那里回来，我非常失望。"

"出了什么问题，吉姆？"

"你知道我是多么的强调要削减我们的在制品库存。"

"是的，我们一直在努力。"杰里回答道。

"还不够！"吉姆提高了他的嗓音。"你知道我在走过冲压机时看到了什么吗？"

"不知道。"

"有 5 张金属薄板等待加工成机翼组件。然后在旁边的质检站，放着 13 套机翼组件。一个质检员正在检查一套，其他 12 套却躺在那里。你知道每一套机翼组件占用了我们几十万美元的资金。因此在冲压机和质检站间，有几百万美元的贵重金属躺在那儿。我不允许这样！"

委屈的杰里努力回答："是的，吉姆，我已经意识到了质检站是一个瓶颈。它通常不像你早上看到的那样糟，但是它的确是一个瓶颈。早上你看到的的确是较差的情况。"

"希望如此，"吉姆反驳道，"但是你应当防止这种情况的发生，哪怕是偶然发生。你准备怎么做？"

杰里现在对他的提问有话可说了。他说："实际上，我已经在处理这个问题。我现在有一些方案，我要求我的工作人员中的管理科学家分析这些建议，然后提出建议方案。"

"很好，"吉姆回答道，"很高兴这个问题在你的掌握之中。授予你最高的优先权，尽可能快地向我报告。"

"我会这样做的，"杰里保证。

这是杰里和他的管理科学家们所遇到的问题。10 台一样的冲压机每一台都用于在大张经过特殊处理的金属薄板上冲压出机翼组件。金属薄板以每小时 7 张随机到达。冲压机冲压出机翼组件的时间服从均值为 1 小时的指数分布。完成后，机翼组件以相同的到达率随机到达质检站（每小时 1 套）。一个质检员全职检查这些机翼组件，保证它们符合标准。每次检查花费她 7 分钟，因此每小时她可以检查 8 套机翼组件。除了在冲压机那里已有的在制品库存外，这个检查率导致了质检站大量的在制品库存（也就是说，等待完成检查的机翼组件的平均数量相当大）。

这种在制品库存的成本估计是每一张在冲压机那里的金属薄板或每一套在质检站的机翼组件每小时 8 美元。因此杰里提出了两个方案以降低在制品库存的平均水平。

方案 1 是略微降低冲压机的压力（这会导致冲压一套机翼组件的平均时间增加到 1.2 小时），使得质检员可以更好地跟上它们的产出速度。这还会将

每一台冲压机的成本（运作成本加折旧成本）从每小时7美元降低到6.5美元（相反，增大最大压力会使成本上升到7.5美元每小时，冲压一套机翼组件的平均时间减低到0.8小时）。

方案2是用一个年纪较轻的质检员做这项工作。他的工作速度比较快（尽管由于缺少经验，检查时间有一些波动），因此他能够更好地跟上冲压机的产出速度（他的检查时间服从均值为7.2分钟，形状参数为$k=2$的爱尔朗分布）。这个质检员的工作等级要求每小时的收入为19美元（包括奖金），现在的质检员由于工作等级较低，每小时17美元（同一个工作等级中质检员的检查时间相同）。

你是杰里的管理科学专家，被要求对这个问题进行分析。他要求你"用最先进的管理科学技术分析每一个方案能够降低多少在制品库存，然后提出你的建议。"

a. 为了提供一个比较的基础，首先要评价现在的状态。确定在冲压机那里和质检站的在制品期望库存量。然后计算在制品库存、冲压机、质检员每小时期望总成本。
b. 方案1会有什么影响？为什么？将得到的结果与a的结果进行细致的比较。将结果解释给杰里听。
c. 方案2会有什么影响？为什么？将得到的结果与a的结果进行细致的比较。将结果解释给杰里听。
d. 对于降低在冲压机那里和质检站的在制品期望库存量，提出你的建议方案。明确说出你的方案，并用像a一样的量化分析为你的方案提供支持。将得到的结果与a的结果进行细致的比较，并表示出你建议的方案将产成的改进效果。

## 案例14.3 奇可普公司①

从缅因州到阿拉斯加拥有超过1300家支行的奇可普（KeyCorp）是美国最大的银行控股公司之一。由于拥有历史悠久的强大的资金实力，奇可普的目标是成为寻求世界级的金融产品和服务的顾客的第一选择。然而，传统银行和在较少的限制下运作的非银行竞争者带来的竞争的升级，迫使奇可普重新考虑和重组它的特许支行。

虽然电子银行业继续赢得顾客的接受，但银行支行仍然主宰着金融服务业。支行的出纳是银行最基本的顾客接触途径。奇可普的支行有95%与顾客的接触使用出纳进行的。由于顾客数量、交易量以及与服务相关的成本的缘故，支行经理不得不持续地提高支行的生产力。奇可普支行经理们面临的一个基本问题是在雇员成本保持低水平的同时如何改进顾客服务（用减少顾客等待时间表示）。

奇可普执行副总裁罗伯特G·琼斯强调了持续改进顾客服务的重要性："我们每年有1.5亿笔业务……它要求我们每一个奇可普的员工以顾客满意的方式完成这些业务。"

### 公司和行业

奇可普总部设在美国俄亥俄州克利夫兰市。1994年它获得了8.54亿美元的利润。到1994年底为止拥有资产668亿美元，实物资产47亿美元。它的特许支行，包括14个州的1300所支行和25个州的附属机构，规模在美国排第五位。通过它的综合性商业银行和专业化的支行，奇可普提供各种服务，包括消费信贷、投资管理和信托、公司金融、证券经纪人、个人理财以及为个人、投资者、大、中、小型公司定制服务。

奇可普长期拥有出众的财务状况，ROA和ROE指标在同行中排名在前五位之列。因为银行业发展的不确定性，奇可普的绩效更能给人留下深刻印象。行业合并、竞争加剧、法规限制和盈利压力的增大是行业的领导者面临的众多主要挑战。在过去的15年里，银行业的兼并使得银行从超过200家锐减到只有不到50家。在以后的5年中，行业专家估计全国范围内将只剩下不到12家主要的银行。

相反，行业准则自从20世纪30年代大萧条时期引进新的规则解决难题以来，没有发生实质性的变化。结果，这些准则对90年代的全球竞争没有什么帮助作用。行业准则继续限制银行拓展新业务和推出新产品，并限制银行与非银行实体竞争的能力，如美林（Merrill Lynch）和美国运通（American Express）。而且，还有来自其他竞争者的进一步的竞争压力，如拥有畅销的基于PC的家庭财务系统的微

① 这是一个INFORMS教学案例，用于课堂讨论。这个案例由Binu Koshy在加拿大西部安大略大学毅伟商学院（Richard Ivey School of Business）Peter Bell教授的指导下制作完成。运筹学和管理科学协会版权所有，1998。在版权所有人INFORMS的许可下使用。

软公司已经打开了家庭理财服务的大门。

银行家面对传统的等级、僵化的规则以及新出现的限制较少的激进的竞争者的不断激烈的竞争。为了迎接这些挑战，奇可普必须从一个传统银行向一个金融服务提供者转变。

### 顾客服务中的问题

针对不断加剧的竞争，奇可普推出了“2000 首选”活动。这将会最终使分销系统从支行转变为这样一些如 ATM 机、电话理财、家庭理财等的选择。然而，尽管电子理财越来越多的为人们接受，支行业务仍然在这个行业中占据主导地位。在行业继续发展的同时，奇可普不得不关注于向顾客提供高质量的服务。高质量的服务包括友善、工作细致的出纳和快速、高效的服务。

奇可普的支行目前是特许经营的重要组成部分，将继续在公司的发展中扮演一个整体的角色。对特许支行的重新考虑和重组对奇可普成为一个世界级的金融服务提供者很关键。每年有 2.1 亿笔顾客交易通过奇可普支行的出纳完成，占据了总顾客交易量的 63%。奇可普的一项调查表明，顾客等待时间是产生顾客不满的最主要的原因。大量的顾客和交易、与服务有关的成本，使得支行经理想要持续地提供支行的生产力，但是如果通过降低顾客等待时间改进服务，雇员数水平和成本将很难控制。在兼并加剧、竞争升级以及通过购并银行不断扩张的情况下，奇可普希望控制服务质量，不想使其成为行业竞争的牺牲品，要通过系统的途径实现目标。

奇可普将顾客服务管理看做一个所有组成部分一起为了共同的目标工作的整体系统。它强调系统各个组成部分间的内在联系，确信修改一个组成部分会影响其他部分并最终影响结果。奇可普为新的系统确定了如下目标：

- 授权一线经理在他们的控制下管理服务的各项要素，同时隔离变动因素并使之稳定。
- 建立连续的而且可以随组织变化的指标体系和反馈系统。
- 实现自动数据采集。
- 生成基于事实的输出结果。
- 鼓励支行间的竞争，在出众的成绩的基础上培养自豪感和主人翁精神。

与许多其他行业不同，银行业是一个人力系统。服务的提供和消费的主体都是人。因为环境不可预测，所以如果管理不善，很快会变得不稳定。为了对付这种情况，奇可普着眼于为经理们提供信息，使得他们可以对这个人力密集型服务行业各种不可避免的变化做出反应。奇可普认为这将会在方法和结果上培养主人翁精神。

### 消除支行经理无法控制的交易过程的障碍

奇可普管理层认为无法衡量的东西是无法控制的。于是，他们开始分解银行出纳与顾客交流中的各个因素。这将使得他们能够认识到每一个方面改进绩效的机会，并识别哪些活动是支行经理可以控制的，哪些是他们不能控制的。

相应地，奇可普开发了一种绩效考察系统，搜集关于每一个离散顾客交易时间组成的数据，以顾客在出纳窗口前花费的时间定义。这个系统使得奇可普能够在连续的基础上通过获取每一个交易组成本部分——主机反应时间、网络反应时间、出纳控制时间、顾客控制时间、支行硬件时间——的开始时间和结束时间衡量一笔交易。奇可普现在可以将交易分解为最基本的组成部分并比较每一类的交易，找出那些提供最大改进机会的部分。奇可普还可以搜集特定一天的特定时间里一个出纳处理的单个业务的顾客的交易时间组成数据。

第一个交易报告产生于 1992 年 4 月，基于 5 个支行 36 个业务日 15000 次服务，显示了平均顾客处理时间是 246 秒，这是无法接受的。

奇可普进行了初步的分析，设置服务目标是所有日子 90% 的顾客等待时间要少于 5 分钟。这个分析还估计了为了达到成本目标和保持良好的服务态度需要对提供服务的出纳数所做的改变，并表明需要以每年超过 1000 万美元的成本增加 502 名出纳（增长 30%）以达到 90% 的目标。奇可普将或者增加出纳数或者缩短处理时间。增加出纳是不可行的，因为成本太高，支行无法承受要求的雇员增加量。因此如果要达到新的服务质量目标，改进雇员管理和再造顾客交易时间将是必需的。

对交易时间的详细分析发现尽管网络和主机的平均反应时间很低（分别是 2.0 秒和 2.8 秒），主机处理出纳系统所需信息的反应时间是可以接受的，而网络反应时间（从支行的调制解调器到主机的调制解调器传递信息的时间）是无法接受的。时间有很大的波动，每个请求的平均时间超过 60 秒。

为了降低 246 秒的顾客交易时间，奇可普采取的第一个步骤是再造交易过程。这个措施稳定和简化了交易环境，使交易处理时间降低了 66 秒，即降低了 27%。通过消除和减少支行经理不可控的交易处理障碍，奇可普要求支行经理更好地管理出纳的生产力和顾客等待时间。奇可普要求他们关注于两个领域：

1. 提高出纳的效率和生产率。

2. 有效安排出纳,使得他们能够在出现大量顾客时提供服务。

## 出纳生产力系统

奇可普管理层于1992年在支行管理层中引入了出纳生产力模块。这个模块使用绩效考察系统所获得的数据,使得支行经理能够知道任意时间正在接受服务的顾客数,正在处理的交易,以及交易所需的时间。这个数据模块将数据进行编辑,向支行经理提供四份报告,帮助他们雇用员工、安排计划并发现需要进一步培训的员工。

**报告 P1**

出纳熟练程度总结提供了每一位出纳服务的顾客数、处理的交易的总数和平均每个顾客的交易数的详细信息。这个报告还对在给定一组交易的情况下出纳的平均交易处理时间在所有的出纳中的上四分位数进行了比较。

**报告 P1——出纳熟练程度总结报告**

银行—地区支行#—名称

年　　月

| 出　纳 | 服务顾客数 | 处理交易数 | 平均交易数/顾客数 | 每位顾客(交易)平均时间(秒) | | 平均处理时间/交易 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 顾　客 | 交　易 | 实　际 | 上四分位点 | 效　率 |
| 在　线 | 5524 | 7704 | 1.39 | 82 | 59 | 44 | 60 | 134 |
| 营业厅 | 7465 | 11971 | 1.60 | 149 | 93 | 76 | 77 | 101 |
| 总　计 | 12989 | 19675 | 1.51 | 120 | 79 | 64 | 70 | 110 |
| 11122333 | 1342 | 1984 | 1.48 | 127 | 86 | 69 | 76 | 110 |
| *** | *** | *** | *** | *** | *** | *** | *** | *** |
| *** | *** | *** | *** | *** | *** | *** | *** | *** |
| 77788999 | 3802 | 5302 | 1.39 | 79 | 57 | 43 | 59 | 138 |

**报告 P2**

交易类型处理时间总结为经理们提供了关于在他们的支行处理最多的交易和相关处理时间的信息。根据交易频度将这些信息降序排列,经理们能够更好地理解他们支行顾客的需求并发现软件改进的机会以及将出纳的有些交易移到其他途径如ATM机上。使用报告P1和P2,经理有了管理出纳熟练度和生产力的工具。

**报告 2——交易类型处理时间报告**

银行—地区支行#—名称

年　　月

| 交易代码 | 交易描述 | 处理交易量 | 平均时间(秒) | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 实　际 | 上四分位点 |
| 0003 | 数据加密存款 | 9504 | 80 | 80 |
| 0010 | 美国支票兑现 | 3898 | 70 | 66 |
| 0091 | 查　询 | 2317 | 76 | 71 |
| 0002 | 非美国支票兑现 | 1579 | 58 | 53 |
| 0084 | 分期付款支付 | 322 | 81 | 79 |
| *** | *** | *** | *** | *** |
| *** | *** | *** | *** | *** |
| 0074 | 直接通讯预付 | 1 | 213 | 91 |
| 总　计 | | 19675 | 79 | 76 |

**报告 P3**

经理们需要对高峰和顾客服务变慢的模式的预测来组织出纳。报告P3,日顾客数和交易量总结,提供了每星期每天以及每一个日期的交易量,为高峰日,如发薪日、社会保险现金支付日(Social security check-cashing)或其他大交易量的日子安排好出纳。

**报告 P3——日顾客数和交易量总结报告**

银行—地区支行#—名称
年　月

| 星　期 | 日　期 | 服务顾客数 | 处理交易数 | 平均交易数/顾客数 | 每笔交易或每个顾客的平均时间(秒) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 交　易 | 顾　客 |
| 星期四 | 09/01/1994 | 672 | 1035 | 1.54 | 78 | 120 |
| 星期五 | 09/02/1994 | 966 | 1426 | 1.48 | 78 | 115 |
| *** | *** | *** | *** | *** | *** | *** |
| *** | *** | *** | *** | *** | *** | *** |
| 星期五 | 09/30/1994 | 954 | 1472 | 1.54 | 76 | 117 |
| 总　计 | | 12989 | 19675 | 1.51 | 79 | 120 |

报告 P4

报告 P4 显示了一个工作日每半个小时的顾客数量和交易量。它还显示了处理交易的平均时间和顾客交易时间的平均值。使用报告 P3 和 P4，支行经理可以确定日常计划，使雇员数水平符合期望的交易量。

奇可普相信出纳生产力系统为支行经理提供了衡量并管理出纳熟练度和估计顾客到达的工具，使得他们能够达到目标服务水平。

**报告 P4——工作日每半小时顾客数和交易量报告**

银行—地区支行#—名称
年　.月

| 时间间隔 | 平均服务顾客数 | 平均交易数 | 平均交易数/顾客数 | 每笔交易或每个顾客的平均时间(秒) | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 交　易 | 顾　客 |
| 8:30A. M. ~8:59A. M. | 8 | 12 | 1.48 | 81 | 119 |
| 9:00A. M. ~9:29A. M. | 26 | 35 | 1.38 | 78 | 107 |
| *** | *** | *** | *** | *** | *** |
| *** | *** | *** | *** | *** | *** |
| 5:30A. M. ~5:59A. M. | 32 | 50 | 1.55 | 79 | 122 |
| 总　计 | 899 | 1334 | 1.48 | 78 | 115 |

## 监视顾客等待时间的系统

奇可普下一步想监视顾客等待时间，看看 90% 的顾客等待不超过 5 分钟的目标是否已经达到。为此，奇可普又搜集了两套数据。第一，它搜集了队列长度的数据。开始时，出纳使用一个机械钟，每 30 分钟响一次，这时出纳记录下站在队伍里的顾客数。这种做法很快被一个每半个小时自动出现在出纳主菜单屏幕上的统计提示屏幕代替（在两笔交易之间）。一输入队列中的顾客数，这个屏幕就消失了，直到半小时过后再次出现。

第二，奇可普搜集了出纳每半个小时工作的出纳数的数据。例如，如果 3 个出纳工作满半小时，第 4 个在11:15开始工作，或开始有 4 个出纳，一个在11:25离开去吃午饭，另一个在11:20离开去做指定的工作，则在11:00到11:30A. M. 间有 3.5 个出纳。

如果奇可普要为单个支行一个星期中每天，或一个日期，或任意组合建立分立的服务水平目标，就需要确定和报告顾客等待时间。奇可普如何确定奇可普支行中特定时间间隔内的顾客期望等待时间，以及确定服务目标是否达到了？

a. 回答下面的问题：奇可普将如何为支行经理提供包含详细的顾客等待时间的报告，以及衡量奇可普支行的绩效是否到达奇可普的服务目标？
b. 讨论下面的问题：
   1. 奇可普是否能够直接得到顾客等待时间的数据？
   2. 从现有数据中如何估计等待时间？
   3. 进行这些估计需要什么样的假设？

CHAPTER

# 15 计算机仿真:基本概念

## 学习目标

完成本章学习后,你应该掌握:

1. 描述计算机仿真的基本概念;
2. 描述计算机仿真在许多管理科学研究中的作用;
3. 使用随机数来产生一个简单离散分布的随机事件;
4. 应用反向转换方法从任何一个概率分布产生随机观察;
5. 在电子表格上用 Excel 展开基本的计算机仿真;
6. 使用队列仿真器对基本的排队系统展开计算机仿真并解释结果;
7. 为一个随机系统描述和使用仿真模型的结构;
8. 鉴别计算机仿真应用的一些基本类型;
9. 列出一个主要的计算机仿真研究的步骤。

在这一章里,我们将重点介绍管理科学的最后一个关键技术——计算机仿真。在管理科学的众多技术中,计算机仿真是运用最为广泛的技术之一。并且,由于这一技术功能强大、直观灵活,计算机仿真的应用将会越来越广泛。现在,许多经理人已经把它看作最有价值的决策工具之一。

计算机仿真运用计算机模拟整个流程或系统的运作。例如,计算机通过反复模拟交易的过程,以产生不同结果从而对整个财务过程的风险作出分析。计算机仿真也同样广泛应用于分析具有无限过程特征的系统。对于这种系统,计算机随机地产生并记录各种事件的结果,就像该系统在现实环境中的真实运作一般。由于计算机运行速度极快,能够在数秒钟之内模拟某个系统几年内的运作情况。通过记录系统在不同设计方案或操作程序下的运作情况,人们可以在最终做出决定之前评估或比较这些不同的决策方案。对于大多数过程和系统,这些工作都可以在电子表格(spreadsheet)上完成。

本章的第一部分举例说明计算机仿真的本质。在 15.2 节和

15.3 节我们将讨论和分析一个案例（对在前几章提到过的赫尔卡特理发店的案例作进一步分析）。在接下来的一节中提出了计算机仿真的各种普通的应用，15.5 节简述了应用计算机仿真的整个过程。第 16 章中通过描述如何应用一个著名的 Excel 加载宏——Crystal Ball 来进一步扩展计算机仿真应用，从而可以在电子表格上高效地解决一些比较复杂的计算机仿真问题。

## 15.1　计算机仿真的本质

长期以来，仿真就是设计师的一个重要工具。例如，在设计新型飞机的过程中，模拟飞行的风洞试验是一个不可或缺的标准程序。从理论上来说，当设计改变一些重要参数时，应用相应的物理定律能够推算出飞机在性能表现上的变化，然而，在实际操作中，这样的推理计算将会变得非常复杂以至于不可能完成。另一种做法就是根据不同设计建造真实的样机进行试飞，在实践中选择一个最优的设计方案，但是这样做的成本是很高的（并且也不安全）。因此，在经过一些初步的理论分析完成粗略设计之后，飞机的风洞实验是进行下一步精密设计所不可缺少的工具。这种仿真试验意在模拟一架真实的飞机在某种特定条件下的飞行，从而估计其在未来实际中的表现。在应用这种方法完成各个细节的设计之后，就可以制造出原型机进行实际飞行试验，并不断加以调整、改进直至最后设计定型。

### 计算机仿真的作用

计算机仿真在许多管理科学研究中起到了一个基本上类似的作用。然而，管理科学关心的是系统设计或系统程序的构建，而不是设计飞机。在很多情况下，这种系统是一个随机系统，定义如下。

> **随机系统**（stochastic system）是这样的一种系统，它将随着时间的推移，服从一种或多种概率分布，不断变化。例如，在前一个章节中描述的排队系统就是一种随机系统，因为在该系统中无论是间隔时间还是服务时间都是服从概率分布的。

> 计算机仿真使用概率分布来随机产生发生在系统中的不同事件。

计算机仿真通过随机地生成符合某种概率分布的不同事件模拟一个随机系统的运行（如排队论模型中的人员到达和服务完成）。在这种情况下，计算机与其说是操纵了一个真实的物理系统，倒不如说只不过记录了模拟的事件的发生以及被模拟系统的相应表现。

在将计算机仿真技术应用到管理科学研究时，具体的操作与模拟过程与前面提到过的设计飞机的步骤基本上是相同的。特别是，首先要进行一些基础的理论分析（或许是用粗略的数学模型），以便对系统以及系统的运行过程有个粗略的设计方案。然后，运用计算机仿真检验各个具体的设计方案，以评估不同方案的优劣。在完成细节设计之后，将进入实际测试阶段，再对系统进行一个优化以完成最终设计。

在处理一个较为复杂的系统的时候，计算机仿真是相对来说成本较高的一种处理手段。开始时，我们要设计出一个详细的模型以描述目标系统的运行并且考虑该系统应如何被仿真。其次，我们要花相当长的时间在仿真程序的开发和调试上。然后，就是长时间的上机运行以获得能够对各个备选方案的设计效果做出正确评估的充分数据。在我们做出最后的结论前，还必须对获得的数据进行仔细的分析。整个过程将会耗费大量的时间和精力，因此，如果存在其他能够提供相同信息的较为廉价的方法，计算机仿真就不是最佳选择。

计算机仿真可以预测那些太复杂以至于不能应用其他的数学模型来分析的系统的表现。

在处理非常复杂的随机系统时，如果任何一个我们在前面几个章节提到的数学模型（排队模型）都难以对该系统做出令人满意的分析，往往就必须采用计算机仿真技术。数学模型的长处主要在于能够抽象出问题的实质及其潜在结构，这无疑对洞察整个系统运作的因果关系起到很大的作用。因此，如果建模者能够找到一种数学模型，并且该模型既是对问题的一个合理的抽象，又是有可能找到解决方案的，那么建模的方法将明显优于计算机仿真。然而，许多问题实在太复杂而不可能采用建模的方法。在这种情况下，计算机仿真技术就成为解决问题的惟一实际而有效的方法。

现在让我们来看一些例子，通过这些例子可以说明计算机仿真的一些基本概念。为了突出这些基本概念，所举的例子都比实际会遇到的问题简单得多。正因为这些例子都很简单，所以我们可以比较一下系统性能的解析解与通过计算机仿真获得的估计值。

## 例 1：掷币游戏

假如你幸运地赢得了一场大奖赛的第一名。奖品是全额免费的拉斯维加斯豪华旅游，包括一些在赌城娱乐场中下赌注所需要的筹码。

到了赌城，你发现除了一些传统的游戏（21 点、轮盘赌等等），他们还提供一种非常有趣的新游戏，规则如下：

1. 游戏双方可以反复掷币，直到“正面”出现的次数与“反面”出现的次数之间相差为三。
2. 决定参加比赛的任何一方必须为每次掷币付 1 美元。在一局游戏的中间不允许退出。
3. 你将会在游戏结束时获得 8 美元。

这样，如果你投掷次数少于 8 次，你就赢钱了，否则输钱。这里有一些例子（H 代表正面，T 代表反面）。

| | | |
|---|---|---|
| HHH | 3 次 | 赢 5 美元 |
| THTTT | 5 次 | 赢 3 美元 |
| THHTHTHTTTT | 11 次 | 输 3 美元 |

你应该如何来决定是否参加这个比赛呢？

许多人会用基于仿真的方法来做决定，虽然他们并不一定会用这个名字来称呼它。这种情况下，无非是反复投掷硬币直到弄清是否值得花钱去玩这个游戏。用半个小时来掷币，也许就足以计算出可能的得失。这就是真正的仿真，因为你在模拟实际游戏的场景而没有真正地赢钱或输钱。

由于这一章的主题是计算机仿真，让我们来看看计算机是如何进行这一模拟实验的。虽然计算机不能投掷硬币，但它可以模拟着这样做。计算机通过产生一系列如下定义的随机数来完成这一任务。

如果一个数是以在 0 和 1 之间相同的几率出现的任意数，这就是随机数。例如，如果使用四位小数，那么每个位于 0.0000 和 0.9999 之间的 10000 个数字中的任意一个都有相同的发生率。这样，一个

位于 0 和 1 之间的随机数就是随机观察到的平均分布在 0 和 1 之间的任意数（今后，我们在提到这些随机数时，将省略掉“0 和 1 之间”这一定语）。

> 在进行计算机仿真时随机数起到了一个非常重要的作用，因此 Excel 使用了 RAND( ) 函数来产生随机数。

产生随机数的一种很简便方法是使用 Excel 软件中的 RAND( ) 函数。例如，图 15.1 左下角表示的 = RAND( ) 函数已经被输入在 C13 单元格中，然后复制到 C14:C62 一系列单元格中（该函数的圆括号必须保留，但括号中不允许插入任何成分）。这样 Excel 软件就可以在空白表格的 C13:C62 单元格中产生随机数（隐藏 27 ~ 56 行以节省图表空间）。

掷币游戏的概率结果是：

$$P(\text{正面}) = \tfrac{1}{2} \qquad P(\text{反面}) = \tfrac{1}{2}$$

所以，模拟掷币游戏，计算机就可以让任意一半的随机数对应于正面，另一半对应于反面。确切地说，我们可以用以下的相关性来表示：

| | |
|---|---|
| 0.0000 到 0.4999 | 与正面相关 |
| 0.5000 到 0.9999 | 与反面相关 |

使用如下公式：

= IF(RAND( ) <0.5,“正面”,“反面”)

在图 15.1 中的 D 单元格这一栏中，当随机数小于 0.5 时，Excel 插入正面，反之则插入反面。最后，产生在 C 一栏中的前面 11 个随机数有以下的关于正面（H）和反面（T）的结果：

THHTTHTHTTT

当正面的次数（7）超过反面的次数（4）的差为 3 时，游戏结束了。单元格 D7 和 D8 记录了投掷的总次数（11 次）和最后的输赢结果（8 美元 - 11 美元 = -3 美元）。

这样，图 15.1 记录了完成一整场掷币游戏的计算机仿真过程。为保证游戏能够完成，假设硬币可投掷 50 次。E 栏和 F 栏记录每次投掷之后，正面与反面的累计数。G 栏中的等式只对正面与反面的次数相差 3 的单元格填入“停止（Stop）”。如果超过 3，则插入 NA（不适用），反之，则空白。

这样的游戏仿真可以反复在这张表格上做任意次。每次，Excel 都会产生一组新的随机数对应新的正面与反面的排列结果[只有在你选择了你想要重复的数的范围之后，Excel 才会重复产生一列随机数。用复制（Copy）命令复制这个范围，在编辑（Edit）菜单中选择特殊粘贴（Paste Special），再选择数值（Values）选项，然后点击确定（OK）]。

为了达到较为可靠的平均结果的估计值，往往需要进行多次计算机仿真。投币游戏中，在同一张 Excel 电子表格上进行 14 次模拟试验，得到的结果如图 15.2 的数据表所示。首先，你要选定 J、K 和 L 列来生成一个数据表。数据表中的第一列（J7:J20）用来标明 14 次游戏的序号，空白其第一行。下面的两列来指明所有评估的输出结果。对于这两列中的每一列，使用其第一行（单元格 K6:L6）来填入和相应输出单元格关联的公式。这样，目标单元格就是投掷的次数和输赢情况，所以 K6:L6 中的公式如图 15.2 中电子表格右边所示。

下一步就是选择整个的数据表（J6:L20），然后选择数据菜单中的模拟运算表选项。在

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Coin-Flipping Game** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Required Difference | 3 | | | |
| 4 | | | Cash at End of Game | $8 | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | **Summary of Game** | | | |
| 7 | | | Number of Flips | 11 | | | |
| 8 | | | Winnings | –$3 | | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | Random | | Total | Total | |
| 12 | | Flip | Number | Result | Heads | Tails | Stop? |
| 13 | | 1 | 0.3039 | Heads | 1 | 0 | |
| 14 | | 2 | 0.7914 | Tails | 1 | 1 | |
| 15 | | 3 | 0.8543 | Tails | 1 | 2 | |
| 16 | | 4 | 0.6902 | Tails | 1 | 3 | |
| 17 | | 5 | 0.3004 | Heads | 2 | 3 | |
| 18 | | 6 | 0.0383 | Heads | 3 | 3 | |
| 19 | | 7 | 0.3883 | Heads | 4 | 3 | |
| 20 | | 8 | 0.6052 | Tails | 4 | 4 | |
| 21 | | 9 | 0.2231 | Heads | 5 | 4 | |
| 22 | | 10 | 0.4250 | Heads | 6 | 4 | |
| 23 | | 11 | 0.3729 | Heads | 7 | 4 | Stop |
| 24 | | 12 | 0.7983 | Tails | 7 | 5 | NA |
| 25 | | 13 | 0.2340 | Heads | 8 | 5 | NA |
| 26 | | 14 | 0.0082 | Heads | 9 | 5 | NA |
| 57 | | 45 | 0.7539 | Tails | 26 | 19 | NA |
| 58 | | 46 | 0.2989 | Heads | 27 | 19 | NA |
| 59 | | 47 | 0.6427 | Tails | 27 | 20 | NA |
| 60 | | 48 | 0.2824 | Heads | 28 | 20 | NA |
| 61 | | 49 | 0.2124 | Heads | 29 | 20 | NA |
| 62 | | 50 | 0.6420 | Tails | 29 | 21 | NA |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| CashAtEndOfGame | D4 |
| Flip | B13:B62 |
| NumberOfFlips | D7 |
| RandomNumber | C13:C62 |
| RequiredDifference | D3 |
| Result | D13:D62 |
| Stop? | G13:G62 |
| TotalHeads | E13:E62 |
| TotalTails | F13:F62 |
| Winnings | D8 |

| | C | D |
|---|---|---|
| 6 | | **Summary of Game** |
| 7 | Number of Flips | =COUNTBLANK(Stop?)+1 |
| 8 | Winnings | =CashAtEndOfGame–NumberOfFlips |

| | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|
| 11 | Random | | Total | Total |
| 12 | Number | Result | Heads | Tails |
| 13 | =RAND() | =IF(RandomNumber<0.5,"Heads","Tails") | =IF(Results="Heads",1,0) | =Flip-TotalHeads |
| 14 | =RAND() | =IF(RandomNumber<0.5,"Heads","Tails") | =E13+IF(Results="Heads",1,0) | =Flip-TotalHeads |
| 15 | =RAND() | =IF(RandomNumber<0.5,"Heads","Tails") | =E14+IF(Results="Heads",1,0) | =Flip-TotalHeads |
| 16 | : | : | : | : |
| 17 | : | : | : | : |

| | G |
|---|---|
| 12 | Stop? |
| 13 | |
| 14 | |
| 15 | =IF(ABS(TotalHeads-TotalTails)>=RequiredDifference,"Stop","") |
| 16 | =IF(G15="",IF(ABS(TotalHeads-TotalTails)>=RequiredDifference,"Stop",""),"NA") |
| 17 | =IF(G16="",IF(ABS(TotalHeads-TotalTails)>=RequiredDifference,"Stop",""),"NA") |
| 18 | : |
| 19 | : |

**图 15.1** 计算机仿真掷币游戏的电子表格模型(例 1)。

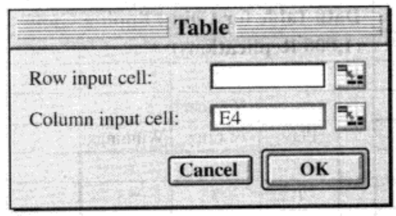
弹出的模拟运算表对话框中(如图 15.2 右下所示),选择任意的一个空白单元格作为列输入单元格(例如,E4),但是不要输入任一个行输入单元格。点击确定然后就会产生如图 15.2 所示的数据表。

| | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Data Table for Coin-Flipping Game | | | | |
| 2 | (14 Replications) | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | Number | | |
| 5 | | Play | of Flips | Winnings | |
| 6 | | | 3 | $5 | |
| 7 | | 1 | 9 | –$1 | |
| 8 | | 2 | 5 | $3 | |
| 9 | | 3 | 7 | $1 | |
| 10 | | 4 | 11 | –$3 | |
| 11 | | 5 | 5 | $3 | |
| 12 | | 6 | 3 | $5 | |
| 13 | | 7 | 3 | $5 | |
| 14 | | 8 | 11 | –$3 | |
| 15 | | 9 | 7 | $1 | |
| 16 | | 10 | 15 | –$7 | |
| 17 | | 11 | 3 | $5 | |
| 18 | | 12 | 7 | $1 | |
| 19 | | 13 | 9 | –$1 | |
| 20 | | 14 | 5 | 3 | |
| 21 | | | | | |
| 22 | | Average | 7.14 | $0.86 | |

Select the whole table (J6:L20) before choosing Table from the Data menu.

| Range Name | Cell |
|---|---|
| NumberOfFlips | D7 |
| Winnings | D8 |

| | K | L |
|---|---|---|
| 4 | Number | |
| 5 | of Flips | Winnings |
| 6 | =NumberOfFlips | =Winnings |




| | J | K | L |
|---|---|---|---|
| 22 | Average | =AVERAGE(K7:K20) | =AVERAGE(L7:L20) |

图 15.2　在图 15.1 所示的电子表格上进行 14 次仿真,仿真结果表示在该数据表中。

当生成数据表时 Excel 要做的第一件事情是在表中第一列(J7:J20)输入数字,在输入单元格 E4 中一次输入一个,这些数字不会直接影响仿真。然而,每次都会输入一个新的数字在输入单元格列,Excel 就会重新计算整个在单元格 C13:G62 中的初始电子表格(图 15.1),然后就会在输出单元格、投掷次数(D7)、赢得的钱(D8)和数据表中相关行中输入结果数据。实质上,我们是让 Excel 重复了 14 次仿真,每次都会在 C 列中产生新的随机数,从而可以进行一次完整的新的仿真。

单元格 K22 表示这 14 场游戏的平均投掷次数是 7.14。这个平均次数提供了隐藏着的玩这种游戏所需投掷次数的概率分布估计值。因此,这个平均数 7.14 可以看作你每玩一次这种游戏平均可以赢 0.86 美元(单元格 L22 表示)。所以,如果你不是极端厌恶冒险的话,应该选择玩这个游戏,而且最好多玩几次。

但是,小心！运用计算机仿真常犯的通病是在过少的样本数据上得出结论,这样会造成数据分析不充足甚至扭曲。因此,使用合格的统计分析员来设计计算机仿真所需要的实验是至关重要的。这种情况下,细致的统计数据分析(运用置信区间等等)表明在做出任何结论之前,必须完成上百次的仿真试验,只有这样才能说明在反复参加这种游戏的情况下,最终你是输还是赢。

在进行了上述的反复试验之后,我们得出成功地参加一次游戏所需要的平均投掷次数是 9(这个平均数可以通过数据分析得出,但是相当不易)。这样,你玩的时间越长,每次输

掉的钱平均为 1 美元。前面的计算机仿真不能得出正确结果的原因是你在每场游戏中输很多的几率很小,但是你决不能每场赢 5 美元以上。然而,14 次仿真游戏是不足以获取判断输赢数据的概率分布的。因为其中只有一场仿真游戏损失了 3 美元以上,损失数为 7 美元。

图 15.3 给出了 1000 次仿真游戏运行的结果(17 行到 1000 行没有给出)。K1008 单元格记录了平均投掷次数是 8.97,非常接近 9。在这样的反复运算下,在 L1008 单元格中得到平均赢钱数为 -0.97 美元,这一结果比前面的更可靠,因此可以说,从长期看,这个游戏不会让你赢钱(可以打赌,赌场事先已经使用计算机仿真证明这一情况了)。

| | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Data Table for Coin-Flipping Game | | | | |
| 2 | (1,000 Replications) | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | Number | | |
| 5 | | Play | of Flips | Winnings | |
| 6 | | | 5 | $3 | |
| 7 | | 1 | 3 | $5 | |
| 8 | | 2 | 3 | $5 | |
| 9 | | 3 | 7 | $1 | |
| 10 | | 4 | 11 | –$3 | |
| 11 | | 5 | 13 | –$5 | |
| 12 | | 6 | 7 | $1 | |
| 13 | | 7 | 3 | $5 | |
| 14 | | 8 | 7 | $1 | |
| 15 | | 9 | 3 | $5 | |
| 16 | | 10 | 9 | –$1 | |
| 1001 | | 995 | 5 | $3 | |
| 1002 | | 996 | 27 | –$19 | |
| 1003 | | 997 | 7 | $1 | |
| 1004 | | 998 | 3 | $5 | |
| 1005 | | 999 | 9 | –$1 | |
| 1006 | | 1,000 | 17 | –$9 | |
| 1007 | | | | | |
| 1008 | | Average | 8.97 | –$0.97 | |

图 15.3 将仿真次数从 14 次增加到 1000 次,得到的数据表与图 15.2 相比,增加了计算机仿真的可信度。

## 例 2:纠正性维修和预防性维修

任重公司(The Heavy Duty Company)刚刚为新的生产流程购买了一台大型机器。这台机器是由一个马达发动的,但这个马达有时会出现故障,需要一次大规模的检修。所以这台机器的生产商同时提供了备用马达。这两个马达可以轮番使用,直到一个马达完全被用坏,由另一个马达来替换。

根据机器的计划使用情况,厂商提供给公司有关机器使用寿命的信息(出现故障前可以使用的天数)。这些信息在表 15.1 中的前两栏中给出。第一栏列出了机器已经使用了的天数,第二栏给出了在当天出现故障的概率。由于除了第 4、5、6 天,其余天数出现故障的概率为 0,所以故障总是会发生在第 4、5、6 天。

幸运的是,检修马达的时间从不超过 3 天,所以当一个马达出现故障时,备用马达就已经到位了。当这种情况发生时,该天的其余时间(加上所需的加班时间)被用来卸除出故障的马达,并装上备用马达,所以第二天一早机器就可以正常运行了。

**表 15.1　任重公司所买马达损坏的概率分布和相关随机数**

| 天　数 | 故障出现概率 | 对应随机数 |
|---|---|---|
| 1,2,3 | 0 | |
| 4 | 0.25 | 0.0000 到 0.2499 |
| 5 | 0.5 | 0.2500 到 0.7499 |
| 6 | 0.25 | 0.7500 到 0.9999 |
| 7 或更多 | 0 | |

每个替换周期（开始替换一个马达到需要替换另一个马达之间的时间）发生的平均成本总结如下：

| 从发生故障开始的一个替换周期的成本（美元） | |
|---|---|
| 替换一个马达 | 2000 |
| 替换时所损失产量的成本 | 5000 |
| 检修一个马达的费用 | 4000 |
| 总计 | 11000 |

**运用计算机仿真**

可以用计算机仿真来估计平均每天替换马达所需的成本。这需要用随机数来确定模拟过程中故障发生的时间。使用表 15.1 第二栏中的概率，有 25% 的随机数与第 4 天出现故障有关，50% 的随机数与第 5 天有关，其余 25% 与第 6 天有关。表 15.1 的右半部分给出了表示这一概率事件的最常用的方法。

Excel 为随机数与相关事件的联系提供了一个简便的函数 VLOOKUP。图 15.4 表示了 Excel 是如何工作的。第一步，建立如图所示的 I、J 和 K 栏，其中 K 和 I 栏直接由表 15.1 的前两栏得出。J 栏给出了 K 栏所示天数时的累计概率值，所以 J8 = I7，J9 = I7 + I8。J7：K9 单元格为 VLOOKUP 函数建立了一张查找表。图的底部显示了 VLOOKUP 命令是如何写入 D 列的。函数的第一个自变量表示和随机数（C5：C34）相同行的单元格提供了使用的随机数。第二个自变量确定了查找表的范围。第三个自变量（2）表示查找表的第 2 列提供了 D 列单元格中的数据。查找表第 2 列中的数字选择是基于随机数是否在该表第一列各行数据的范围内。三种可能的选项分别为：

> 单元格 J7：K9 中的查找表提供了随机数和故障发生时间的相关性。

如果 $0 \leq$ RAND( ) $< 0.25$ 选择 4 天
如果 $0.25 \leq$ RAND( ) $< 0.75$ 选择 5 天
如果 $0.75 \leq$ RAND( ) $< 1$ 选择 6 天

以上在表 15.1 中已表示清楚了。

在图 15.4 的 D 列中产生了 30 个模拟的故障，E、F 和 G 列分别显示了对应的累积天数、每次替换周期估计成本和相应的累积成本（在更精确的计算机仿真过程中，可以产生随机数算出每次故障成本）。由于在这个仿真过程的天数总计是 153（E34 单元格），累积成本（G34 单元格）是 330000 美元，平均每天的成本在 J34 单元格中计算出：

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Heavy Duty Company Corrective Maintenance Simulation | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Random | Time Since Last | Cumulative | | Cumulative | | Distribution of | | |
| 4 | | Breakdown | Number | Breakdown | Day | Cost | Cost | | Time between Breakdowns | | |
| 5 | | 1 | 0.7142 | 5 | 5 | $11,000 | $11,000 | | | | Number |
| 6 | | 2 | 0.4546 | 5 | 10 | $11,000 | $22,000 | | Probability | Cumulative | of Days |
| 7 | | 3 | 0.3142 | 5 | 15 | $11,000 | $33,000 | | 0.25 | 0 | 4 |
| 8 | | 4 | 0.1722 | 4 | 19 | $11,000 | $44,000 | | 0.5 | 0.25 | 5 |
| 9 | | 5 | 0.0932 | 4 | 23 | $11,000 | $55,000 | | 0.25 | 0.75 | 6 |
| 10 | | 6 | 0.3645 | 5 | 28 | $11,000 | $66,000 | | | | |
| 11 | | 7 | 0.1636 | 4 | 32 | $11,000 | $77,000 | | Breakdown Cost | $11,000 | |
| 12 | | 8 | 0.7572 | 6 | 38 | $11,000 | $88,000 | | | | |
| 13 | | 9 | 0.3067 | 5 | 43 | $11,000 | $99,000 | | | | |
| 14 | | 10 | 0.9520 | 6 | 49 | $11,000 | $110,000 | | | | |
| 30 | | 26 | 0.8548 | 6 | 131 | $11,000 | $286,000 | | | | |
| 31 | | 27 | 0.7464 | 5 | 136 | $11,000 | $297,000 | | | | |
| 32 | | 28 | 0.9781 | 6 | 142 | $11,000 | $308,000 | | | | |
| 33 | | 29 | 0.6584 | 5 | 147 | $11,000 | $319,000 | | | Average Cost per Day | |
| 34 | | 30 | 0.8829 | 6 | 153 | $11,000 | $330,000 | | | $2,157 | |

| | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | Random | Time Since Last | Cumulative | | Cumulative |
| 4 | Number | Breakdown | Day | Cost | Cost |
| 5 | =RAND() | =VLOOKUP(RandomNumber,$J$7:$K$9,2) | =TimeSinceLastBreakdown | =BreakdownCost | =Cost |
| 6 | =RAND() | =VLOOKUP(RandomNumber,$J$7:$K$9,2) | =E5+TimeSinceLastBreakdown | =BreakdownCost | =G5+Cost |
| 7 | =RAND() | =VLOOKUP(RandomNumber,$J$7:$K$9,2) | =E6+TimeSinceLastBreakdown | =BreakdownCost | =G6+Cost |
| 8 | : | : | : | : | : |
| 9 | : | : | : | : | : |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| AverageCostPerDay | J34 |
| Breakdown | B5:B34 |
| BreakdownCost | J11 |
| Cost | F5:F34 |
| CumulativeCost | G5:G34 |
| CumulativeDay | E5:E34 |
| RandomNumber | C5:C34 |
| TimeSinceLastBreakdown | D5:D34 |

| | J |
|---|---|
| 33 | Average Cost per Day |
| 34 | =CumulativeCost/CumulativeDay |

**图 15.4** 对任重公司的马达实行纠正性维护的计算机仿真电子表格模型。

$$\text{平均每天成本} = \frac{330000\text{ 美元}}{153} = 2157\text{ 美元}$$

**与例 1 比较**

与掷币游戏中的计算机仿真相比,例 2 的计算机仿真有一些有趣的差别。在掷币游戏中,IF 函数是用来根据随机数产生模拟的硬币的正反面(见图 15.1 中 D 列单元格中的等式),而在这个例子中,VLOOKUP 函数则是用来产生模拟的结果。实际上,VLOOKUP 函数可以用来模拟掷币,但 IF 函数相对更容易。反之,IF 函数也可以用在例 2 中,但 VLOOKUP 函数更简便。IF 函数一般用来产生只有两个值的概率分布的随机数,而 VLOOKUP 则用来产生有两个以上值的概率分布。

第二个区别是两种计算机仿真重复的记录方法不同。对掷币游戏来讲,一次模拟游戏需要用如图 15.1 中所示的 62 行空白表格。所以,将同一张电子表格上多次运行的结果记录下来就产生了图 15.2 的数据表,每次重复运行的结果在该表格的一行中表示出。而对于

例 2,无需这种单列的数据表,因为每次重复运行的结果都可以在如图 15.4 表格的每一行中显示出来。

然而,两个例子也有相似之处:两个例子都有意简化了,这样就可以相对容易地对仿真结果与求出的解析解进行比较分析。实际上,对于当前的任重公司问题的解析解直接就可以求出。运用表 15.1 给出的概率,故障发生的期望天数是:

$$E(\text{到故障发生为止的时间}) = 0.25(4\text{ 天}) + 0.5(5\text{ 天}) + 0.25(6\text{ 天}) = 5\text{ 天}$$

所以,每天的期望成本(从统计学的角度看)是:

$$E(\text{每天的成本}) = \frac{11000\text{ 美元}}{5\text{ 天}} = 2200\text{ 美元/天}$$

由计算机仿真得出每天平均成本为 2157 美元(图 15.4 中的 J34 单元格所示)是对这个实际期望值的估计。

计算机仿真在任重公司的问题上没有实际作用的事实表明了运用这种技术可能的陷阱。计算机仿真的运用相当简单,这使得人们常会惯性地去用这种技术,而不去仔细地考虑问题,实际上,在处理一些问题时,只要先仔细地考虑和分析一下,就可以获得比计算机仿真更精确的信息(可能还会更快)。在其他的一些问题中,通过简单的分析模型,获得对问题较为深入的认识,从而可以大为方便地设计出更精确的计算机仿真模型。

**一些预防性维护的方案**

至今为止,我们一直假设该公司使用纠正性维护政策,这意味着机器里的马达只有在出现故障后才被检修。然而,许多公司使用的是预防性维护。这种政策包括了甚至在故障尚未发生时在特定时间将马达卸除、进行检修的计划。其目标是为了防止故障而尽早采取维护措施。对检修机器进行规划,就可以在机器不被使用的时候检修机器,从而不会中断生产。比如,可以在正常的工作结束之后,支付加班费用而将马达拆除,进行检修,而第二天早上开工的时候,马达已经检修好并安装上。采取这种方法,一种可能的安排就是在第三天正常工作结束后做这项工作,这样可以及时防止故障发生。其他选择还可以在第四天、第五天末(如果故障尚未发生)拆马达以防故障发生影响未来的生产。在这种情况下,如果无法获得问题的解析解,就可以用计算机仿真来测评和比较每个选项(与纠正性维护一起)。

让我们来考虑在第三天末拆下马达检修的方案。每次平均成本如下所示:

| 故障尚未发生时开始替换的一个替换周期的成本(美元) | |
|---|---|
| 加班拆马达费用 | 3000 |
| 替换期间损失的生产 | 0 |
| 故障发生前检修马达费用 | 3000 |
| 总计 | 6000 |

由于每三天发生的总共成本为 6000 美元,该选项的每天期望成本为:

$$E(\text{每天的成本}) = \frac{6000\text{ 美元}}{3\text{ 天}} = 2000\text{ 美元/天}$$

由于该成本可以直接分析计算出，计算机仿真在这种情况下就没有用武之地。

现在考虑余下的两种拆卸方案，即在机器尚未发生故障的第四天和第五天进行检修。在这种情况下，我们就无法求得该问题的解析解，因而就要使用计算机仿真了。对于任何一种情况，一个替换周期的平均成本都取决于是在故障发生之前还是之后进行检修。根据前面的介绍，平均成本分别是：

$$\text{故障发生后才替换的成本} = 11000 \text{ 美元}$$
$$\text{故障尚未发生就替换的成本} = 6000 \text{ 美元}$$

图 15.5 显示了计算机仿真的第四天替换马达的计划方案。没有经过拆卸，直到连续的 30 个马达出现故障前所需的时间可以从 D 列中获得（15 ~ 29 行被隐藏了）。这个例子（表示在第四天发生故障）中马达被替换前与马达产生故障相对应的时间是 4 天（它们发生在第 6、9、13 ~ 14 行和隐藏行中的五个）。第一次完全替换周期，如第 5 行所示，由 4 天后替换第一个马达开始。G 列给出了每次循环开始时的积累天数。F 列显示每一循环是以故障开始时还是以故障尚未发生前的马达替换开始。H 列给了对应的成本。I 列对前面的成本进行累加。由于这 30 次循环持续 120 天时间（G34 单元格），总计成本 225000 美元（I34 单元格），仿真产生的结果如下：

$$\text{平均每天成本} = \frac{225000 \text{ 美元}}{120} = 1875 \text{ 美元}$$

这是在这一检修方案下的每天期望成本的估计值（实际上每天成本为 1812 美元）。

图 15.6 显示计算机仿真的第五天末计划替换马达的方案。这样，如果故障发生的时间是第 6 天（D 列中所示），替换可以及时防止故障的发生（F 列表示）。由于 D 列大多数的时间是 4 或 5 天，所以多数循环是以故障开始的。这就造成了 30 次循环的总计成本更高，达 300000 美元，而且总计时间也相对更长，共 141 天。所以这一方案的每天期望成本是：

$$\text{平均每天成本} = \frac{300000 \text{ 美元}}{141} = 2128 \text{ 美元}$$

（实际上每天为 2053 美元）。

根据上述的结果，最节省的方案就是在第四天末替换马达，因为其每天的期望成本只有 1875 美元。这一成本是图 15.5 所示的电子表格模型仿真产生的估计值，虽然估计值比实际值要高出 63 美元，但这个方案仍然是最廉价的。

在实际运用中，为了获得更精确的选择方案的估计值，计算机仿真模型通常要比本书中的图 15.4、图 15.5 和图 15.6 复杂得多。模型会包括更多的细节，例如故障在一天中的哪段时间发生以及当天损失的生产价值。

例 1 和例 2 都使用有离散概率分布的随机数来产生随机的观察结果。然而，许多计算机仿真要求由连续概率分布的随机数产生随机的观察结果。下面介绍由连续或离散概率分布的随机数产生随机效果的一般方法。

## 根据概率分布产生随机观察结果

用来产生这种随机观察的方法被称为反向转换法。为了解释和运用这种方法，先介绍一些使用到的符号：

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Heavy Duty Company Preventive Maintenance Simulation (Replace After 4 Days) | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | Distribution of | | |
| 3 | | | Random | Time Until | Scheduled Time | Event That | Cumulative | | Cumulative | | Time between Breakdowns | | |
| 4 | | Cycle | Number | Breakdown | Until Replacement | Concludes Cycle | Day | Cost | Cost | | | | Number |
| 5 | | 1 | 0.7861 | 6 | 4 | Replacement | 4 | $6,000 | $6,000 | | Probability | Cumulative | of Days |
| 6 | | 2 | 0.0679 | 4 | 4 | Breakdown | 8 | $11,000 | $17,000 | | 0.25 | 0 | 4 |
| 7 | | 3 | 0.9296 | 6 | 4 | Replacement | 12 | $6,000 | $23,000 | | 0.5 | 0.25 | 5 |
| 8 | | 4 | 0.4430 | 5 | 4 | Replacement | 16 | $6,000 | $29,000 | | 0.25 | 0.75 | 6 |
| 9 | | 5 | 0.1223 | 4 | 4 | Breakdown | 20 | $11,000 | $40,000 | | | | |
| 10 | | 6 | 0.4530 | 5 | 4 | Replacement | 24 | $6,000 | $46,000 | | | | |
| 11 | | 7 | 0.3972 | 5 | 4 | Replacement | 28 | $6,000 | $52,000 | | Breakdown Cost | $11,000 | |
| 12 | | 8 | 0.9289 | 6 | 4 | Replacement | 32 | $6,000 | $58,000 | | Replacement Cost | $6,000 | |
| 13 | | 9 | 0.2195 | 4 | 4 | Breakdown | 36 | $11,000 | $69,000 | | | | |
| 14 | | 10 | 0.0706 | 4 | 4 | Breakdown | 40 | $11,000 | $80,000 | | Replace After | 4 | days |
| 30 | | 26 | 0.8720 | 6 | 4 | Replacement | 104 | $6,000 | $201,000 | | | | |
| 31 | | 27 | 0.8902 | 6 | 4 | Replacement | 108 | $6,000 | $207,000 | | | | |
| 32 | | 28 | 0.3839 | 5 | 4 | Replacement | 112 | $6,000 | $213,000 | | | | |
| 33 | | 29 | 0.7404 | 5 | 4 | Replacement | 116 | $6,000 | $219,000 | | | Average Cost per Day | |
| 34 | | 30 | 0.7264 | 5 | 4 | Replacement | 120 | $6,000 | $225,000 | | | $1,875 | |

| | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|
| 3 | Random | Time Until | Scheduled Time | Event That |
| 4 | Number | Breakdown | Until Replacement | Concludes Cycle |
| 5 | =RAND() | =VLOOKUP(RandomNumber,$L$7:$M$9,2) | =ReplaceAfter | =IF(TimeUntilBreakdown<=ScheduledTimeUntilReplacement,"Breakdown","Replacement") |
| 6 | =RAND() | =VLOOKUP(RandomNumber,$L$7:$M$9,2) | =ReplaceAfter | =IF(TimeUntilBreakdown<=ScheduledTimeUntilReplacement,"Breakdown","Replacement") |
| 7 | =RAND() | =VLOOKUP(RandomNumber,$L$7:$M$9,2) | =ReplaceAfter | =IF(TimeUntilBreakdown<=ScheduledTimeUntilReplacement,"Breakdown","Replacement") |
| 8 | : | : | : | : |
| 9 | : | : | : | : |

| | G | H | I |
|---|---|---|---|
| 3 | Cumulative | | Cumulative |
| 4 | Day | Cost | Cost |
| 5 | =MIN(D5,E5) | =IF(Event="Breakdown",BreakdownCost,ReplacementCost) | =Cost |
| 6 | =G5+MIN(D6,E6) | =IF(Event="Breakdown",BreakdownCost,ReplacementCost) | =I5+Cost |
| 7 | =G6+MIN(D7,E7) | =IF(Event="Breakdown",BreakdownCost,ReplacementCost) | =I6+Cost |
| 8 | : | : | : |
| 9 | : | : | : |

| | L |
|---|---|
| 33 | Average Cost per Day |
| 34 | =CumulativeCost/CumulativeDay |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| AverageCostPerDay | L34 |
| BreakdownCost | L11 |
| Cost | H5:H34 |
| CumulativeCost | I5:I34 |
| CumulativeDay | G5:G34 |
| Cycle | B5:B34 |
| Event | F5:F34 |
| RandomNumber | C5:C34 |
| ReplaceAfter | L14 |
| ReplacementCost | L12 |
| ScheduledTimeUntilReplacement | E5:E34 |
| TimeUntilBreakdown | D5:D34 |

**图 15.5**　任重公司的马达在 4 天后替换的预防性维护的计算机仿真电子表格模型。

$r$ 表示随机数

$F(x)$ 为累积分布函数（CDF），由此来产生一次随机观察。这样，对于任意 $x$ 值，$F(x)$ 表示的是小于或等于 $x$ 的概率。

例如，图 15.7 表示了一个随机数，$r = 0.5271$，也描绘出在任意的概率分布的情况下，$F(x)$ 与 $x$ 的关系。

每次随机数的产生需要下面的两个步骤。

## 反向转换法

1. 产生随机数 $r$。

2. 找出 $F(x)=r$ 的 $x$ 值。$x$ 就是在这一概率分布下得到的随机观察值。

> 图 15.7 中的随机观察值是 $F(x)=r$ 的 $x$ 对应值。

图 15.7 表示了这一方法的图解应用。在纵轴中标出 $r$ 值，以该点为起点作水平直线与 $F(x)$ 曲线相交，过交点再作横轴的垂线，交横轴于一点。这一点的 $x$ 值就是所需的随机观察值，因为此时 $x$ 的值满足 $F(x)=r$。

虽然图 15.7 表示的是连续的概率分布，同样可以用反向转换法产生离散概率分布的随机观察数。例如，考虑表 15.1 表示的例 2，该例子服从的是离散概率分布。由于马达在第 4,5 和 6 天出现故障的概率分别是 0.25,0.5 和 0.25。累积分布函数如图 15.8 所示。用随机数 $r=0.8138$ 就可以产生故障发生在第 6 天的随机观察。

Excel 的 VLOOKUP 函数是专门为反向转换法解决离散分布而设计的。该函数同样可以用在连续的概率分布上，只要输入一张与分布极为近似的扩展的查找表就可以实现这一点。

对一般的连续分布，等式 $F(x)=r$ 可以解出 $x$ 相应的解析解。在这种情况下，Excel 通过反向转换法可以快速产生这些分布的随机观察数。平均分布和指数分布就是两个例子。我们将会在下一节的案例中介绍这两种分布的反向转换法。

然而，当 $F(x)$ 是相对较复杂的函数时，反向转换法就很难运用，比如正态分布的函数。解决这类问题的方法是对 VLOOKUP 函数输入扩展的查找表。但是，因为正态分布函数非常重要，所以人们必须开发出针对这种函数的更简便的产生随机观察数的

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Heavy Duty Company Preventive Maintenance Simulation (Replace After 5 Days) | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Random | Time Until | Scheduled Time | Event That | Cumulative | | Cumulative | | Distribution of | | |
| 4 | | Cycle | Number | Breakdown | Until Replacement | Concludes Cycle | Day | Cost | Cost | | Time between Breakdowns | | |
| 5 | | 1 | 0.0558 | 4 | 5 | Breakdown | 4 | $11,000 | $11,000 | | | | Number |
| 6 | | 2 | 0.0690 | 4 | 5 | Breakdown | 8 | $11,000 | $22,000 | | Probability | Cumulative | of Days |
| 7 | | 3 | 0.1889 | 4 | 5 | Breakdown | 12 | $11,000 | $33,000 | | 0.25 | 0 | 4 |
| 8 | | 4 | 0.9471 | 6 | 5 | Replacement | 17 | $6,000 | $39,000 | | 0.5 | 0.25 | 5 |
| 9 | | 5 | 0.9173 | 6 | 5 | Replacement | 22 | $6,000 | $45,000 | | 0.25 | 0.75 | 6 |
| 10 | | 6 | 0.3541 | 5 | 5 | Breakdown | 27 | $11,000 | $56,000 | | | | |
| 11 | | 7 | 0.7035 | 5 | 5 | Breakdown | 32 | $11,000 | $67,000 | | Breakdown Cost | $11,000 | |
| 12 | | 8 | 0.0350 | 4 | 5 | Breakdown | 36 | $11,000 | $78,000 | | Replacement Cost | $6,000 | |
| 13 | | 9 | 0.5755 | 5 | 5 | Breakdown | 41 | $11,000 | $89,000 | | | | |
| 14 | | 10 | 0.8910 | 6 | 5 | Replacement | 46 | $6,000 | $95,000 | | Replace After | 5 | days |
| 30 | | 26 | 0.7386 | 5 | 5 | Breakdown | 122 | $11,000 | $261,000 | | | | |
| 31 | | 27 | 0.2648 | 5 | 5 | Breakdown | 127 | $11,000 | $272,000 | | | | |
| 32 | | 28 | 0.6239 | 5 | 5 | Breakdown | 132 | $11,000 | $283,000 | | | | |
| 33 | | 29 | 0.9988 | 6 | 5 | Replacement | 137 | $6,000 | $289,000 | | | Average Cost per Day | |
| 34 | | 30 | 0.0061 | 4 | 5 | Breakdown | 141 | $11,000 | $300,000 | | | $2,128 | |

图 15.6 5 天后替换马达的电子表格模型，该图是在修改图 15.5 的基础上作出的。

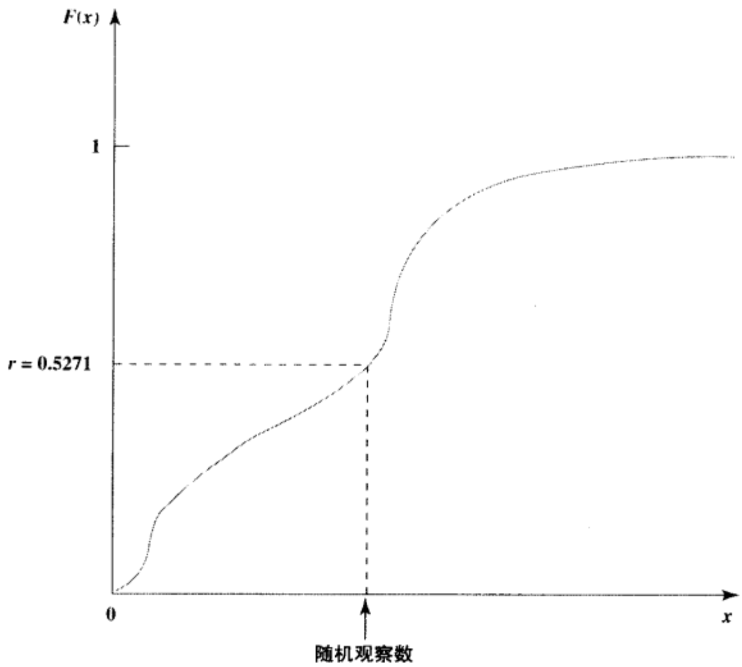



图 15.7　从一任意给定的概率分布，说明如何运用反向转换法获得随机观察数。

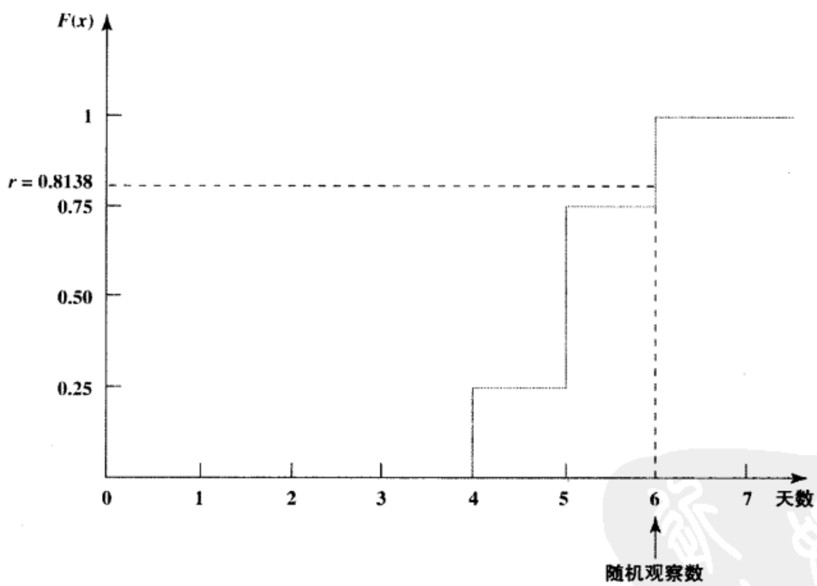



图 15.8　在表 15.1 给出的例 2 离散概率分布中运用反向转换法获得随机观察数。

方法。Excel 使用下面的函数

> 这是一个很有用的 Excel 函数，它可以从正态分布中生成随机观察数。

$$\text{NORMINV}(\text{RAND}(\,),\mu,\sigma)$$

来解决这个问题。$\mu$ 代表均值，$\sigma$ 表示分布的标准差。

## 问题回顾

1. 计算机是如何模拟随机系统运作的?
2. 为什么计算机仿真是相对较为昂贵的运行过程?
3. 虽然计算机仿真运行代价较高,但何时适用计算机仿真?
4. 什么是随机数? 运用它的目的是什么?
5. 运用反向转换法的目的是什么? 它的两个步骤是什么?

## 15.2 案例研究:赫尔卡特理发店(再次研究)

如果你已经学习了上一章,希望你还记得在14.1节段落中曾简要描述过的赫尔卡特理发店的案例,它是排队问题中一种最基本的类型(排队系统是指顾客获得服务者提供的需要排队等待的某种服务)。前面提到,赫尔卡特是一名德国理发师,他独自经营一家理发店,从周一至周五的每天早上8点开始营业,平均每小时两个顾客,每次理发需要20分钟。

这个案例研究的问题详述如下。

### 赫尔卡特面对的决策

赫尔卡特理发店已经在同一地点营业了将近25年了,虽然他的父母曾经希望他继承父业当个医生,但他从来没有后悔选择这个简朴的工作,他喜欢这种轻松的工作环境,有规律的作息时间,而且有机会到他的顾客家里聊天。

经过这些年,他已经建立了一个忠实的顾客群,他是一个以自己的职业为荣的好理发师。随着生意的发展,顾客现在经常要等候一段时间(有时要超过半小时)才能轮到理发。尽管如此,他的老顾客们还是愿意等。

理发店所在的城市发展迅速,人们的生活节奏也在加快,赫尔卡特已经注意到新顾客的回头率已远不如以前。尤其当他们不得不等候很长时间的时候。他认为这是由于人们等待容忍度的递减所致。由于没有吸引更多的新顾客,所以他的生意一直维持在每小时两个人的水平上。

随着年龄的增长,赫尔卡特越来越多地在考虑增加一个助手来分担工作量。当然他自己也喜欢有人相伴,并且可以增加工作的弹性。增加一个理发师可以大大减少客户的等待时间,因此增加的业务量将会产生额外的收益。

然而,害怕个人收入的下降一直是赫尔卡特不敢增加助手的忧患所在。他需要为退休以后的生活积攒一大笔钱,况且他也不能承受原本就不算富裕的收入严重减少的后果。考虑到他需要付给一位助手的工资和佣金,生意量要增加到现在的两倍才能保持自己当前的收入水平(我们将在具体分析时,说明财务上的细节问题)。他对生意量能否增加这么多表示怀疑。

但是,现在机会已经送上门了。一位在此城的同行(也是朋友)决定退休并且关掉自己的理发店。这位朋友身边有位小伙子几年来一直是他的助手,现在他建议赫尔卡特雇用这个年轻人,这位朋友极力推荐他,并且指出这个助手可以为赫尔卡特带来许多生意。

就这样,赫尔卡特陷入了困惑中,不知是否需要雇用这位助手。

幸运的是,此时有人可以帮助他做这个决定。赫尔卡特的那位朋友给他看了最近刊登在《理发师杂志》上的一篇文章,文章指出调查表明的在理发店中顾客愿意等候的时间,并

且总结了两条实际经验:

**实际经验一:**在一家拥有长期顾客群、经营不错的理发店中,那些忠实的顾客一般愿意等 20 分钟。

赫尔卡特感到这条正合适自己的情况,虽然他从来没有估计过顾客等待的时间,但是他认为平均 20 分钟是符合实际情况的。

**实际经验二:**在一家经营良好的理发店里,新顾客一般愿意等待 10 分钟左右(如果超过这个时间,他们以后会另找别家)。

赫尔卡特感到这条实际经验也符合他自己的经历。

第二条经验为赫尔卡特考虑他的决定提供了很好的帮助。以他现有的顾客量,增加一个助手势必将他们等待的时间减少到 10 分钟以内。这种快捷的服务会逐渐吸引和保住新的顾客(包括那位助手以前店里的一些顾客)。按照这条经验,当每位顾客平均等待的时间减少到 10 分钟左右时,生意量就会增加。预计在那样的营业水平下,理发店和赫尔卡特的收入都会达到一个新的水准。但他现在的困境是不知怎样预计出这个新的营业水平。

赫尔卡特向他的侄子弗里特茨(Fritz)(一名主修商科的大学生)征求意见,以便走出这个困境。弗里特茨兴奋地告诉他,自己知道应该使用一种正确方法——计算机仿真的方法。

弗里特茨最近在进修管理科学课程,他有管理科学课件的拷贝,包括用来模拟理发店排队系统的排队仿真器。尽管这一仿真器不像有些执行计算机仿真的昂贵的商业软件那样复杂,但弗里特茨也可以运用这一仿真服务器进行仿真,从而向他叔叔解释增加一个助手后的营业水平会达到怎样的估计值。

弗里特茨提议和他的叔叔一起花些时间来收集数据,并设计了一个仿真模型,为执行计算机仿真做准备。他的第一项仿真是当前经营模式下(没有助手)的理发店,估计出当前的平均等待时间。比较这项仿真的结果与理发店实际的平均情况,还可以帮助测试仿真模型的有效性。如果有必要,可以将模型调试到更接近实际的情况。接下来仿真的是理发店有了一位助手之后的经营情况,这一仿真中假设该助手的理发速度与赫尔卡特相同。用不同的顾客到达时间分布进行仿真试验,以测试出何种均值(即何种营业水平)可以使理发前的平均等待时间达到 10 分钟。

弗里特茨询问他叔叔是否应该进行这项计划,赫尔卡特催促他立即设法去做。

这一节的下面部分将描述这一计划是如何实施的,包括仿真运行的机理,下一节会给出实际的计算机仿真结果以及赫尔卡特如何进行分析。

## 收集数据

和其他基本的排队系统一样,这家理发店的主要事件就是服务(理发)结束和顾客到达。表 14.1(在 14.1 节中)记录了在一个特定的早上这些事件的发生时间。图 14.2 通过把系统中顾客的数量绘成曲线(一种基本的运营参数),将同一早上获得的这些数据以另一种形式表现出来。

通过对理发店进行一段更长时间的考察,能收集到更广泛的同类型数据用以模拟在当前经营模式下理发店的各种运营参数。然而,并不需要用几个月或几年的时间来收集这些数据。因为,一旦建立计算机仿真模型,我们就能在几秒钟的时间里获得原来需要很长时间(甚至几年的时间)才能采集到的数据。尽管如此,要执行计算机仿真,首先还需要收集一些其他数据。

特别要指出的是,估计一些随机事件(理发结束和顾客到达时间)的概率分布是有必要的。这些概率分布包括了服务时间的分布(理发一次需要的时间)和顾客相继到达的时间

分布(前后两个顾客到达的间隔时间)。

赫尔卡特发现为每个顾客理发所需时间根据头发的数量、所需的发型不同,分别为15到25分钟不等。如下面的分布所示:

**服务时间的预计分布**:在15到25分钟之间的平均分布。

图15.9标出了该分布的累积分布函数(CDF)。

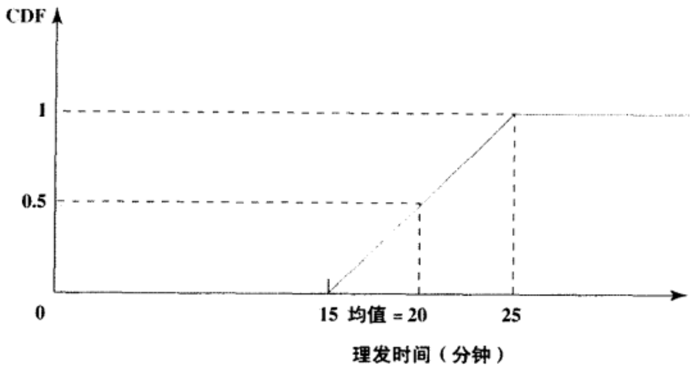



图15.9 赫尔卡特理发时间(以分钟计算)的累计分布函数,在任何一点上累积分布函数都会给出所有的理发时间等于或小于这一时间长度的概率。

既然理发店的顾客随机到达,在14.1节中已经指出理发店的顾客到达时间为指数分布。

**顾客相继到达时间的预计分布**:均值为30分钟的指数分布(14.1节中描述)。

图14.3(14.1节)描述了该指数分布的形状,以分为单位,均值为30的指数分布的累积分布函数如下所示:

$$P(\text{顾客到达时间间隔} \leqslant x) = 1 - e^{-x/30} \qquad (x \geqslant 0)$$

如图15.10所示(记住e的数值略大于2.718)。图中的垂直虚线表示顾客的平均到达时间是30分钟,而水平虚线表示的是不超过此一平均值的概率是0.632。

## 根据概率分布产生随机观察数

理发店运营的计算机仿真要求根据图15.9和图15.10中所示的概率分布产生一系列的随机观察数。通常都是使用随机数来实现这一点的。但是,由于这些概率分布是连续的,所以在例1和例2中表述的使用随机数的离散分布方法并不方便(分别用Excel中的IF和VLOOKUP函数)。取而代之的是如15.1最后所介绍的直接运用反向转换法。

> 在得到随机数 $r$ 后,反向转换法可以解出方程 $F(x)=r$ 从而求得相应的随机观察数 $x$。

图15.11表示的是用图解法来表示如何根据图15.9中给出的概率分布产生随机观察数,图15.9中给出的概率分布是赫尔卡特理发时间的概率分布。在这一情况下,随机数碰巧为 $r=0.7270$。根据15到25的均匀分布产生的随机观察数为22.27。

这样的图解法对计算机仿真来说不很简便,所以用反向转换这一代数方法来解决问题。后一种方法的求解程序包括了用代数方法算出 $F(x)=r$ 的 $x$ 值。例如,图15.11中所示的 $F(x)$ 的公式是:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x \leqslant 15\\ \dfrac{x-15}{10} & 15 \leqslant x \leqslant 25\\ 1 & x \geqslant 25\end{cases}$$

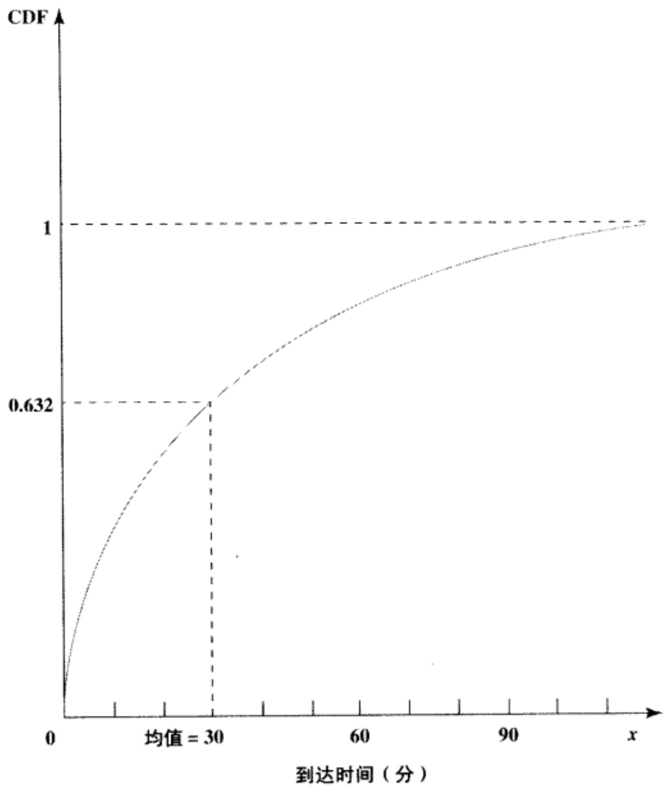



**图** 15.10　赫尔卡特理发店的顾客到达时间（以分钟计算）的累积分布函数，在任何一点上累计分布函数都会给出相应的顾客到达时间等于或小于这一时间长度的概率。

因此，$F(x)=r$ 的等式就可以表示为：

$$\frac{x-15}{10}=0.7270$$

所以，

$$x-15=10(0.7270)=7.27$$
$$x=15+7.27=22.27$$

在使用 Excel 时，表示根据均匀分布获得随机观察数的等式必须以下面的形式输入单元格：

$$=15+10*\mathrm{RAND}(\,)$$

> 来自$(a,b)$区间均匀分布的随机观察数的等式是 $=a+(b-a)$RAND( )。

对于范围在 15 到 25 的一个均匀分布，用于该等式的最低界限是 15，两者之间的差距是 10。

虽然指数分布要比均匀分布更复杂，但它既可以用图解法又可用代数式的反向转换法来求解。图 15.12 表示了图 15.10 指数分布的图解法过程（赫尔卡特理发店顾客到达时间的分布）。这种情况下，随机数 $r=0.8130$。经过仔细地绘制图表得出了 50.30 这个非常近似的随机观察数。

就像图 15.10 中所示，该分布的累积分布函数是：

$$F(x)=1-\mathrm{e}^{-x/30}\qquad x\geqslant 0$$

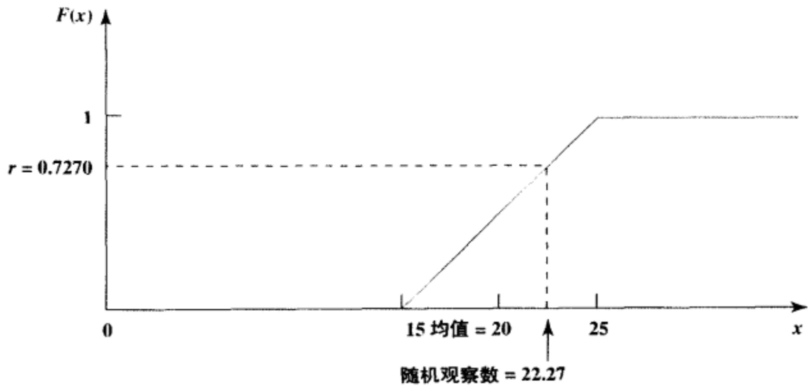



图 15.11 运用反向转换法根据 15 到 25 分钟间均匀分布产生随机观察数(见图 15.9,这一概率分布表示的是赫尔卡特以分计的理发时间分布)。

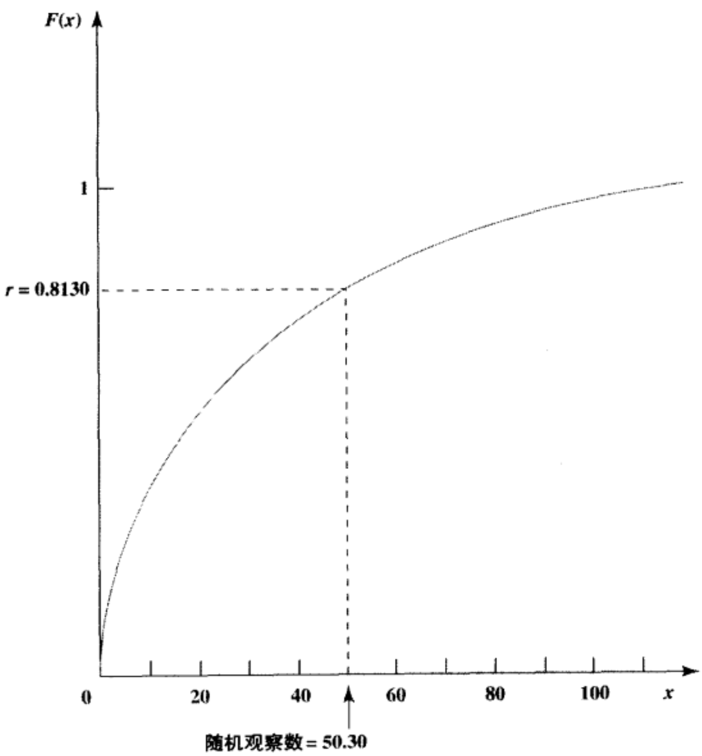



图 15.12 运用反向转换法根据顾客到达时间均值为 30 分钟的指数分布获得随机观察数(见图 15.10,这一分布表示的是顾客到达的时间)。

所以,用代数法必须求解出下面的等式:

$$1 - e^{-x/30} = 0.8130$$

首先,

$$1 - 0.813 = e^{-x/30}$$

所以,

$$e^{-x/30}=0.187$$

较为技巧的一步是在两边取对数,

$$\ln e^{-x/30}=\ln 0.187$$

由于 ln0.187 = −1.67665,e 的自然对数的任意次幂就等于幂数,所以等式可以简化成:

$$-x/30=-1.67665$$

所以,在这次随机观察中:

$$x=30(1.67665)=50.30$$

同样,Excel 中由任意随机数产生的随机观察数的等式是:

= −30 * LN(1 − RAND())

由于 1 − RAND()也是随机数,通常用下面的等式来代替这个随机数:

= −30 * LN(RAND())

对于一个均值不同的指数分布,在这个式子中用它的均值来代替 30。

> 通过用其他的均值来代替 30,这个 Excel 公式可以用来生成任何一个指数分布的随机观察数。

## 随机系统计算机仿真模型的主要组成部分

概率分布的种类很多,该案例研究表明了计算机仿真随机系统的过程中会遇到的一些复杂问题。在处理较复杂系统的计算机仿真问题时,建立一个正式的仿真模型可能会非常有用。

**仿真模型**是对被模拟系统的表述,同时也表明了计算机仿真是如何进行的。

以下是典型的随机系统计算机仿真模型的建模步骤:

1. 介绍系统的主要组成,包括它们如何运行和相互联系。
2. 仿真时钟。
3. 系统状态的定义。
4. 随机产生模拟事件的方法。
5. 当某一事件发生时,改变系统状态的方法。
6. 推进仿真时钟的过程。

下面我们会用具体案例来解释每一个步骤。

14.1 中叙述的赫尔卡特理发店问题是一个单服务器排队系统的例子。系统的组成元素是顾客、队列和作为服务者的赫尔卡特(队列由排队等待理发的顾客所组成)。图 15.9 和图 15.10 分别呈现了假设的服务时间和顾客相继到达时间的分布。

一旦计算机仿真执行时,就有必要记录系统运行的时间。由零开始计时,令:

$t$ = 当前的仿真时间

计算机程序中的变量 $t$ 即仿真时钟。随着仿真程序的运行，仿真时钟的值不断地推进。由于现在计算机功能强大，它所模拟的时间要比现实中的时间快上百万倍。

在赫尔卡特这个案例中，仿真时钟记录了从早上 8 点开始营业起到现在为止的时间（以分钟计算）。每过新的一天仿真程序就会重新模拟理发店的运营情况（下一节描述了弗里特茨在这一点上所做的简化假设）。只需短短的运行时间就可以仿真几年的运营。

**系统状态**就是定义当前系统状况的主要信息。就赫尔卡特理发店而言，系统状态是：

$$N(t) = \text{在时间 } t \text{ 时该系统中的顾客数}$$

计算机仿真程序一般记录了系统用在每一状态的累计时间量，包括其他衡量运行的方法（例如，顾客的等候时间）。

对于理发店这样的排队系统，主要事件是顾客的到达和服务的完成。上面已经介绍过如何根据顾客相继到达时间和服务时间的分布来确定随机观察数。

这两种事件都会改变系统的状态。用来调整系统状态的方法是：

$$\text{重新设置} \quad N[t] = \begin{cases} N[t]+1 & \text{在 } t \text{ 时间顾客到达} \\ N[t]-1 & \text{在 } t \text{ 时间服务完成} \end{cases}$$

把仿真时钟推进的主要程序称为**下一事件推进程序**，以下是其运作过程：

**下一事件推进程序**

1. 观察仿真时钟现在的时间，随机产生的下一事件的类型以及该事件发生的时间。决定哪一个事件先发生。
2. 把仿真时钟提前到下一事件发生的时间。
3. 根据这一事件更新系统，再随机产生下一个事件发生的时间（如果先前没有产生的话），并且记录下所需的系统运行的信息。然后，回到第一步。

反复不断地运行这个过程直到计算机仿真到达设定的结束时间或事件。

## 解释计算机仿真的过程

图 15.13 的 Excel 电子表格显示了 100 个顾客到达理发店（无助手）接受服务的计算机仿真的运行状况。每一行包含了一个顾客的相关信息（11 到 95 行隐藏）。所有的时间都以分钟计算。如图底部的等式所示，运用反向转换法根据 C 列和 F 列顾客到达时间和服务时间的概率分布产生随机观察数。根据这两项时间就能够按次序地计算出每个顾客的其他相关时间。H 列记录了每个顾客在理发前等待的时间，I 列给出了每个顾客在理发店中总共花去的时间（包括理发时间）。

> 下一事件推进程序根据所发生的顾客到达和理发完成事件的先后顺序推进程序。

用来推进该计算机仿真的是下一事件推进程序。该程序主要关心两个事件——到达事件和服务结束事件——分别记录在 D 列和 G 列，按照这两个事件的先后顺序推进程序。开始时，$t=0$，$N(t)=0$（理发店刚营业时没有顾客来）。因此，没有服务可以完成。之后，惟一可以发生的事件是顾客到达，所以将时间推进到 $t=0.5$ 分钟（D16 单元格），此时第一个顾客光顾。然后，是 $t=22.3$ 分钟（单元格 G16 表明这个顾客在这一时间理发服务完成），然后是 $t=46.0$ 分钟（根据单元格 D17 第二个顾客到达），然后 $t=48.6$ 分钟，接着是 $t=50.1$（根据单元格 D18 和 D19 第三和第四个顾客到达），然后是 $t=67.9$（根据单元格 G17 第二个顾客理发服务完成），依此类推。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Herr Cutter's Barber Shop** | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | (exponential) | | | | | |
| 4 | | | Mean Interarrival Time | 30 | minutes | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | (uniform) | | | | | |
| 7 | | | Min Service Time | 15 | minutes | | | | |
| 8 | | | Max Service Time | 25 | minutes | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |
| 10 | | | Average Time in Line ($W_q$) | 12.8 | minutes | | | | |
| 11 | | | Average Time in System ($W$) | 33.0 | minutes | | | | |
| 12 | | | | | | | | | |
| 13 | | | | Time | Time | | Time | Time | Time |
| 14 | | Customer | Interarrival | of | Service | Service | Service | in | in |
| 15 | | Arrival | Time | Arrival | Begins | Time | Ends | Line | System |
| 16 | | 1 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 21.9 | 22.3 | 0.0 | 21.9 |
| 17 | | 2 | 45.6 | 46.0 | 46.0 | 21.9 | 67.9 | 0.0 | 21.9 |
| 18 | | 3 | 2.6 | 48.6 | 67.9 | 20.8 | 88.8 | 19.4 | 40.2 |
| 19 | | 4 | 1.5 | 50.1 | 88.8 | 18.9 | 107.7 | 38.7 | 57.6 |
| 20 | | 5 | 27.6 | 77.7 | 107.7 | 17.2 | 124.9 | 30.0 | 47.2 |
| 21 | | 6 | 29.2 | 106.9 | 124.9 | 16.3 | 141.2 | 18.0 | 34.3 |
| 22 | | 7 | 18.6 | 125.5 | 141.2 | 24.6 | 165.8 | 15.7 | 40.3 |
| 23 | | 8 | 21.8 | 147.4 | 165.8 | 22.7 | 188.6 | 18.5 | 41.2 |
| 24 | | 9 | 7.4 | 154.8 | 188.6 | 24.3 | 212.9 | 33.8 | 58.1 |
| 25 | | 10 | 12.1 | 166.9 | 212.9 | 18.4 | 231.3 | 46.0 | 64.4 |
| 111 | | 96 | 48.8 | 3,132.8 | 3,132.8 | 22.2 | 3,155.0 | 0.0 | 22.2 |
| 112 | | 97 | 12.3 | 3,145.1 | 3,155.0 | 25.0 | 3,180.0 | 9.9 | 34.9 |
| 113 | | 98 | 82.7 | 3,227.7 | 3,227.7 | 19.0 | 3,246.7 | 0.0 | 19.0 |
| 114 | | 99 | 4.0 | 3,231.8 | 3,246.7 | 20.1 | 3,266.8 | 14.9 | 35.0 |
| 115 | | 100 | 85.2 | 3,317.0 | 3,317.0 | 19.5 | 3,336.5 | 0.0 | 19.5 |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| AverageTimeInLine | D10 |
| AverageTimeInSystem | D11 |
| InterarrivalTime | C16:C115 |
| MaxServiceTime | D8 |
| MeanInterarrivalTime | D4 |
| MinServiceTime | D7 |
| ServiceTime | F16:F115 |
| TimeInLine | H16:H115 |
| TimeInSystem | I16:I115 |
| TimeOfArrival | D16:D115 |
| TimeServiceBegins | E16:E115 |
| TimeServiceEnds | G16:G115 |

| | C | D |
|---|---|---|
| 10 | Average Time in Line ($W_q$) | =AVERAGE(TimeInLine) |
| 11 | Average Time in System ($W$) | =AVERAGE(TimeInSystem) |

| | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|
| 13 | | Time | Time | |
| 14 | Interarrival | of | Service | Service |
| 15 | Time | Arrival | Begins | Time |
| 16 | =-MeanInterarrivalTime*LN(RAND()) | =InterarrivalTime | =TimeOfArrival | =MinServiceTime+(MaxServiceTime-MinServiceTime)*RAND() |
| 17 | =-MeanInterarrivalTime*LN(RAND()) | =D16+InterarrivalTime | =MAX(G16,D17) | =MinServiceTime+(MaxServiceTime-MinServiceTime)*RAND() |
| 18 | =-MeanInterarrivalTime*LN(RAND()) | =D17+InterarrivalTime | =MAX(G17,D18) | =MinServiceTime+(MaxServiceTime-MinServiceTime)*RAND() |
| 19 | : | : | : | : |
| 20 | : | : | : | : |

| | G | H | I |
|---|---|---|---|
| 13 | Time | Time | Time |
| 14 | Service | in | in |
| 15 | Ends | Line | System |
| 16 | =TimeServiceBegins+ServiceTime | =TimeServiceBegins-TimeOfArrival | =TimeServiceEnds-TimeOfArrival |
| 17 | =TimeServiceBegins+ServiceTime | =TimeServiceBegins-TimeOfArrival | =TimeServiceEnds-TimeOfArrival |
| 18 | =TimeServiceBegins+ServiceTime | =TimeServiceBegins-TimeOfArrival | =TimeServiceEnds-TimeOfArrival |
| 19 | : | : | : |
| 20 | : | : | : |

**图 15.13**　赫尔卡特理发店在有 100 个顾客到达的时间过程中的计算机仿真。

图 15.14 显示了在仿真的前 100 分钟里，这个系统的状态改变过程（理发店中的顾客数）。可见，在这一段时间里，店中的顾客主要是在 0 到 3 中波动。

## 估计运行的性能

进行计算机仿真的目的是估计这个系统的运行性能。在赫尔卡特理发店这一例子中，最重要的运行性能是顾客在理发前等待的时间。图 15.13 中的 H 列和 D10 单元格给出了

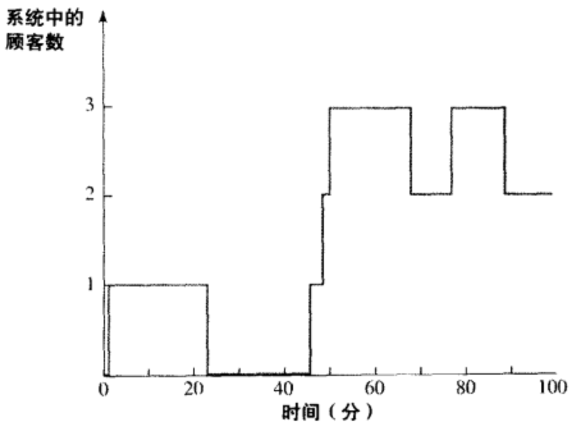



图 15.14 该图反应了在图 5.13 仿真的前 100 分钟里，这个系统中理发店里顾客数的变化过程。

顾客等待时间的估计平均值为 12.8 分钟。类似地，单元格 D11 给出了包括理发在内的 I 列中的总计等待时间的估计平均值 33.0 分钟（在前面章节中介绍的排队模型符号中，$W_q$ 和 $W_t$ 分别表示了上述的期望等待时间）。

H 和 I 列中的数字还提供了运行性能的许多种其他衡量方法。

从该仿真还可以估计出许多其他的运行性能。例如，顾客等待时间超过 20 分钟的概率是根据 H 列中的数据获得的。该栏中等待时间超过 20 分钟的顾客的比例就是这一概率。系统中顾客人数的估计是将 I 列中的数值（包括正在接受理发的顾客）加总起来再除以总计仿真时间。预计等待理发的顾客数也可在 H 列中通过同样的方法算得。

系统中顾客数的概率分布状况也是有研究价值的。就像图 15.14 所示的，系统中存在任何特定顾客数的概率可以由仿真系统在该状态所用的时间在整个仿真时间中所占的比例计算出。

图 15.13 中的计算机仿真是很短的，所以只能够粗略地算出系统运行性能的估计值。为了获得更精确的值，计算机仿真必须模拟数年的运行状况（下一节详细论述）。

## 有助手的理发店系统的计算机仿真

图 15.13 和图 15.14 描述的是没有助手的理发店运行状况。在大多数情况下，有没有助手的两种过程是相似的。每次顾客到达（或理发店开门）后，下一次顾客到达时间都必须随机产生。同样，顾客开始理发时，服务时间也需要随机产生。

增加了第二个服务者时，除了要记录第二个服务者的理发结束事件外仿真程序仍然保持不变。

惟一不同之处在于下一事件时间推进程序是如何决定接下去发生的事件。与前面有两个可能性不同，这里有三个可能性：

1. 当赫尔卡特完成服务时离店。
2. 当助手完成服务时离店。
3. 顾客到达。

但是，除了需要分别对上述两种离店分布进行计时外，其他仿真过程基本相同。

下一节将要分析计算机仿真理发店系统较长时间的例子，包括有助手和没助手两种情况。

## 问题回顾

1. 赫尔卡特面临的决策是什么?
2. 帮助作决策的两条实际经验是什么?
3. 在这个例子中,为了运用计算机仿真需要估计什么概率分布?
4. 由这些分布产生随机观察数的方法有哪些?
5. 什么是仿真时钟?
6. 用来推进仿真时钟的主要程序称作什么?
7. 赫尔卡特理发店例子的系统状态是什么?
8. 在仿真过程中,赫尔卡特理发店中有无助手对程序的基本区别是什么?

## 15.3　案例分析

回忆赫尔卡特在决定是否要在其理发店中加一个助手的情景。最基本的问题在于如果他加了一个助手,会不会保持现在的个人收入水平。

### 经济因素

以下是与决策有关的主要经济因素(将德国马克兑换成美元):

收入 = 15 美元/次
平均小费 = 2 美元/次
维持理发店的费用(有无助手一致) = 50 美元/工作日
助手的工资 = 120 美元/工作日
助手的佣金 = 5 美元/次

除了工资和佣金,助手还可以保留小费。除此之外的收入都归赫尔卡特。

理发店上午 8 点至下午 5 点营业,向顾客开放 9 个小时。赫尔卡特和其他助手中午只吃三明治,在没有顾客的时间才休息。这样,任何顾客在营业的任何时间来到理发店都会收到当班理发师的热情接待。

### 分析没有助手的情况

就像前面一节中说明的(图 15.10 表述的),目前顾客到达时间服从均值 30 分钟的平均分布。这样,赫尔卡特一小时平均有 2 个顾客,每个工作日平均有 18 个顾客。所以在减去了维持理发店所需的成本后,每个工作日的净收入为:

$$
\begin{aligned}
\text{每天净收入} &= (15+2) * (18\text{ 个顾客}) - 50 \\
&= 306 - 50 \\
&= 256(\text{美元})
\end{aligned}
$$

> 在本章的 Excel 文档中包含有排队仿真器。

赫尔卡特的侄子弗里特茨用管理科学课件中的排队仿真器来进行理发店系统的计算机仿真,帮助他的叔叔做出决策。这种方法是为各种队列系统而设计的长时间有效运行的计算机仿真。它的基本运行方法如图 15.13 所示,但是它具有更大的柔性来处理许多其他类型的系

统,并可获得更多的结果,简述如下。

**排队仿真器的特点:**

1. 能够运行 14.1 节中所描述的各种基本排队系统的计算机仿真。
2. 能够运行多达 25 个服务器的仿真。
3. 能够使用下面的任意一个到达时间或服务时间的概率分布:
   a. 连续时间(也被称为泊松分布)。
   b. 指数分布(在 14.1 节和 15.2 节中所描述的)。
   c. 转换指数分布(连续时间和服从指数分布时间的结合)。
   d. 正态分布。
   e. 爱尔朗分布(如 14.1 节所描述)。
4. 提供了排队系统如 14.3 节所描述的各种重要性能衡量的估计值。
   $L$ = 系统中期望的顾客数,包括正在被服务的顾客。
   $L_q$ = 队列中的期望顾客数,不包括正在被服务的顾客。
   $W$ = 系统中单一顾客的期望等待时间(包括服务时间)。
   $W_q$ = 队列中单一顾客的期望排队等待时间(不包括服务时间)。
   $P_n$ = 系统中有 $n$ 个顾客的概率($n = 0, 1, 2, 3, \cdots, 10$)。

(如果你先前没有研究过 14 章,没有了解到排队系统,你可能会发现观看排队系统的现场证明是很有用的,这一活动可以在 www.mhhe.com/hillier2e 上的互动管理课件模型中的排队等待线模组中执行。一个离线版本同样也包括在你的管理课件中的 CD 上。)

为了测试仿真模型的有效性(在前面一节中介绍),弗里特茨开始模拟理发店目前的运行状况。虽然图 15.13 已经作了大致一星期的仿真(100 个顾客量),弗里特茨仍然希望能够模拟理发店数年的运行情况(100000 个顾客量)。

图 15.15 显示了弗里特茨从计算机仿真中获得的结果。如有必要,你可以用排队仿真器来模拟这个仿真。你会得到非常相近的结果,当然每次的结果会由于随机数的不同而有微小的差别。

> 置信区间是实际性能值最优可能处于的区间。

E 列中运行性能与 14.3 尾部对任何排队系统的定义一样。F 列中给出了点估计,这个数字就是从这次模拟中所得出的最好估计值。G、H 列利用统计学的理论,为每一个性能提供了 95% 的置信区间。因此,实际值落在置信区间的概率为 95%。因为模拟的数量众多(100000 位顾客),所以每一个置信区间就相当的狭窄了。

## 测试仿真模型的有效性

> 既然有单一服务器系统的排队模型,弗里特茨就利用它的结果来验证仿真模型的有效性。

当开始用计算机仿真的方式进行管理科学的研究时,一种比较好的方式就是首先运行可求得解析解的简化仿真模型(假如有这样的简化模型存在)。比较仿真所得的结果和解析所得的结果,可以很好地判断仿真模型的有效性。

弗里特茨回忆起在 14.5 章节中提到的 $M/G/1$ 排队模型为图 15.15 模型提供了一些准确的分析结果。这一排队模型用了四个参数:

$\lambda$ = 平均到达率
　= 1/30 位顾客每分钟(从图 15.10)

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Queueing Simulator for Herr Cutter's Barber Shop** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | Number of Servers | 1 | | | Point | 95% Confidence Interval | |
| 4 | | | | | | Estimate | Low | High |
| 5 | | **Interarrival Times** | | | $L=$ | 1.358 | 1.332 | 1.385 |
| 6 | | Distribution | Exponential | | $L_q=$ | 0.689 | 0.666 | 0.712 |
| 7 | | Mean | 30 | | $W=$ | 40.582 | 39.983 | 41.180 |
| 8 | | | | | $W_q=$ | 20.577 | 19.980 | 21.174 |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | **Service Times** | | | $P_0=$ | 0.330 | 0.326 | 0.335 |
| 11 | | Distribution | Uniform | | $P_1=$ | 0.310 | 0.307 | 0.313 |
| 12 | | Minimum | 15 | | $P_2=$ | 0.183 | 0.180 | 0.185 |
| 13 | | Maximum | 25 | | $P_3=$ | 0.0942 | 0.0920 | 0.0963 |
| 14 | | | | | $P_4=$ | 0.0451 | 0.0433 | 0.0469 |
| 15 | | **Length of Simulation Run** | | | $P_5=$ | 0.0206 | 0.0192 | 0.0220 |
| 16 | | Number of Arrivals | 100,000 | | $P_6=$ | 0.00950 | 0.00849 | 0.0105 |
| 17 | | | | | $P_7=$ | 0.00432 | 0.00360 | 0.00503 |
| 18 | | | | | $P_8=$ | 0.00219 | 0.00163 | 0.00274 |
| 19 | | **Run Simulation** | | | $P_9=$ | 0.000876 | 0.000540 | 0.00121 |
| 20 | | | | | $P_{10}=$ | 0.000372 | 0.000165 | 0.000579 |

**图 15.15**　用本章 Excel 文件中的排队模型仿真赫尔卡特理发店系统 100000 个顾客到达的情形，所获得的输出数据（没有雇用助手）。

$$\mu = \text{平均服务率} = 1/20 \text{ 位顾客每分钟（从图 15.9）}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/30}{1/20} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma = \text{服务时间分布的标准差}$$

因为 0 - 1 平均分布的标准差为$\frac{1}{\sqrt{12}}$，在图 15.9 中给出的服务时间分布的标准差为：

$$\sigma = \frac{10}{\sqrt{12}} = 2.887$$

在键入 $\lambda$、$1/\mu$ 和 $\sigma$ 的值后，管理科学课件中 $M/G/1$ 模型的 Excel 模板将产生图 15.16 所示的结果。注意每一个系统性能是否准确落在图 15.15 相应的 95% 的置信区间中。这样就部分地保证了仿真模型以及和计算机仿真的操作是与原要求吻合的。

为了进一步测试仿真模型的有效性，弗里特茨把图 15.15 的 F 列的结果给赫尔卡特看，并且询问这些数字是否符合他在理发店里工作的经验。虽然赫尔卡特没有记录这些数据，他感觉这些数字是对的。他还指出在每一次理发之前平均 20 分钟的等待时间，是理发师杂志中提到的第一条实际经验（前面章节所提到的）。

不幸的是，在处理雇用一名助手的两服务器的情况时，找不到一个可以求得解析解的排队模型（在第 14 章中所列举的多服务器排队系统中，没有一个的服务时间分布与这家理发店的情况接近）。因此，有必要利用计算机仿真来获得较好的估计值。另外，根据上面的仿真模型有效性的测试结果，弗里特茨确信，这个模型将会提供较为准确的估计值。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Analytical *M/G/*1 Queueing Results for Herr Cutter | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | Data | | | | Results |
| 4 | | λ = | 0.0333 | (Mean arrival rate) | | $L$ = | 1.344 |
| 5 | | 1/μ = | 20 | (Expected service time) | | $L_q$= | 0.678 |
| 6 | | σ = | 2.887 | (Standard deviation) | | | |
| 7 | | $s$ = | 1 | (# servers) | | $W$ = | 40.356 |
| 8 | | | | | | $W_q$= | 20.356 |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | ρ = | 0.666 |
| 11 | | | | | | | |
| 12 | | | | | | $P_0$ = | 0.334 |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| $L$ | G4 |
| Lambda | C4 |
| $L_q$ | G5 |
| OneOverMu | C5 |
| Rho | G10 |
| $s$ | C7 |
| Sigma | C6 |
| $W$ | G7 |
| $W_q$ | G8 |

| | F | G |
|---|---|---|
| 4 | $L$ = | =$L_q$+Rho |
| 5 | $L_q$= | =((Lambda^2)*(Sigma^2)+(Rho^2))/(2*(1-Rho)) |
| 6 | | |
| 7 | $W$ = | =$W_q$ +OneOverMu |
| 8 | $W_q$= | =$L_q$/Lambda |
| 9 | | |
| 10 | ρ = | =Lambda*OneOverMu |
| 11 | | |
| 12 | $P_0$ = | =1-Rho |

**图 15.16** 这种用于 *M/G/*1 模型的 Excel 模板表现了在没有雇用助手的情况下赫尔卡特的理发店系统的最基本的运行性能。

弗里特茨同时也很清楚地知道,他模拟理发店运营的仿真模型(就像 *M/G/*1 排队模型)中有两个简化的假设,这样获得的仿真模型只是理发店实际运营情况的近似(这些假设被包括在排队仿真中)。

**简化的假设**

1. 系统(理发店)有一个无穷队列,所以不管当时有多少的顾客已经在系统中,到达的顾客总是进入系统(在真实的情况下,赫尔卡特发现,当店里有三位顾客在等候理发时,到达的顾客将不会在此等候了,所以他只为等候的顾客提供了三把椅子)。
2. 系统一旦开始运行,将会连续工作,甚至没有开门和关门(在真实的情况下,理发店在每个工作日的早上8:00开门,下午的5:00关门)。

为估计第一种假设的影响,弗里特茨注意到图 15.15 的估计结果:

$$P_0+P_1+P_2+P_3+P_4 = 0.330+0.310+0.183+0.094+0.045$$
$$= 0.962$$

这样,理发店中的顾客数超过最多可接待的人数——四人(一人在接受理发,三人在等待)的运行时间不到总时间的 4%。因为系统中顾客数超过最多接待数的概率很小,所以对 $L, L_q, W$ 和 $W_q$ 估计值的影响也很小,只可能会使这些估计值有微小的增大,而不会影响到对理发店真实的评价。因此,图 5.15 所提供的估计值是保守的(这总比极度乐观的估计要

好)。如果赫尔卡特雇用一名助手,他将为等候着的顾客多提供三把椅子。这样的话,将会有比以前要少的等待时间,到达的顾客不等待而离开的情况就很少会出现。因此,在考虑雇用一名助手的情况下,第一种简化假设是十分合理的。

第二种简化的假设也只会轻微影响 $L$、$L_q$、$W$ 和 $W_q$ 的估计值,使估计值稍微比实际值大一点。原因是理发店每天早上开门时都是没有顾客的,而是逐渐达到稳定状态;而仿真模型除了在模型开始运行的时候之外,所有的时间里系统都处于稳定的状态。幸运的是,增加一名助手将会使理发店中顾客的数量保持在最少的水平上,即使是在稳定的状态下(每天能够在很快的时间里到达稳定状态)。因此,这个假设的估计误差也将是在合理的范围之内的。

在获得价格不菲的计算机仿真软件包和进行更多准备的时候,弗里特茨不做上述两个假设也能较好地仿真理发店真实的运营情况。计算机仿真的一个关键优点就是可以把实际系统的特征随时加入到仿真模型中。

但是,就像在管理科学技术中运用其他数学模型一样,在增加模型的真实性和模型的易用程度上需要有一个权衡。仿真的模型不必是真实世界的完全反映。许多仿真模型出错,往往不是过分的理想化而是追求过分的真实性。过分追求真实性的模型往往会包括进一些不重要的细节,这些细节不会明显地影响估计值的准确性。如此复杂的模型通常很难调试,甚至可能不能调试成功。这就好像用大量的代码和计算时间去获得很少量的信息。我们的目标是要在仿真模型中加入系统的重要特征,从而得到合理精确的估计值以指导管理者及时地做出基于全面判断的决策。

弗里特茨感觉他目前的仿真模型就达到了这一目标。

## 雇用一名助手后的情况分析

正如从 15.2 节开始所描述的,赫尔卡特和他的侄子弗里特茨同意对增加一名助手的计划进行分析。他们假设助手服务时间分布(给一位顾客理发的时间)与赫尔卡特一样。基于 15.2 节所提到的第二条规则,他们还假设增加一名助手后,将把顾客在理发前的平均等待时间降为 10 分钟以下,而且逐渐吸引新的生意直到平均等待的时间为 10 分钟。这种业务水平(每天来理发的平均顾客数)决定了顾客到达的间隔时间的分布。因此,基于一系列不同的时间分布运行计算机仿真程序,以判断在怎样的顾客到达时间分布情况下,所产生平均等待时间为 10 分钟。在这一业务水平下,还可以进行财务上的分析。

回忆上一节中图 15.10 所描述的,当前顾客到达时间分布的均值为 30 分钟(没有雇用助手)。因此,经过不断的实验,发现错误并改正,弗里特茨尝试了表 15.2 第一列所示的一系列均值。为了能够较快地接近实际均值,他用计算机仿真排队模型时只用了适中的仿真时间——10000 个顾客到达的时间(粗略估计为半年)。在第二列中 $W_q$(理发前的平均等待时间)的点估计表明当 $W_q$ 的实际值为 10 分钟时,$W_q$ 的仿真估计值等于接近于 14.3 分钟的某一数值。在最右列的 95% 的置信区间进一步表明这个均值将落在 14.3 分钟的左右半分钟的范围内。

为了进一步检验,弗里特茨下一步对均值为 14.3 分钟的顾客到达时间分布进一步仿真,增加仿真时间(100000 顾客的到达时间)。完整的运行性能结果显示在图 15.17 中。$W_q$ 的点估计(和 $W_q$ 的 95% 的置信区间)略微超过 10。弗里特茨同时也想到了前面所提到的两个简化的假设,这两个假设使得 $W_q$ 的估计值略微高于实际值。因此,他推断对于平均等待时间为 10 分钟而言,14.3 分钟是到达时间间隔均值的可行的估计值。

表 15.2 增加助手、不同的顾客到达时间分布均值下、10000 次到达顾客数时，使用赫尔卡特理发店队列仿真器所获得的 $W_q$ 的估计值

| 到达时间均值 | $W_q$ 的点估计 | $W_q$ 的 95% 的置信区间 |
|---|---|---|
| 20 分钟 | 3.33 分钟 | [3.05 至 3.61]分钟 |
| 15 分钟 | 8.10 分钟 | [6.98 至 9.22]分钟 |
| 14 分钟 | 10.80 分钟 | [9.51 至 12.08]分钟 |
| 14.2 分钟 | 9.83 分钟 | [8.83 至 10.84]分钟 |
| 14.3 分钟 | 9.91 分钟 | [8.76 至 11.05]分钟 |

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Queueing Simulator for Herr Cutter's Barber Shop with an Associate** | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | Number of Servers | 2 | | | Point | 95% Confidence Interval | |
| 4 | | | | | | Estimate | Low | High |
| 5 | | **Interarrival Times** | | | $L=$ | 2.126 | 2.090 | 2.163 |
| 6 | | Distribution | Exponential | | $L_q=$ | 0.719 | 0.689 | 0.748 |
| 7 | | Mean | 14.3 | | $W=$ | 30.212 | 29.833 | 30.591 |
| 8 | | | | | $W_q=$ | 10.211 | 9.834 | 10.588 |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | **Service Times** | | | $P_0=$ | 0.163 | 0.160 | 0.166 |
| 11 | | Distribution | Uniform | | $P_1=$ | 0.266 | 0.262 | 0.270 |
| 12 | | Minimum | 15 | | $P_2=$ | 0.233 | 0.230 | 0.235 |
| 13 | | Maximum | 25 | | $P_3=$ | 0.1541 | 0.1518 | 0.1564 |
| 14 | | | | | $P_4=$ | 0.0877 | 0.0855 | 0.0898 |
| 15 | | **Length of Simulation Run** | | | $P_5=$ | 0.0467 | 0.0448 | 0.0487 |
| 16 | | Number of Arrivals | 100,000 | | $P_6=$ | 0.02417 | 0.02264 | 0.0257 |
| 17 | | | | | $P_7=$ | 0.01282 | 0.01162 | 0.01401 |
| 18 | | | | | $P_8=$ | 0.00634 | 0.00546 | 0.00722 |
| 19 | | **Run Simulation** | | | $P_9=$ | 0.003208 | 0.002530 | 0.00389 |
| 20 | | | | | $P_{10}=$ | 0.001546 | 0.001076 | 0.002017 |

图 15.17 增加助手、100000 个顾客到达时，使用排队仿真器进行赫尔卡特理发店的计算机仿真所获得的结果。

弗里特茨意识到他可以花更多的时间运行这一仿真程序，从而取得与 14.3 分钟略微不同间隔时间均值的估计值，能够更进一步地接近 10 分钟的平均等待时间。他也知道从表 15.2 的置信区间中可以看出 14.3 分钟已经十分接近实际值了。另外，两个简化假设在仿真模型中引起的小小偏差，不会影响模型估计值的精确程度。他对 14.3 分钟这一数值对目标分析提供的足够和保守的估计感到很满意。

基于这样的估计，弗里特茨得出结论，当他的叔叔增加一名助手后，将会逐渐提高理发店的营业水平，一直到平均到达间隔时间为下面的情况：

$$\text{平均到达时间间隔} = 14.3 \text{ 分钟}$$

这样

$$\text{平均到达率} = \frac{60}{14.3} \text{位顾客/小时}$$

=4.2 位顾客/小时
=37.8 位顾客/天

这种营业水平将是原来每天 18 位顾客的 2 倍。赫尔卡特计划和他的助手平分这些顾客,每人平均每天服务 18.9 位顾客。

因此,根据这一节前面提及的成本因素,赫尔卡特现在平均每个工作日的净收入变为:

每日净收入 =37.8(15 美元)　(理发店的收入)
+18.9(2 美元)　(小费)
-50 美元　(理发店的日常维护)
-120 美元　(助手的工资)
-18.9(5 美元)　(助手的佣金)
=567 美元 +37.80 美元 -50 美元 -120 美元 -94.50 美元
=340.30(美元)

比较赫尔卡特目前的每日净收入 256 美元。增加一名助手后每日净收入的改变量为:

每日净收入改变量 =340.30 美元 -256 美元
=84.30(美元)

这样,他明显地增加了自己的收入。

增加收入的估计需要慎重解释。

当弗里特茨把分析结果给他叔叔看时,他强调 84.30 美元只是当营业水平逐渐达到新水平时的估计值。那需要假以时日,甚至要到 1~2 年后,才能到达新的水平。而且赫尔卡特的收入在营业额开始增长前将会减少。另外,关于收入真实增长的乐观估计在很大程度上是基于理发师杂志上的第二条经验有效并且适用于赫尔卡特理发店的情况。在这样的前提下,才最终得出营业额增长 1 倍的结果。只有在助手可以将他原先服务的理发店的顾客带过来,并且赫尔卡特理发店由于增加了这一助手而吸引更多的新顾客的情况下,理发店的业务量才能大幅度增长。

赫尔卡特有信心实现这一设想。因为,他的朋友竭力推荐这一助手。另外,他感觉如果不是像现在这样忙不过来的话,凭他的理发技能可以吸引更多的顾客。在这个不断发展的城市里,到处都充满着机会。他也希望在增加了一名助手后,可以减少老顾客在理发之前等待的时间,以此来提高理发店的服务水平。最后,他也看到了许多由于有了一个助手之后无法用金钱来衡量的好处。他并不在意收入暂时减少,因为一两年后他的收入就不会比现在少。实际上,快乐也是一种无形的收入。

在这样的分析下,赫尔卡特决定雇用一名助手。他也十分地感谢他的侄子利用计算机仿真的方法,帮助他下定了这个决心。

## 问题回顾

1. 弗里特茨在第一次计算机仿真运行中仿真了什么?目的是什么?
2. 从排队仿真器中获得的系统两种运行性能的类型是什么?
3. 弗里特茨测试仿真模型有效性的两种方法是什么?
4. 弗里特茨的仿真模型有没有做任何简化的假设?仿真模型是否有必要完全体现现实系统的任何性质?

5. 弗里特茨的分析最后是否估计出了如果雇用一个助手的话，赫尔卡特的收入是增加还是减少（与现在的水平相比）？

## 15.4 计算机仿真应用的常见类型

计算机仿真是一种用途特别广的技术。可以用计算机仿真（任何不同难度的随机系统）来研究现实中的各种随机系统，还有一些相对简单的包含概率分布的系统。计算机仿真的广泛应用使之成为最广泛地被用来解决这类系统问题的管理科学技术，而且其运用的范围和深度还在不断扩大。Excel 及其加载宏功能的增强又进一步推动了计算机仿真的应用。

因为计算机仿真的应用如此广泛，所以要一一列举计算机仿真应用的所有领域几乎是不可能的。但是，下面我们将会简要地介绍几种重要的应用类型。

随机系统的三种类型已经在前面的章节中介绍过了。使用这些章节中描述的数学模型是很普遍的，可以分析系统的简化模型，然后用计算机仿真进一步获得更精确的结论。

### 排队系统的设计和运行

14.2 节已经给出了一些经常遇见的排队系统的例子，并且介绍了这些排队系统是如何影响到社会生活的诸多方面的。许多数学模型（包括在 14 章中介绍的一些模型）可以用来分析相对简单的排队系统。然而，在处理一些较为复杂的排队系统时，用这些方法只能粗略地得到对系统的近似估计。计算机仿真却可以很好地解决复杂的排队系统问题，所以计算机仿真被大量地运用到这一领域。

本章所举的例子就是一个证明，虽然数学模型（*M/G/*1 模型）可以处理赫尔卡特理发店在不用助手情况下的问题，求得这一系统的一些运行性能，但却不能解决雇用助手后的情况。所以，就必须运用计算机仿真来分析该案例的最关键的部分。

因为这类应用相当普遍，管理科学课件中的排队仿真器是专门为排队系统的仿真而设计的。

> 许多这类应用都是把排队模型和计算机仿真相结合。

在 14.10 节中所列的 6 个获奖的排队模型应用方法中，有两种方法是在很大程度上运用了计算机仿真。一个例子是纽约市警局的逮捕－提审系统，通过计算机仿真使系统的利用率大大提高，并且每年可节省 950 万美元。另一例子是 AT&T 为它的顾客开发的一个基于计算机的系统，该系统帮助商务客户建立和调整它们的呼叫中心，从而每年能为客户产生 7.5 亿美元的利润。

你是否在 Taco Bell 餐馆吃过饭？如果是的话，那么就是计算机仿真获奖应用（在 Interfaces 杂志 1998 的 1～2 月刊里所提及）的受益者。你是这个复杂排队系统中的一个顾客，每一组的顾客都是由几个服务生（包括那些准备不同食品的人员）同时提供服务。由于这个系统太过于复杂从而也没有一个现有的排队模型可以应用，因此计算机仿真用来决策不同的服务时段分别需要多少个劳动力能够提供期望的顾客服务水平。信息被输入到整数规划模型中，来最优化地制定和分配全体服务人员从而最小化工资支付。预测技术也被用来预测顾客的到达情况，输入到计算机仿真中。整合的管理科学技术（也称为人力管理系统）用在 Taco Bell 公司所拥有和控股的大概 4000 个餐馆中。这种管理技术的应用已经使得劳

动力成本每年大约节省 1300 万美元，同时它还改善了顾客服务的质量和连续性，等等。

## 管理库存系统

在 CD 中有一部分补充材料（见 19 章）讨论了当产品的需求不稳定时，如何解决管理库存问题。介绍了用来处理这一类型系统的最基本的两个数学模型。19.6 节描述了现实生活中常见的大型库存系统。尽管可以用数学模型来分析这类复杂问题，但计算机仿真经常起着更重要的作用。

> 通过仿真公司的供应链的运营，各种可能的供应链重新设计方案都被评估过。

在 1996 年 4 月份的《当代运筹学/管理科学》（OR/MS Today）中，有一篇文章介绍了为欧洲的 IBM **个人电脑公司**（IBM PC Company）所进行的一项管理科学课题的研究。因为竞争对手敏捷性的不断增强，IBM 公司面临的竞争压力增大，为了找出一种便捷的方法来快速处理客户的订单，管理科学小组通过对公司整条供应链（涉及采购、生产和配送，包括每个环节产生的库存）进行仿真分析出解决之道。通过对供应链设计和运作的大幅度调整（包括库存系统），大大增强了公司的竞争地位。每年直接成本节省 4000 万美元。

## 估计在截止期完成项目的概率

对于一个项目团队，团队经理最关心的问题之一就是能否在截止期前完成任务。8.4 节已经介绍了如何运用计划评审技术的三点估计方法来大致估计能否按时完成任务的概率。在那一节中还介绍了运用这一方法求得的三个简化估计值，通过这些估计值可以估计出事件的概率。但是，由于结果只是对实际情况的大致估计，这些估计常常会过于乐观，甚至有时非常过度。

因此，现在人们越来越多地运用计算机仿真来获得更为精确的概率估计值。计算机仿真的方法包括了根据项目中不同任务的完成时间的概率分布来产生的随机观察，而后，运用网络化的计划，仿真每一事件开始和结束以及整个任务何时结束。在一个仿真周期内上千次地重复这一过程，就可以非常精确地估计出完成任务的概率值（在 16.3 节中有这样一个例子）。

## 制造系统的设计与运行

调查显示，大部分的计算机仿真运用于制造系统，而许多这样的系统都可以看作是某一类型的排队系统（譬如，在一类排队系统中机器被看作是服务器，而要完成的工作是顾客）。然而，这种系统的内在复杂性（譬如，机器故障、需要重新加工次品以及工作形式的多样性）远远超出了一般排队系统的范围。用计算机仿真解决这类复杂问题并不是很困难。

下面列举了一些可能碰到的问题的类型：

1. 必须提供多少种类型的机器？
2. 每一类原料加工单位的数量是多少？
3. 考虑整个生产过程的完成期限，目前可供使用的机器应该根据什么规则来安排它们的顺序？
4. 工作实际的完工期限是什么？
5. 现在设计的新生产流程中存在有什么瓶颈问题？

> 这些问题是计算机仿真中出现的一些典型问题。

6. 新生产流程的产出率(生产率)是多少?

## 配送系统的设计和运作

任何的大型制造工厂都需要有效的配送系统,将货物从厂区和仓库送到顾客手中。在这一系统中有许多不确定因素。什么时候有可以运货的交通工具?一次运货的时间是多长?不同的客户的需求是什么?通过相关概率分布而产生随机观察数,计算机仿真能够轻而易举地解决这些不确定性问题。所以在检测多种可能性时经常会使用计算机仿真,以改善系统的设计和运行。

1991 年 Interfaces 期刊的 1 ~2 月号介绍了一个这一类型的获奖应用。**雷诺德金属制品公司**(Reynolds Metals Company)每年花 2.5 亿美元运输原料和货物。通过卡车、火车、船舶和飞机等运输工具来进行货运,运输网络包括工厂、仓库和供货商等上百个运输点。综合运用混合 0-1 整数规划(第九章)和计算机仿真设计出一个具有中央分配功能的配送系统。这一新系统不仅改善了送货的及时性,还减少了每年的货运成本达 700 多万美元。

前面提到的欧洲 IBM 个人电脑公司的例子(在"管理存货系统"下)也同样包括配送系统的设计和运行。

## 财务风险分析

最早运用计算机仿真的是财务风险分析,而且这一领域的计算机仿真应用还将进一步发展。例如,考虑对具有不稳定现金流的资本投资的评估问题。通过根据不同时期现金流的概率分布而产生的随机观察数(考虑各个时期关联性),计算机仿真可以产生数千种投资方案的结果。这就提供了投资收益(例如净现值)的概率分布。这种分布(有人称其为风险分布)有助于管理层评价投资的风险性(你可以见 16.5 节的例子)。

同样的方法可以用在投资其他证券领域的风险分析上,包括期货以及其他一些更复杂的金融投资如买方以及卖方股票选择权,还有指数期货等等。

## 保健方面应用

保健与投资的风险分析一样,未来不确定性的分析对做出决策有至关重要的影响,但是,在投资分析中处理的是不确定的未来的现金流,而在保健问题上要分析的是人类疾病发展的不确定性。

下面是用计算机仿真来指导设计保健系统的一些例子:

1. 模拟医治有冠心病的病人时,医院资源的使用情况。
2. 模拟在不同保险计划下的医疗费用。
3. 模拟早期病症透视的成本和有效性。
4. 模拟在医疗中心使用组合的外科器械。
5. 模拟急救服务的呼救时间和定位。
6. 模拟捐献的肾脏与患者的匹配情况。
7. 模拟抢救室手术情形。

## 其他服务领域的应用

同保健领域一样,其他服务领域也对计算机仿真进行了充分应用。这些领域包括政府

机构、银行、酒店管理、饭店、教育机构、灾害处理、国防军事部门以及游乐园等等。大多数情况下，这些模拟的系统都是排队系统中的一种。

1992 年 Interfaces 期刊的 1 ~ 2 月号描述了这种类型的获奖应用。**美国邮政服务公司**(The U. S. Postal Service)指出，自动化技术是惟一能够在保持价格优势和满意的服务水平的条件下，处理日益增加的邮件量的方法。他们经过多年的详细计划，想要开发出满足这一目标的大型自动化系统。在选择最终的方案之前，分析的主要方法是运用了一个被称作 META(**评估技术方案选择的模型**)的功能强大的计算机仿真软件。这个模型一开始用在全国范围内，然后逐步集中到公司地方部门以进行更细致的分析。相应的方案需要累计 120 亿美元的投资资金，但是预计每年可以因此而节省 40 亿美元的劳动力开支。该例子的另一个成就就是邮政系统的高层管理者开始重视管理科学工具的运用。规划人员进一步将管理科学技术应用到各种领域中，上至总部，下至小部门。

### 新的应用

每年，新的计算机仿真应用都层出不穷。许多新的应用技术首先在每年冬季的计算机仿真会议上公开宣布，这一会议每年 11 月在美国召开。从 1967 年开始，会议已经有一个计算机仿真的机构。现在有上千名成员，其中学术派和实践派各占半数。数百篇论文宣布了在方法上的改进和新的应用的创新。

### 问题回顾

1. 这一章的案例研究的是计算机仿真的哪一种类型的运用？
2. 在欧洲的 IBM 个人电脑公司的管理科学案例中仿真的是哪一部分内容？
3. 计算机仿真用在计划评审技术的三个方法中，仿真得到的估计数值是什么？
4. 对制造系统进行仿真时出现的一类问题的例子是哪一个？
5. 在雷诺德金属制品公司的获奖应用中，计算机仿真是用来设计什么的？
6. 在用计算机仿真来进行投资的风险分析时，通过对不确定的未来现金流的仿真可以得到的结果是什么？
7. 计算机仿真指导设计保健系统运行的例子是哪一个？
8. 在设计美国邮政系统的获奖计算机仿真应用时，仿真设计的是哪一部分，最后得到的设计方案可以节省多少劳动力成本？

## 15.5　计算机仿真学习总结

到现在为止，这一章主要围绕计算机仿真程序以及运用计算机仿真的一些例子。接下来，将会总结一下所有这些例子中运用计算机仿真的主要步骤，从而在更大的范围里概括出运用计算机仿真的管理科学研究的基本步骤(其他管理科学技术的研究也同样适用此步骤)。

必须强调，不是所有的计算机仿真应用程序都需要经过下述的所有步骤。由于 Excel 及其加载宏的广泛运用，最基本的计算机仿真可以在电子表格上进行，从而大大地减少了研究的时间和资金投入。这样，经理们能够完成原先必须由专业管理科学专家才能完成的研究了。

然而，计算机仿真的重大的应用还是需要管理科学小组按照如下所述的步骤不断持续

地努力。

## 第一步:描述问题并做研究计划

管理科学小组需要与管理层就下列问题先会面进行讨论:

管理层启动管理科学研究的时候应该回答的一些关键问题。

1. 什么是管理层想要研究的问题?
2. 该项研究的总体目标是什么?
3. 特别要求注意的问题是什么?
4. 可选的系统结构类型是什么?
5. 对管理层而言有意义的系统性能指标是什么?
6. 研究的时间限制是什么?

除此之外,小组也必须与工程师和操作人员会晤,请教系统运行的细节问题(小组通常会包括一到两名具有专业系统知识的员工)。如果系统已经在运行,小组将会观察系统的运行来辨认系统组成元素和元素相互之间的关系。

在赫尔卡特理发店案例中,排队系统的组成元素包括顾客到达、队列和作为服务者的理发师。这是一个非正式的小例子,整个管理科学小组只有赫尔卡特侄子弗里特茨一个人,赫尔卡特则是惟一的管理者。

在这一步骤的最后,管理科学小组的领导者为这一研究制定总体规划,包括小组的人数、各自的职责、计划日程和研究的预算等。

## 第二步:收集数据和建立仿真模型

数据的类型取决于被模拟系统的性质。对于赫尔卡特理发店来说,主要的数据是顾客相继到达时间分布和服务时间(理发一次所需时间)的分布。对于单一产品的库存系统,小组需要产品的需求分布以及发出订单和收到货物之间的提前期的分布。对于活动完成期不稳定的运用计划评审技术的网络计划,活动完成期的时间分布是必须知道的。对一个涉及常会发生机器故障的生产系统,小组需要确定机器发生故障的时间分布和检修时间分布。

在这些例子中,必须明确要获得的相关数据的概率分布。为了真实地模拟系统运行状况,计算机仿真必须根据相关的概率分布来产生随机观察数而不是用平均数。

计算机仿真应该使用相关数据的概率分布而不是用平均数。

一般情况下,只能通过直接观察系统或相似系统来估计这些分布。如果没有这样的系统,则只能通过其他渠道如工业工程时间研究、工程记录、操作手册、机器规格或与有经验的人士交流等手法来获取这一信息。

一个计算机仿真模型通常根据流程图来建模,在流程图中,系统中各个部分相互关联。每一部分都有各自的操作规则,包括控制事件何时发生的时间概率分布。模型需要足够的细节来抓住系统的核心内容。对较大的研究项目,先建立一个相对简单的模型,然后再对其进行调试并增加其他主要事项是个不错的主意。

## 第三步:检验计算机仿真模型的准确性

在设计计算机程序前,管理科学小组应该邀请对系统运作情况相当熟悉的人员,来检查仿真模型的准确性。使用投影仪,给重要人物完整概要地介绍整个建模的思路,然后听取他

们的意见。在这样的讨论之后，一些错误的模型假设将会被发现和纠正，而一些新的假设会被加入，并进一步决定模型的不同部分需要考虑多少细节的问题。

除了检验计算机仿真模型的准确性之外，这个过程也让管理人员对这个模型产生一种认同感。

### 第四步：选择软件编写计算机程序①

主要有四种软件用于计算机仿真。一是电子表格软件。15.1 节已经介绍了 Excel 是如何在电子表格上执行基本的计算机仿真模型。此外，一些 Excel 加载宏进一步强化电子表格的这一功能。第 16 章将会介绍管理科学课件中的这些加载宏。

另外三类计算机仿真的软件是为不再适用电子表格的更复杂的案例设计的。一种类型是通用程序语言，如 C、FORTRAN、PASCAL 和 BASIC 等语言。这些语言（和它们的前身）由于其灵活性在早期被广泛运用于设计仿真程序。但是，由于耗时太长，所以现在已不常用。

第三类是通用仿真语言。这类语言提供了计算机仿真所需的许多特殊性能，所以大大减少了编程时间。它还提供了仿真模型所需的自然框架。虽然不如通用程序语言那样灵活，但它们能够设计出几乎所有的仿真模型。但是，运用这种语言需要一定的专业技能。

著名的通用仿真语言包括最新版本的 GPSS、SIMSCRIPT、SLAM 和 SIMAN。这些语言的初始版本可以分别追溯到 1961 年、1963 年、1979 年和 1983 年，但都经过了时间的检验并保留发展下来。

20 世纪 80 年代和 90 年代的主要发展是出现了第四种软件，即面向对象的仿真器（或简称仿真器）。这些仿真器都是为模拟特定类型的系统而设计的，例如生产、计算机和通讯系统。有一些是很专业的（如石油和煤气生产工程，核电厂分析或心脏血管生理学）。其目标就是通过菜单或图表来构建一个仿真模型，而无需编程。这一软件相对较易学习且模型设计与系统原型相似。

如果你打算模拟的系统与仿真器的类型正好符合，那么仿真器就能工作得非常出色。但是，这种符合特色的系统类型相对狭窄。所以，许多仿真器的缺点是它们只能仿真符合其自身要求的系统。现在，有些这一类型的仿真软件允许用通用编程语言加入一些与标准特征不同的系统特征。在处理一些较为复杂的系统时，经常会采用这一方法。

近年来计算机仿真的另一主要发展表现为计算机仿真动画性能的提高上。在动画系统中，系统的主要元素都可以用计算机上的图标表示，这些图标会根据计算机仿真系统状态的改变而改变形状、颜色或位置（这样的一个计算机仿真动画的例子就是 www.mhhe.com/hillier2e 上的互动管理科学模型或者你的 CD 中的排队模型）。现在市面上大多数的仿真软件都具有这一功能。而且，动画性能也做得越来越精致，甚至有些还有三维效果。

动画性能之所以流行是由于它可以使管理者和其他人员就计算机仿真模型（或者是计算机仿真运行）的要素进行有效的交流。这大大增强了计算机仿真的可信性。另外，动画性能也有助于调试计算机仿真程序。

### 第五步：验证计算机仿真模型的有效性

在程序构建调试好之后，下一步就是测试计算机仿真模型是否能够为系统提供有效的

---

① 这一部分并不是要介绍可用的个人仿真软件，如果要了解 58 个这样的软件的话，请查阅 2001 年 5 月的 IIE Solution 期刊上第 41～50 页上的仿真软件使用说明。

结果。尤其是,计算机仿真模型的系统性能指标是否接近于现实系统的性能指标?

由于大多数现实的系统并不存在,所以这个问题通常很难回答。而且,计算机仿真模型的目的通常是用来研究和比较不同结构的系统,从而有助于决定选择哪一种结构的系统能获得最佳的效果。

当然,也有些真实系统刚好是存在的。这样,现实系统的运行数据就可以与计算机仿真获得的相应的运行数据相比较。

在一些例子中,可以用数学模型来求解较为简单的系统模型。这样,这些数据结果也需要与计算机仿真模型获得的结果比较。

例如,在理发店这个案例中,赫尔卡特是惟一的一个理发师。因此,如 15.3 节所描述的(见标题为"测试仿真模型的有效性"小节),弗里特茨把模型产生的结果与现实中的数据相比较(由于是一个小型的案例,所以弗里特茨和赫尔卡特并没有花很多时间来研究实际运行的数据)。

当不能获得真实系统的数据与仿真结果比较时,可以通过现场实验来获取这些数据。这包括了构建一个系统的模型,然后让它实际运行。在计算机仿真完成之后,这个模型可以用来进一步调试,直到最后安装真实的系统。

另一种有效的测试方法是由有经验的操作人员来检查计算机仿真的结果,改变仿真系统来观察仿真结果的变化。即使在没有有效的性能指标可以用来作为评价基础的情况下,也可以从系统改变后的一些系统参数的变化数据来总结出一些规律性的结论。

观察计算机仿真动画性能的改变也可以作为另一种检验方法。一旦模型能有效运行起来,动画性能也能为管理层对计算机仿真的有效性做出判断。

## 第六步:计划执行仿真

到这一步你需要开始决定最后实行哪一种结构的系统。这往往需要循序渐进地进行,通过仔细的观察,结构的初始结果会帮助你决定哪一种结构的系统能够获得有效的数据。

在运行计算机仿真时,必须首先决定一些事项,如运行时间。要知道计算机仿真不可能获取系统运行的绝对真实的性能数值。每次计算机仿真运行只能看成是一次统计上的试验,通过这一试验得到仿真系统运行性能的统计观察数。增加系统运行的时间就能增加这些估计值的准确性。

这种计算机仿真的统计实验所遵循的统计学原理与为观察现实系统而进行实际实验所遵循的原理几乎没有什么不同[①]。所以,专业的统计师(或者至少具有统计背景的计算机仿真分析员)在这一步中至关重要。

## 第七步:执行仿真和结果分析

计算机仿真运行的结果为每个系统的运行性能提供了统计上的估算值。除了每个性能的点估计,还需要求得其置信区间来判断性能数值可能变动的区间范围(如前面案例研究所做的那样)。

这些结果可以清楚地显示出一个系统是否比其他系统优越。大多数情况下,可以找出

① 要了解相关统计理论的详细内容,请查看 A. M. law 和 W. W. Kelton 著的"仿真建模和分析"的 9~12 章,第 2 版。(纽约:McGraw-Hill,1991)。

一些较具有优势的系统以供选择。在后面的例子中，运行更长时间的计算机仿真来比较选择的系统。这样才能将最佳的系统挑选出来。

### 第八步：向管理层推荐决策建议

在完成分析之后，管理科学小组需要向管理层推荐决策建议。这通常需要书面报告或正式的口头陈述，向进行所研究系统决策的管理层人士汇报。

报告或陈述应该总结研究的进行情况，包括计算机仿真模型有效性的文件。计算机仿真的动画性能可能会更好地演示计算机仿真过程并增加其可信度。数字化的结果也需要包括在内，因为它是之所以推荐某一系统的理论基础。

在执行新系统的初期，管理层通常会让一些管理科学小组的人员参与实施，因为要通过他们向相关员工灌输新系统的知识。

### 问题回顾

1. 当开始计算机仿真时，管理科学小组需要与谁一起研究要解决的主要问题以及获得关于系统运行的详细的资料？
2. 用来建立计算机仿真模型的图表通常是什么？
3. 谁应该参与检验计算机仿真模型的准确性？
4. 通用仿真语言和面向对象的仿真器的差别是什么？
5. 当用动画性能来动态地显示计算机仿真时，系统的要素是怎样被表示出来的？
6. 在测试计算机仿真模型的有效性时，被讨论的特定问题是什么？
7. 计算机仿真模型可以被看作是什么类型的统计试验？
8. 计算机仿真可以获得什么类型的估计值？
9. 管理科学小组通常向管理层进行推荐的两种方法是什么？

## 15.6　本章小结

计算机仿真是当今最普及的管理科学技术之一，这是由于它是一个灵活、功能强大且直观的工具。它用计算机模拟一个完整的程序过程或系统。对于一个根据某一种或几种概率分布变化的系统来说，必须从这些概率分布产生随机观察数，以模拟系统中事件的发生（反向转换法使用随机数来产生随机观察数）。这样，就可以不需要实际地建立一个系统，并通过观察这一系统的运行获得有关系统运行性能的指标，从而节省了很大一笔开支。因此，可以在事先调查比较各种系统选择方案以选择最佳方案。

赫尔卡特理发店的例子说明了如何用计算机仿真来决定是否需要增加一个助理理发师。这是一个随机系统的例子，像许多类似例子一样，这个随机系统是排队系统，但却很难简单地用排队模型来分析。

这个案例也展示了一个仿真模型的主要组成成分，仿真模型代表了某一系统，并且描述该系统是如何运行的。模型中仿真时钟是一个关键性的模块，它是计算机程序中的变量，记录着到目前为止所经过的总的仿真时间。下一事件推进程序通过反复地将当前事件移到下一事件，从而推动了系统中的仿真时钟。

在短短的几秒或几分钟内，一个计算机仿真系统就能够模拟某一特定系统运行几年的情况。在仿真过程中，会产生一系列的关于仿真系统运行性能的统计观察数。这些观察数用来估计系统运行性能。通过仿真还可以获得这些性能值的点估计和置信区间。

由于计算机仿真应用的多样性，它已经被广泛运用到各个领域。其中的一些运用包括本章前几节介绍的随机系统，如排队系统、库存系统和计划评审技术。其他重要的应用领域还有生产系统、配送系统、财务风险系统、保健系统和其他服务领域的系统。

一些计算机仿真的研究可以由单独个人很快地完成，这个人或许就是公司的管理者。对于更广泛的研究，管理者也许会派员工代表或者甚至分配一整个管理科学小组进行项目的研究。在管理科学小组进行计算机仿真前，还要经过一系列关键的步骤。必须与管理者一起探讨，以了解他们是怎样看待该研究项目的一些问题的。收集有效数据通常是既累人又耗时的一项工作。另一项大任务是建立计算机仿真模型，检测它的准确性，然后再测试它的有效性。管理科学小组的又一重要决定是选择何种软件来进行计算机仿真。可以采用一些通用仿真语言。被设计用来仿真特定类型系统的仿真器可以在市面上买到。多数计算机仿真软件的开发商为计算机仿真提供了动画性能。动画性能对管理人员和主要的决策者演示仿真结果是很有帮助的，它为计算机仿真提供更高的可信度。

即使在计算机仿真程序已经开发完成之后，管理科学小组仍需要设计计算机仿真的统计实验。这样，计算机仿真才能正常进行得出需要的分析结果。最后，研究小组通常要准备一份书面报告或正式的口头演示，将结果汇报给管理层。

## 专业术语

**动画**(animation)：以动态的图形表示计算机仿真的运行过程。(15.5 节)

**应用导向的仿真器**(application-oriented simulator)：为了仿真某种特定类型的随机系统而设计的一种软件。(15.5)

**置信区间**(confidence interval)：某一项性能指标最有可能落在这一区间范围内。(15.3)

**通用的仿真语言**(general-purpose simulation language)：用于编写各种类型的仿真模型的通用的程序语言。(15.5)

**反向转化法**(inverse transformation method)：根据某一概率分布产生随机观察数的方法。(15.1)

**下一事件时钟推进法**(next-event time advance)：在仿真系统中，通过不断地从当前的事件移动到下一发生事件，从而不断地推进时钟的方法。(15.2)

**点估计**(point estimate)：某一系统性能指标的最佳的单个数值的估计。(15.3)

**随机数**(random number)：根据 0－1 区间上的平均分布产生的随机观察数。(15.1)

**仿真时钟**(simulation clock)：计算机程序中用来记录仿真事件的变量(15.2)

**仿真模型**(simulation model)：模拟系统以及系统运行状况的一种模型。(15.2)

**仿真器**(simulator)：应用导向的仿真器的简称。(15.5)

**系统状态**(state of the system)：描述系统当前状态的关键信息。(15.2)

**随机系统**(stochastic system)：根据一种或几种概率分布运行的系统。(15.1)

## 本章管理科学课件的学习辅助

**"Ch. 15—计算机仿真：基本概念"Excel 文件：**

掷币游戏的例子

任重公司的例子(3)

排队仿真器

**Excel 加载宏:**
Crystal Ball(下章中重点介绍)
RiskSim

**程序(Routine):**
排队仿真器(Excel 文件)

**互动管理科学模型:**
排队模型

*M/G/*1 排队模型的模板
赫尔卡特理发店案例研究

# 习 题

一些问题或问题(或者问题的一部分)当中的符号所表示的意义如下:

E*:使用 Excel。

Q*:使用排队仿真器。

问题的序号前标有星号表明该问题至少有一部分的答案在后面给出。

15.1.* 运用图 15.1 单元格 C13:C18 中的随机数为下面 6 种情况产生 6 个随机观察数:

a. 投掷一枚硬币。

b. 一个投篮手 60% 的时间命中,而 40% 的时间投空。

c. 随机到达的一辆汽车发现交通灯的颜色为绿色的时间为 40%,黄色 10%,而红色 50%。

15.2. 重新考虑 15.1 中的掷币游戏,用计算机仿真分析图 15.1、图 15.2 和图 15.3。

a. 模拟这一游戏,投掷硬币直到游戏结束。将每次投掷的结果记录在图 15.1 的 B、D、E、F 和 G 列中。如果这是一次实际的比赛的话,你会赢或损失多少?

E* b. 回顾图 15.1 的电子表格模型,通过使用 Excel 的 VLOOKUP 函数而不是 IF 函数来产生随机的观察结果,然后用计算机仿真这一游戏。

E* c. 运用修正过的电子表格模型产生如图 15.2 的重复 14 次的数据表。

E* d. 重复 c 中的内容,迭代次数为 1000(如图 15.3)。

15.3. 每组将硬币投掷三次,正面在上的次数为 0,1,2,3 的概率分别为 1/8,3/8,3/8 和 1/8。这样投掷三组后,平均下来,有一组没有正面朝上的,三组有一个正面朝上,三组有两个正面,而另一组有三个正面。

a. 投掷硬币共 24 次,并将之分为 8 组,记下没有正面朝上和 1、2、3 个正面朝上的次数。

b. 使用图 15.4 中 C 列中按次序给出的随机数,以及图 15.5 的 C5:C13 单元格中的数据仿真 a 中操作,并记录仿真结果。

E* c. 为三次掷币的游戏在电子表格上进行计算机仿真,记录正面朝上的次数,仿真一次。

E* d. 利用电子表格仿真 8 次,生成数据表。将获得的正面朝上的概率分布与投掷三次的概率分布比较。

E* e. 重复 d 中的内容,迭代次数为 800。

15.4. 天气可以看作是一个随机系统,因为每天的天气是随机变化的。假设某一地方的天气变化服从下面的分布:

假如今天下雨,明天也下雨的概率为 0.6,今天晴朗,明天也晴朗(不下雨)的概率为 0.8。

a. 使用图 15.1 的 C17:C26 单元格中的数据,模拟 10 天的天气变化情况,第一天天气晴朗。

E* b. 运用 Excel 产生随机数,在电子表格上将 a 中的内容模拟出来。

15.5.* 掷骰子的游戏要求游戏者一次或多次地投掷两枚骰子,直到最后决定输赢。如果第一次掷出和为 7 或 11 的组合,或者第一次掷出和为 4,5,6,8,9 或 10,而在掷出和为 7 之后,第一次掷出的和数接着出现。

E* a. 将这一掷骰子的游戏在电子表格上建立仿真模型,运行一次。

E* b. 运行 25 次。

c. 分析 25 次仿真结果,判断游戏者获胜的次数。

15.6. 杰斯卡·威廉是一家百货店厨房用品部的经理,她感到炉子的库存超过了实际需要。在调整库存水平之前,她记录了每天售出的炉子数量,25 天的记录如下所示:

| 售出的数量 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 天数 | 4 | 7 | 8 | 5 | 1 |

a. 从这些数估计出每天销售量的概率分布。

b. 计算 a 中概率分布的均值。

c. 描述如何用随机数仿真每天的销售量。

d. 使用随机数 0.4476、0.9713 和 0.0629 来模拟三天的销售量,将获得的均值与 b 中的进行比较。

E* e. 为每日的销售量建立电子表格的仿真模型,仿真 300 次运行的结果,得到 300 天销售量的均值。

15.7.* 运用反向转化法,根据下面(-10,40)区间上的平均分布产生三个随机观察数,并使用三个随机变量 0.0965,0.5692,0.6658。

a. 用图解法分析这一问题。

b. 用解析法求解。

c. 输入 Excel 能够识别的公式来产生随机的观察数。

15.8. 爱蝶自行车店的自行车修理业务不断扩大,崔萨在接待台工作,负责接待前来修理和拿回自行车的顾客以及收银。她总结出接待每个顾客的时间服从 3 到 8 分钟之间的正态分布。

运用下面描述的反向转化法模拟 5 名顾客的服务时间,并使用这 5 个随机数:0.6505, 0.0740, 0.8443, 0.4975, 0.8178。

a. 运用图解法。

b. 运用解析法。

c. 计算出五次服务时间的平均数,并与服务时间分布的均值比较。

E* d. 运用 Excel 产生 500 个随机观察数,计算平均值,并与分布的均值比较。

15.9.* 重新考虑前面提到过的爱蝶自行车店的例子。所有的自行车中 40% 仅需要稍微地修理一下就可以了,修理时间服从(0,1)小时的平均分布。60% 的自行车需要大修理,修理时间服从(1,2)小时间的平均分布。使用各选项中要求的方法估计出所有自行车修理时间的概率分布的均值。

a. 运用随机数 0.7256,0.0817,0.4392 进行仿真,其中哪些自行车需要大修,哪些小修。然后运用随机数 0.2243,0.9503,0.6104 仿真这三辆自行车的修理时间,计算出平均时间以估计修理时间概率分布的均值。

b. 画出所有自行车修理时间概率分布的累积分布函数(CDF),(提示:在一小时时,CDF=0.4)。

c. 运用反向转化法,并使用 a 中所列的后一组随机数来产生 b 中考虑的总分布的随机观察数。计算出观察数的平均值以估计总分布的均值。

d. 使用新的随机数 0.7757,0.0497,0.3896 重复 c 中的内容。

e. 综合 c,d 中的随机观察数,计算出 6 个观察数的平均值以估计总分布的均值(这种方法称为增补随机数法)。

f. 修理时间概率分布的实际均值为 1.1,将这一均值与 a,c,d 和 e 中求得的相比较,解释为什么会得到如此准确的答案。

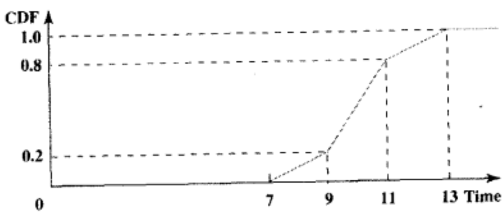
E* g. 在电子表格上建模,仿真 e 中介绍的增补随机数法。使用 300 个随机数产生 b 中概率分布的 600 个随机观察数,计算这些随机观察数的平均值,并与实际均值比较。

15.10. 通用公司的员工接受的是威尼特(Wellnet)公司提供的一种集体保险。在过去的一年里,40% 的员工没有申请保险赔偿,40% 的员工申请小额赔偿,而 20% 的员工申请了高额赔偿。小额赔偿金服从(0,$2000)的平均分布,高额赔偿金服从($2000,$20000)的平均分布。

在这一经验数据的基础上,威尼特公司正在与通用公司商讨下一年的保险金问题。假设你是负责人,你将如何估计通用公司每名员工的保险金的平均成本。

根据问题 15.9 的做法，其中员工申请的赔偿金的大小（如果不索赔就为零）与 15.9 中自行车的修理时间的作用是一样的（f 中每名员工申请赔偿金的总概率分布的均值为 2600 美元）。

15.11. 理查德·科林是理查德轮胎服务店的经理，他想用计算机仿真他的店的经营状况。计算机仿真中要考虑的一项时间是汽车轮胎的安装（包括轮胎的平衡）。理查德估计这一时间的概率分布的累积分布函数（CDF）如下图所示。




a. 运用反向转化法，并使用下面的这些随机数 0.2655，0.3472，0.0248，0.9205，0.6130 产生这一分布的 5 个随机观察数。

b. 运用一个套人的 IF 函数写出 Excel 中的等式，使得 Excel 可以据此产生该分布的随机观察数。

15.12.* 考虑具有如下累积分布函数的概率分布：

$$F(x) = x^2 \qquad 如果\ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

为了进行计算机仿真，该如何产生这一分布的随机观察数。

a. 写出每个随机观察数以随机数 $r$ 表示的表达式。

b. 使用下面 5 个随机数 0.0956，0.5629，0.6695，0.7634，0.8426 产生 5 个随机观察数。

c. 运用反向转化法产生了这一分布的 3 个随机观察数，分别为 0.09，0.64，0.49。那么产生这三个随机观察数的随机数是哪几个。

d. 写出 Excel 可用以产生随机观察数的公式。

15.13. 威廉·格林汉娱乐公司将开设一个订票办公室，在娱乐节目开始之前，顾客可以先订票。通过计算机仿真来确定该办公室需要一名还是两名办公员。

在仿真该订票办公室第一天的运营状况时，第一位顾客在开门之后的五分钟到达，接下来 4 位顾客到达的时间间隔按先后次序为 3、9、1 分钟和 4 分钟。之后经过很长时间等待才来顾客。前五位顾客的服务时间按先后次序分布为 8、6、2、4 分钟和 7 分钟。

a. 对于只有一位办公员的情况，画出如图 15.14 所示的图形，显示出在这一段时间内在订票处的顾客数。

b. 利用这一图形估计出排队系统的通常的性能指标 $L, L_q, W, W_q$ 和 $P_n$（见 14.3 节中所介绍的）。

c. 在有两个办公员的情况下重复 a 中的内容。

d. 在有两个办公员的情况下重复 b 中的内容。

15.14. 罗思贝尔公司雇用员工负责机器的维修，管理层想要通过计算机仿真来确定员工的数量，可供考虑的人数为 2，3 和 4。该修理组修理一台机器的时间服从 0 到两倍均值间的平均分布，而均值的大小取决于修理组员工的数量。两个员工的情况下，均值为 4 小时，三个员工 3 小时，四个员工 2 小时。机器出现故障的时间服从均值为 5 小时的指数分布。当一台机器出现故障时，必须进行修理，管理层要求修理的平均等待时间不能超过 3 小时，同时管理层也要求机修小组的员工数不要多于必需的数量。

a. 为这个问题开发仿真模型，描述出 15.2 节中介绍的仿真模型的 6 个基本模块。

E* b. 在电子表格上建模，仿真估计机器修理前的平均等待时间。设定机修组的员工数 1，2 和 3，仿真在出现 100 次机器故障时间内的运行状况。结果表明多少员工数为好？

c. 设定机修组的员工数 1，2 和 3，运用排队仿真器仿真在出现 1000 次机器故障时间内的系统运行状况。

d. 设定机修组的员工数 1，2 和 3，运用本章 Excel 文件中的 $M/G/1$ 排队模型的 Excel 模版，来解析等待时间的期望

值。应该雇用多少员工？

15.15. 考虑在赫尔卡特理发店不用助手的仿真模型中前100分钟的计算机仿真，见图15.13和图15.14。现在加入一个助手，使用图15.13同样的间隔时间（同样的次序），以及同样的服务时间（同样的次序）仿真这一情况下的运营状况。

a. 对于前100分钟进来的每5位顾客，新的等待时间是多少。利用这一结果估计等待时间的期望值 $W_q$。

b. 作出图15.14在这一情况下的新图，表明在这100分钟内理发店顾客人数的变动情况。

15.16. 在运行单服务器的排队系统的计算机仿真时，在前10分钟，系统中的顾客数为0，接下来的17分钟1个，再接下来的24分钟2个，依次接下去的15分钟1个，16分钟2个，18分钟1个。在100分钟之后，顾客人数又为0，基于这些数据，进行下面的分析（使用14.3节中介绍的排队模型）。

a. 作出如图15.14的图形，表现系统中顾客数的变化。

b. 估计 $P_0, P_1, P_2, P_3$。

c. 估计 $L$ 和 $L_q$。

d. 估计 $W$ 和 $W_q$。

15.17. 一家大银行，贝斯特银行，想要在一个小镇开一个支行办公室。经过初步的分析表明需要用两名出纳（两个服务窗口），但是这一结果还要进一步分析。

市场调查表明这一新支行将会吸引大量的银行业务，平均每分钟一个顾客。因此，顾客的到达时间的平均间隔可认为是一分钟。

因为银行周围没有停车场，所以必须提供一个仅供银行顾客停车的停车场。而停车场必须有一位服务员负责检查来客是否可以在此停车。检查过程至少为0.5分钟，因此顾客进入银行的时间间隔至少为0.5分钟，而时间间隔超过0.5分钟的估计服从均值为0.5的指数分布。这样，总的时间间隔服从转换的指数分布，均值为(0.5+0.5)=1.0（转换的指数分布是在一般的指数分布上加上一个常数）。

根据过去的经验，出纳的服务时间因顾客的不同而有很大的差异，但是均值大致为1.5分钟。服务时间近似地服从均值为1.5的爱尔朗分布，形状系数 $k=4$，这样标准差为0.75分钟（是指数分布均值的一半）。

这些数据表明出纳的工作将会有点紧张，必须要处理好对每个顾客的服务。但是管理层同时又要求顾客在获得服务之前不至于等得太久，因此运用计算机仿真来测试这一系统的运行性能指标。

Q* a. 运用排队仿真器，仿真在两名出纳的情况下，5000名顾客到达时间内系统的运行性能指标。

Q* b. 在有三名出纳的情况下重复a中的要求。

Q* c. 如果业务量比预算要多很多，会产生怎样的后果，进行灵敏度分析。假设顾客到达的平均时间间隔仅为0.9(0.5+0.4)，评价在这种情况下使用两个出纳和三个出纳的系统运行状况。

d. 假设你是银行的经理，利用仿真结果作为决策的依据，你将会采用多少位出纳，为什么？

15.18.* 哈夫(Hugh)修理店专业修理德国和日本汽车，店内有两台机器，一台用于修理德国汽车，一台用于修理日本汽车。修理一辆汽车的时间服从均值为0.2天的指数分布，该店的修理业务不断增长，特别是修理德国车的数量更是大增。哈夫预计下一年德国车将以平均每天四辆的速度随机到达，因此，德国车到达的时间间隔服从均值为0.25天的指数分布。而日本车预计每天到达两辆，即到达时间间隔服从均值为0.5的指数分布。

E* a. 建立电子表格模型仿真估计下一年每种车在修理之前的平均等待时间。

E* b. 仿真有100辆德国车到达的时间段的系统状况。

E* c. 仿真有100辆日本车到达的时间段的系统状况。

Q* d. 运用排队仿真器仿真b和c中有10000辆车到达的情形。

Q* e. 哈夫正在考虑是否要再雇用一名修理德国车的技工，这样两辆德国车就可以同时得到修理（一位技工修理一辆车）。运用排队仿真器仿真 10000 辆德国车到达的时间段内系统的运行状况。

Q* f. 另一种方法是将现在的两名技工培训成为能够修理两种车的多面手，这样，修理时间会增加 10%，从 0.2 增加到 0.22 天。运用排队仿真器仿真两种车型各有 20000 辆到达时间段内系统的运行状况。

E* g. 因为到达时间和服务时间均为指数分布，所以可以用 14.5 节和 14.6 节中介绍 $M/M/1$ 和 $M/M/s$ 排队模型解析上面的各种情况。运用第 14 章 Excel 文件中提供的 $M/M/s$（$s=1$ 或 2）排队模型计算 b 至 f 中各种情况下的等待时间的期望值 $W$，并将解析解与计算机仿真得到的估计值比较。说明了在计算机仿真中，需要仿真多少辆车到达的时间。

h. 基于上面的分析结果，如果你是哈夫的话，你会选择哪一种方案，为什么？

15.19. 伟斯塔普林特公司（Vistaprint）为电脑厂商生产显示器和打印机，过去只对产品进行抽样检查。而现在要求在产品完工之后，对所有的产品都要进行检查。在这一计划下，所有的显示器和打印机在完工之后，都必须拿到检验台上。显示器的到达时间服从（10，20）分钟的平均分布，打印机的到达时间间隔为常数 15 分钟。

检验台有两个检验员，分别检验显示器和打印机。检验时间均服从均值为 10 分钟的指数分布。

在实施新计划之前，管理层希望能够知道显示器和打印机在检验之前的等待时间是多长。

E* a. 建立电子表格模型，仿真估计显示器和打印机（在检验之前和检验之后）平均的等待时间。

E* b. 仿真 100 个显示器到达时间段内的情况。

E* c. 对于打印机，重复 b 中的要求。

Q* d. 运用排队仿真器重复 b 和 c 中内容，要求有 10000 台的检验机器。

Q* e. 管理层打算给检验员配备新的检验设备，该设备不会改变检验时间的均值，但是可以减少时间分布的方差。两种产品的检验时间都服从均值为 10 分钟爱尔朗分布，形状系数为 4。在这一方案下，运用排队仿真器，重复 d 中的要求，并与 d 中的结果比较。

Q* 15.20. 考虑 15.2 节中引入的案例。在观察了赫尔卡特理发店的运营状况之后，弗里特茨认为他叔叔在服务时间上的估计是很不可靠的，赫尔卡特估计服务时间服从（15，25）分钟之间的平均分布。基于收集到的数据，弗里特茨认为这一服务时间的最佳分布是均值为 20 分钟的爱尔朗分布，形状系数为 8。

a. 将新的服务时间分布代入，重复前面弗里特茨用来产生图 15.15（均值为 30 分钟的到达时间分布）的仿真过程。

b. 将新的服务时间分布代入，重复前面弗里特茨用来产生图 15.17（均值为 14.3 分钟的到达时间分布）的仿真过程。

15.21. 对于 14.4 节中引入的杜皮特（Dupit）公司的案例，通过运用下面的简化近似，管理科学小组就可以应用一系列的排队模型。除了工程副总裁提出的方法，小组假设修理一台机器的总时间（包括到机器所在地的时间）服从均值为两小时（1/4 工作日）的指数分布。但是，小组对于这一分布持怀疑态度，因为修理的时间通常都不会太短。在正式修理开始之前，还需要包括前往时间以及一定的启动时间，总计约为 40 分钟（1/12 工作日）。

计算机仿真比运用数学模型优越的一个显著特性是不需要做这些假设。例如，在排队仿真器中，可以使用转换的指数分布，该分布包含最小时间以及符合某一均值的指数分布的附加时间（商业版的计算机仿真所包含的选项还要多很多）。

使用计算机仿真来优化 Excel 模版

排队模型获得的结论，数据在下面给出。修理时间服从转换的指数分布，最小值为1/12工作日，附加的时间服务均值为1/6工作日（80分钟）的指数分布。通过仿真25000次到达事件，比较点估计 $W_q$（该案例的主要系统性能指标）和排队模型求得的 $W_q$ 的值。

Q* a. 图14.5

Q* b. 图14.6

Q* c. 图14.9

Q* d. 图14.10

e. 对于仿真模型的结果与服务时间假设的灵敏度分析可以总结出怎样的规律。

## 案例15.1 刨工的规划

这是考尔·斯切林第一次被楼上的重要人物召见，他希望他以后再也不会被召见了，因为他不喜欢这种压力。作为工厂刨工的领班人，他已经承受了够大的压力了，上个月的事情现在回想起来还像是一场噩梦。

值得庆幸的是，事情并没有考尔所想像的那么糟。公司的大人物实际上是很和善的，他们说他们希望听一听考尔关于一个问题的看法，这个问题会影响整个工厂。问题的起源是因为刨工跟不上工作的进度，工作积压问题很严重。因为计划滞后，就影响了接下来的生产运作，增加了过程中的库存以及设备闲置和开工不足的成本。他们知道这不是考尔一个人的责任。他们想了解他关于刨工部门该做如何的调整来解决这个瓶颈的建议。想像一下，那么多高等商业学府毕业的大人物居然向他这个几乎高中都还没毕业的人询问建议，这真是太不可思议了，他急不可待地想要回去告诉他的妻子。

这次与高层管理者的会面使他有机会解决两个他一直头痛的问题。第一是他一直想再多招一个刨工，他已经多次向他的老板提议此事，但一点结果也没有。老板总是跟他说原来的那些人都还没有百分之百地利用起来，又怎么可以再增加人手呢。唉，他的老板怎么会知道在工作任务重的时候，工作中有多大的滞后问题。

令他头痛的第二个问题是工作的不稳定性，工作量的最高峰和最低谷都出现在他的部门里面。有时候大量的工作一起下来，就会造成处理不及，而工作滞后。而有时候又找不到工作可做，大家都在混时间。如果说其他部门能够保持工作量的稳定提供，许多滞后问题就不会存在。

考尔很高兴在他说明这些问题时，管理人员都点着头，似乎他们都同意他的看法。他们似乎是很理解他的，也真诚地向他表示谢意。或许这一次会采取一些解决问题的方法了。

考尔和高层管理者讨论的主要内容如下所述。公司有两个刨工负责将光滑的面板切成大块的铸件，现在使用刨工的主要目的有两个，一是加工大型水压机的上表面，二是加工推土设备动力机的配对面。每一种工作的加工时间根据所加工产品上转换器的数量多少不同而不同。每件产品的加工时间服从转换的指数分布，最小是10分钟，超过10分钟的时间为均值为10分钟的指数分布（本章的Excel文件里的排队仿真器中可以选择这一分布方式）。

铸件以一个一个的单位到达刨工，滚筒的铸件以每小时平均两个的速度随机到达，水压机铸件也同样是以每小时两个的速度随机到达。

在考尔建议的基础上，为了解决这一生产的瓶颈问题，管理层要求管理科学小组分析一下下面两个解决刨工部门瓶颈的方案。

> 方案1：增加一名刨工。所增加的成本估计为（包括资金成本）每小时30美元（这一估计假设增加一名刨工后，所有刨工的工作时间是不变的）。
>
> 方案2：减少加工件到达的时间差，这样滚筒铸件和水压机铸件交替着平均15分钟到达一个。这需要调整原来的工作流程，增加的成本为每小时60美元。

这两个方案不是互斥的，因此可以综合使用。

据估计在等待时间不是过长的情况下（包括加工时间），滚筒铸件每等待一小时，成本为200美元，而水压机铸件为每小时100美元。为了避免等待时间过长，刨工的加工遵循的是先到先加工的原则。

管理层的目标是要尽可能地减少每个小时的总成本。

运用计算机仿真，评估各种可能的方案，包括现行的做法以及所提议方案的各种组合。然后向管理层提出你的建议。

是否还有其他什么方法可以考虑呢?

## 案例 15.2　减少在制品库存(修订版)

再考虑案例 14.2。这个案例中目前的推荐系统是在排队模型的辅助下,用来分析决定如何尽可能多地减少在制品库存。然而,通过在你的管理课件中的排队仿真器的帮助下应用计算机仿真,这些相同的排队系统也可以用来进行有效的分析。

使用计算机仿真来进行这个案例中需要的所有分析。

PDG

CHAPTER

# 16 使用 Crystal Ball 进行计算机仿真

## 学习目标

学习完本章后,你将能够:

1. 描述使用 Crystal Ball 进行计算机仿真的作用。
2. 使用 Crystal Ball 执行各种采用标准 Excel 表格不能仿真的基本计算机仿真。
3. 当进行计算机仿真时,解释由 Crystal Ball 仿真所生成的输出结果。
4. 使用 Crystal Ball 的一个特性,当达到预期的精度时使其能够终止仿真的运行。
5. 当使用 Crystal Ball 时,描述多种能够运用于计算机仿真的概率分布的特点。
6. 使用 Crystal Ball 程序,确认最能拟合历史数据的连续型分布函数。
7. 使用 Crystal Ball 的一个特性,生成可辅助决策的决策树和趋势图。
8. 使用 Crystal Ball 的一个 OptQuest 工具自动搜寻一个仿真模型的最优解决方案。

前一章里表述了一些基本的计算机仿真概念。它的重点是使用电子表格模型来进行基本的计算机仿真。除了使用排队仿真器来处理排队系统外,在第 15 章中所有的计算机仿真都仅仅使用了标准的 Excel 软件包来执行。

尽管标准的 Excel 软件包有一些基本的能力,近年来一些强有力的 Excel 加载宏的开发大大增强了其软件的仿真能力,这一进展令人振奋。一个特别流行的加载宏是 Crystal Ball,由 Decisioneering 公司研究开发。Decisioneering 公司进一步推出了 Crystal Ball 2000(专业版),在管理科学课件中已经包含了有 140 天的试用期的这一加载宏。除了其强大的执行计算机仿真的功能外,这一高级的Crystal Ball版本还包含了两个其他的模型。一个是

CB 预测器,是用来从时间序列数据生成预测的,正如 13.4 节"用 CB 预测软件进行时间序列预测"所描述和图示的。另一个是 OptQuest,可使得 Crystal Ball 从一系列仿真运行结果中自动搜索仿真模型的最优解。

这一章主要焦点在于描述和图例说明使用 Crystal Ball,包括 OptQuest 模型,进行仿真生成的电子表格模型的优势(其他的用于电子表格仿真模型的 Excel 加载宏同样也提供了一些相同的功能)。16.1 节开始介绍了一个案例,它在 16.7 ~ 16.9 节中会做一定修改而重新被提及。16.2 ~ 16.6 节提出了几个其他的重要商业难题的案例,它们都可以使用 Crystal Ball 计算机仿真来得到有效的解决。16.7 节集中在如何选择输入计算机仿真的正确的概率分布函数。16.8 节则描述了决策表(其作用很像数据表和管理科学课件中的方案表)如何构建和应用在仿真问题决策的制定中。最后,16.9 节讨论了使用 OptQuest 所提供的最强有力的最优化工具。

## 16.1 案例研究:弗瑞迪报童问题

这个案例主要考虑了位于大城市的著名城镇的一个书报摊。这个书报摊在那儿的时间已经比人们所能记起的时间还要长。它由一个叫做弗瑞迪的人经营(没人知道他的名字)。他的许多顾客都很有感情地称他为弗瑞迪报童,尽管他明显比这些顾客中的大多数还要年长。

弗瑞迪出售很多种报纸和杂志。最昂贵的报纸是一份叫做《金融日报》的大型全国性日报。我们的案例也涉及了这份日报。

### 弗瑞迪报童问题

在一大早,分销商就会把每天的《金融日报》送到书报摊。在每天结束时,任何一份未售出的报纸都会在第二天早上被退还给分销商。然而,为了鼓励书报摊多订购报纸,这个分销商为未出售的报纸给予小额的退款。

下面是弗瑞迪的成本数据。

弗瑞迪为每份报纸支付 1.50 美元的成本费用。
弗瑞迪以 2.50 美元出售一份报纸。
弗瑞迪获取每份未出售报纸 0.50 美元的退款。

部分由于退款的原因,弗瑞迪总是订购了过多的报纸。然而,他已经开始关心购买过多报纸而导致必须退还未出售的报纸,特别是近来这种退还报纸的情况几乎天天发生。他现在认为,如果他订购最小数量的报纸并节省这些成本费用,可能会经营状况好些。

为了调查这个想法,弗瑞迪一直在记录他的日销售额。下面是他所发现的情况。

- 弗瑞迪每天的销售额都在 40 ~ 70 份之间。
- 发生在 40 ~ 70 份的份数频率大致上是相等的。

> 弗瑞迪问题涉及确定其每天平均利润最大化的订购数量的决策。

需要决定每天向分销商订购多少份报纸。他的目标是最大化自己的每天平均利润。

如果你先前已经在运营管理中研究过库存管理,那么你可能会意识到这个问题是现在所谓的报童问题的一个实例。实际上,我们运用一个基本的库存模型就可以分析在第 19 章中相同案例的简化版本(在 CD-ROM 中的补充章节中的一个)。但在这一章中我们会使用计算机仿真来

分析这个问题。

## 此问题的电子表格模型

图 16.1 显示了此问题的一个电子表格模型。在给定单元格 C4:C6 中的固定数据之后,决策变量就是在单元格 C9 中的订购数量(数字 60 已经作为第一个合理值输入到了这个单元格中)。这张图的底部则给出了用来计算输出单元格 C15:C17 的公式。这些输出单元格然后会用来计算输出单元格(C19)的利润。

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Freddie the Newsboy | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | Data | | | |
| 4 | | Unit Sale Price | $2.50 | | | |
| 5 | | Unit Purchase Cost | $1.50 | | | |
| 6 | | Unit Salvage Value | $0.50 | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | Decision Variable | | | |
| 9 | | Order Quantity | 60 | | | |
| 10 | | | | | | |
| 11 | | | Simulation | | Minimum | Maximum |
| 12 | | Simulated Demand | 55 | *Uniform* | 40 | 70 |
| 13 | | Demand (rounded) | 55 | | | |
| 14 | | | | | | |
| 15 | | Sales Revenue | $137.50 | | | |
| 16 | | Purchasing Cost | $90.00 | | | |
| 17 | | Salvage Value | $2.50 | | | |
| 18 | | | | | | |
| 19 | | Profit | $50.00 | | | |

| | B | C |
|---|---|---|
| 11 | | Simulation |
| 12 | Simulated Demand | 55 |
| 13 | Demand (rounded) | =ROUND(SimulatedDemand,0) |
| 14 | | |
| 15 | Sales Revenue | =UnitSalePrice*MIN(OrderQuantity,Demand) |
| 16 | Purchasing Cost | =UnitPurchaseCost*OrderQuantity |
| 17 | Salvage Value | =UnitSalvageValue*MAX(OrderQuantity-Demand,0) |
| 18 | | |
| 19 | Profit | =SalesRevenue-PurchasingCost+SalvageValue |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| Demand | C13 |
| OrderQuantity | C9 |
| Profit | C19 |
| PurchasingCost | C16 |
| SalesRevenue | C15 |
| SalvageValue | C17 |
| SimulatedDemand | C12 |
| UnitPurchaseCost | C5 |
| UnitSalePrice | C4 |
| UnitSalvageValue | C6 |

**图 16.1** 应用计算机仿真来解决弗瑞迪报童问题的电子表格模型。假设单元格是仿真的需求(C12),预测单元格是利润(C19),决策变量是订购数量(C9)。

在这个电子表格中惟一不确定的输入数据就是单元格 C12 中每天的需求。这个数据可以是 40 ~ 70 之间的任意数值。由于在数字 40 ~ 70 之间发生的频率大致相同,所以每天需求量的概率分布函数可以合理地假设为 40 ~ 70 之间的均匀分布,正如单元格 D12:F12 中所表示的。由于不能在仿真需求(C12)中恒定不变地输入单一数值,Crystal Ball 所做的就是在这个单元格中输入概率分布函数(在使用 Crystal Ball 之前,一个任意的数值 55 已经临时输入到如图 16.1 里的这个单元格中)。通过使用 Crystal Ball 从这个概率分布函数中产生随机观察数,电子表格就可以按正常方式计算输出单元格了。每仿真一次 Crystal Ball

都会把随机观察数作为一个试验值来执行运算。通过用户指定要进行的仿真次数(几百次或者几千次),计算机仿真就可以产生相同数目的输出单元格中的随机观察数值。Crystal Ball 记录这些输出单元格的信息(弗瑞迪的每天利润),最后就可以生成各种方便的表格,并显示在这个基本的概率分布函数下所得到的弗瑞迪每天利润的估计值(后面会详细说明这点)。

> Excel 的 ROUND($x$,0)函数就是生成最接近于 $x$ 的整数值。0 表示不管小数点后有多少位数字都可以使用该函数。

由于均匀分布是一种连续分布,在仿真需求中(C12)的数值可能会是 40 和 70 之间的任意数值,包括非整数值。可是,每天的实际需求肯定是售出《金融日报》的整数份。因此,Excel 的 ROUND 函数就是用来生成最接近仿真需求(C12)的整数值,从而获得了单元格 C13 中的真实的需求。这就是在用来计算销售收入(C15)和残值(C17)公式中用需求值(C13)来代替仿真需求(C12)的原因。

## Crystal Ball 的应用

在图 16.1 中必须采用以下四步来使用 Crystal Ball 执行计算机仿真。它们是:

1. 定义随机的输入单元格。
2. 定义预测的输出单元格。
3. 设定运行参数。
4. 运行仿真。

我们现在就依次来描述每一步操作。

### 定义随机的输入单元格

> 在定义一个假设单元格之前,这个单元格必须包含有数值。由于在实际的仿真中不使用它,所以可输入任何的数值。当仿真完成后,Crystal Ball 会存储相同的数值。

一个随机的输入单元格是一个用来输入随机数值的单元格(比如《金融日报》的每天需求)。因此,一个假设的概率分布函数必须被输入到这个单元格中来代替恒定不变的输入单一数值。在图 16.1 中惟一的一个随机输入单元格是仿真需求(C12)。Crystal Ball 将每一个这样的随机输入单元格都作为了一个假设单元格(assumption cell)。

下面的程序就是用来定义假设单元格的。



图 16.2　Crystal Ball 工具条。

### 定义假设单元格的步骤

1. 通过点击,选择一个单元格。
2. 如果这个单元格没有包含有一个数值,那么就任意输入一个数值。
3. 点击如图 16.2 所示的 Crystal Ball 工具条的第一个按钮(Define Assumption)[或者从单元格菜单中选择定义假设(Define Assumption)选项]。
4. 通过点击选择图 16.3 所示的分布图例(Distribution Gallery)中相应的分布曲线,选

择一个概率分布函数输入到这个单元格中。

5. 点击确定按钮(或者双击这个分布函数曲线),从而生成了一个选定分布函数的对话框。
6. 使用这个对话框来输入此分布函数的参数,可以关联到电子表格中包含有这些参数数值的单元格。如果有需要的话,可以在假设单元格输入一个名字标签(如果这个单元格的相邻单元格中已经有名字,那么这个名字就会在对话框中显示)。
7. 点击确定。

在上面的第4步中提到的分布图例提供了17种概率分布函数用来选择。在图16.3中只显示了12种分布函数,但是另外的5种可以通过点击"更多"(More)按钮来获取(在16.7节中将会重点介绍如何选择正确恰当的分布函数)。

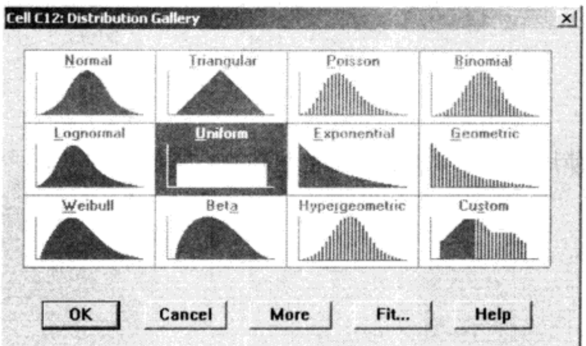



图16.3 Crystal Ball 分布图例对话框。在这12种显示的分布以外,还有5种分布可以通过点击"更多"按钮来获取。

> 不用输入原始数值,使用关联单元格作为概率分布函数的参数(例如图16.4所示的输入 =E12 和 =F12)。这样在改变参数值时就可以在电子表格中而不用在 Crystal Ball 的对话框中修改。

在弗瑞迪的案例中,双击分布图例中的均匀分布函数就会生成如图16.4所示的均匀分布对话框,可用来输入分布的参数。对于每一个参数(最小值和最大值),我们都可以输入图16.4所示的公式将其关联到电子表格中的单元格 E12 和 F12。当用这种方式设定关联单元格时,我们就要在"静态"(static)和"动态"(dynamic)按钮上做一个选择,可以点击分布曲线下所显示的选择按钮来选取。静态选项表示每一个关联的单元格只被估计一次,在仿真开始时,在那一点的每一个参数值(最小值和最大值)会被用来进行所有的仿真试验运行。当每个单元格的参数数值都不发生变化时这是非常好的,在这个例子中,图16.4就选择了静态按

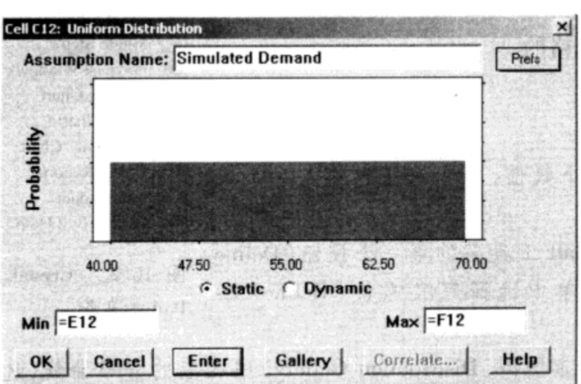



图16.4 Crystal Ball 均匀分布函数对话框。这里用来把单元格 E12 和 F12 中的数值作为参数值的均匀分布函数输入到图16.1中电子表格的假设单元格(C12)中。

钮。动态按钮表示每一个关联的单元格都可能在每次单独的仿真时会被重新估计，如果每个单元格的参数数值因为其所取决于的假设单元格而可能变化时，这是非常有必要的（在 16.6 节中会出现这种情况）。

**定义预测的输出单元格**

Crystal Ball 把计算机仿真的输出单元格作为预测，因为它是在执行仿真时预测基本的概率分布函数下的系统（现在正在被仿真的）执行情况。这样，计算机仿真用来预测性能指标的每一个输出单元格就成为了预测单元格。计算机仿真的电子表格模型并没有包括目标单元格，但是预测单元格可以取得这一作用。

弗瑞迪报童问题的目标单元格的衡量就是销售《金融日报》的利润，所以图 16.1 中惟一的预测单元格就是利润（C19）。下面的步骤用来定义类似预测单元格的输出单元格。

**定义预测单元格的步骤**

1. 通过点击选中一个单元格。
2. 点击图 16.2 所示的 Crystal Ball 工具条的第三个按钮（Define Forecast）[或者从单元格菜单中选择定义预测（Define Forecast）选项]，从而弹出定义预测对话框（Forecast Dialogue）（如图 16.5 所示的弗瑞迪问题）。
3. 这个对话框可以用来输入一个名字标签，并且（可选择地）定义预测单元格的单位（如果这个单元格已经有名字了，那么在这个对话框中就会显示出来）。
4. 点击确定。

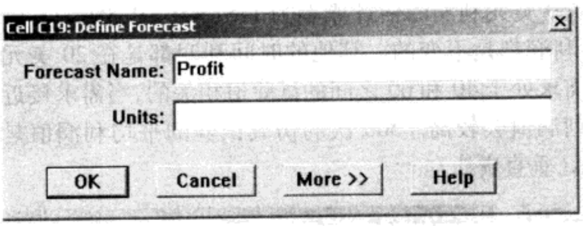



图 16.5　Crystal Ball 的定义预测单元格对话框。它用于在图 16.1 的电子表格模型中定义预测单元格利润（C19）。

**设定运行参数**

第三步——设定运行参数——主要是为运行仿真选择试验次数开始并且决定其他如何执行计算机仿真的选项。通过点击 Crystal Ball 工具条的运行参数按钮（Run Preferences）或者从运行菜单中选择运行参数选项来开始此步操作。运行参数对话框如图 16.6 所示，右边有六个标签。通过点击这些按钮，你可以输入或修改由每个标签所控制的参数设定值，从而可以控制计算机仿真如何运行。例如，图 16.6 中显示了选择试验次数（Trials）标签后的一个对话框界面。图里所显示的数字 500 表示计算机仿真的最大运行次数（在运行参数试验值对话框中的第二个选项是达到特定的精确度后即停止仿真，它将会在后面介绍）。

**运行仿真**

> 如果预测窗口在仿真运行时不能显示，那说明扩展预测对话框（图 16.10 所示）已被关闭，但可以点击那个按钮来重新开启。

到达这一步，就可以开始运行计算机仿真。想要开始，只需点击开始仿真（Start Simulation）按钮（见图 16.2 的中部）或者选择运行菜单中的开始仿真（Start Simulation）选项。不过，如果你已经在先前运行过计算机仿真，那么你应该在此运行前首先点击重置仿真（Reset Simulation）按钮或者从运行菜单中选择重置仿真（Reset Simulation）选项来重置仿真。

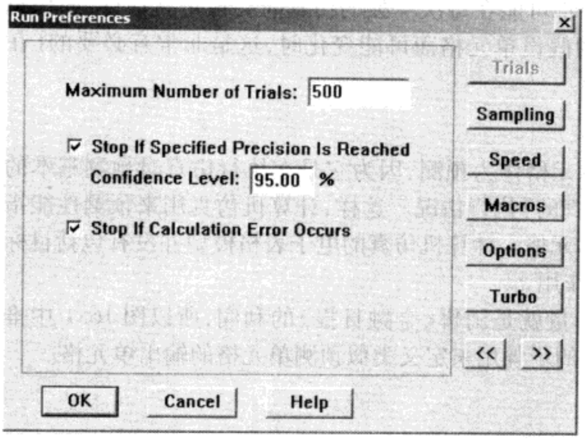



图 16.6 选择试验次数后的 Crystal Ball 的运行参数对话框。

> 为了能在频率图上显示平均线，可在图 16.7 所示的选项（Preferences）菜单中选择图表（Chart）选项。

开始运行后，预测窗口就会显示计算机仿真运行时的结果。图 16.7 就显示了 500 次仿真结束时的预测利润（弗瑞迪销售《金融日报》的每天利润）。图中所示的预测默认图是频率图表。在频率图中的纵坐标高度是指仿真时所获得的各种利润值的相关发生频率。例如，查看 60 美元处的垂直线。图的右边显示的发生频率为 175，也就是说在 500 次的仿真试验中，有 175 次所获得的利润为 60 美元。这样，图的左边就显示了获得 60 美元利润的估计概率为 175/500 = 0.350。不管需求是等于还是大于订单数量 60，这时利润都是不变的。其他的时间利润都是在 20 美元到 60 美元之间分布。这些利润值是和需求处于 40 和 60 之间的试验值相关的，当需求接近 40 时利润值会较低，当需求接近 60 时利润值会较高。500 次的仿真试验的平均利润值是 46.67 美元，正如经过该点的平均线所示（垂直虚线）。

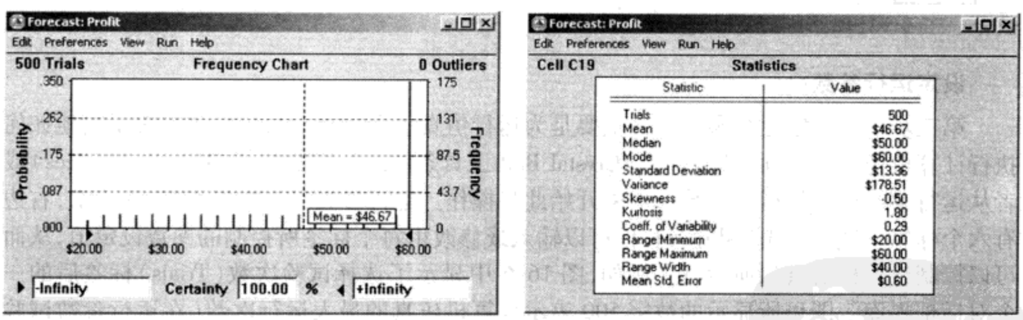



图 16.7 由 Crystal Ball 所生成的频率图和统计表，总结了图 16.1 中弗瑞迪报童问题的仿真运行结果。

图 16.7 里的统计表可以从视图（View）菜单里选择统计（Statistics）选项来获取。这些统计数据包括 500 次仿真试验的结果。这 500 次试验是弗瑞迪每日销售利润满足基本概率分布函数的随机观察数的 500 次抽样。大部分抽样的统计数据都在此表中提供，包括平均利润值 46.67 美元，中位数 50 美元（表示在 500 次的仿真试验中，当从小到大排序时位于中间位置的利润值），众数 60 美元（表示发生频率最多的利润值），还有标准差 13.36 美元。在表的底部所示的利润值的波动范围信息也是很有用的。

> 一般来说，$x\%$ 的百分比是在最小的 $x\%$ 和剩余的部分之间的区分线。

除了图 16.7 所示的频率图和统计表外，视图(View)菜单还提供了一些其他有用的显示仿真运行结果的方式，包括百分比表(percentiles table)，累积图(cumulative chart)和逆向累积图(reverse cumulative chart)。这些方式所生成的图都显示在图 16.8 中。百分比表基于由 500 次仿真所产生的由小到大罗列的利润值之上，把这个排列分成了 10 个相等的部分(每 50 次试验即是一部分)，然后记录每一部分的最后一个数值。这样，整个队列的 10% 是 26 美元，整个队列的 20% 是 32 美元，依此类推(例如，对于 10% 的队列对应 26 美元的直觉解释就是在 500 次的试验中，有 10% 的试验获得的利润值等于或少于 26 美元，相应地其他 90% 的试验获得的利润值大于或等于 26 美元，所以 26 美元把最小值的 10% 和最大值的 90% 区分开来)。累积图也提供了相似(但更详细)的从小到大的利润值排列信息。横轴表示从最小的利润值(20 美元)到最大利润值(60 美元)的整个波动范围。在这个范围内的每一个数值，图标都累积了 500 次仿真中所发生的小于或等于这个数值的实际利润值发生频率。这个数字等于右边所示的频率和左边的概率。逆向累积图是以同累积图相同的方式构建的，只有下面这一重要的不同。对于 20 美元到 60 美元之间的每一个数值，逆向累积图都累积了 500 次仿真中所发生的大于或等于这个数值的实际利润值的发生频率。

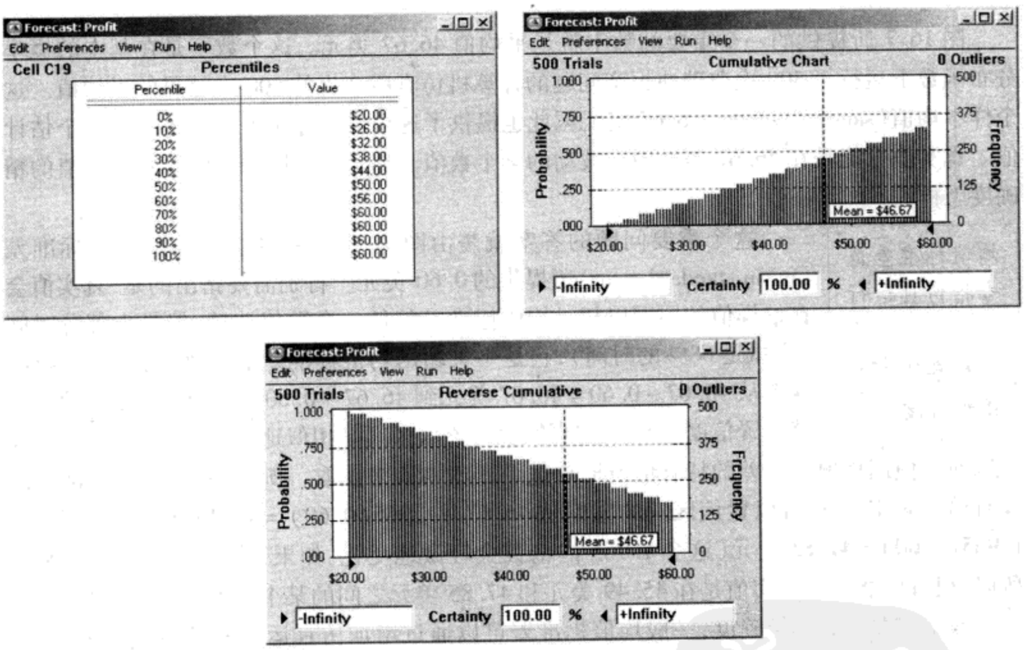



**图 16.8**　由 Crystal Ball 所生成的显示图 16.1 中弗瑞迪报童问题的仿真运行结果的更多显示形式。

> 确定性方框给出了发生在两个临近方框中数据之间的利润数值的百分比。

图 16.9 则说明了 Crystal Ball 所提供的更有用的另一种方式，它增加了仿真运行结果的有用信息。弗瑞迪报童认为如果他每天销售《金融日报》的利润不低于 40 美元，那么他这一天就是经营成功的。所以，他想知道如果继续采用目前的订购量(60)，那么达到他所期望的这种利润状况的百分比是多少。这个百分比的估计(68.40%)在图 16.9 中的频率图底部的确定性方框中显示出来。Crystal Ball 能够以两种方式提供这个百分比。首先，用户可以把图左下面的小三角形(在图 16.7 中的初始位

置为＄20)向右拖到＄40处(如图16.9所示)。另外,可以把＄40直接输入到左下角的方框中。如果需要的话,可以立即估算出在任意两个数值间获得利润的概率,只要拖动两个三角形即可。

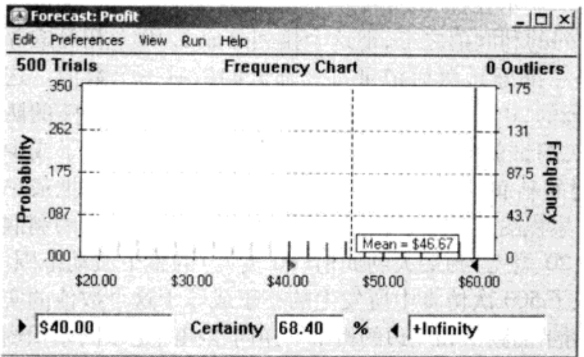



图16.9 设定最低期望利润界限40美元,在频率图底部确定性方框所显示的弗瑞迪方案运行所提供的高于40美元利润的确定性为68.40%。

## 仿真结果的精确度如何?

图16.7所提供的一个重要的数字就是平均值46.67美元。这个数字是在基本的概率分布函数下运行了500次弗瑞迪报童问题的计算机仿真所产生的500次结果的平均值。这个样本均值(sample average)46.67美元因此也提供了这个概率分布下的真实值的一个估计值。真实值可能是在46.67美元周围波动的某个数值。那么我们所期望的这个估计值的精确度怎样呢?

均值标准差是专指仿真运行所获得的平均值和真实值的接近程度。

这个重要问题的答案就是由图16.7中统计表底部的均值标准差(mean standard error)所提供的0.60美元。特别需要指出的是,真实值会在抽样值的周围以超过均值标准差的任一个数值波动,但是大部分时间(大概是68%的时间),它是不会超出均值标准差的波动范围的。这样,这个从46.67－0.60＝46.07美元到46.67＋0.60＝47.27美元波动区间就是置信度为68%的真实值的置信区间。相似地,一个较大的置信区间可以通过使用均值标准差的特有倍数加减这个样本均值来获取。例如,95%的置信区间的特有倍数是1.965,所以置信区间的范围从46.67－1.965(0.60)＝45.49美元到46.67＋1.965(0.60)＝47.85美元(这个1.965的倍数会轻微地变化,如果试验次数不等于500)。所以,很有可能的是真实值是在45.49美元和47.85美元之间的某个数值。

如果需要更高的精确度,一般均值标准差可以通过增加仿真运行的试验次数来缩减。然而,缩减的趋势是很微弱的,除非试验次数大幅度增加。例如,缩减一半的均值标准差则大概需要增加4倍的试验次数。这样,为了获得期望的精确度则要进行惊人的试验次数。

既然为了获得期望的精确度所需要的试验次数不能在仿真进行之前很好地进行预测,那么指定极其巨大的试验次数必然就是一个诱惑选择。这个指定的次数可能会是实际需要的许多倍,因而导致了多余的计算机仿真运行。令人庆幸的是,Crystal Ball有一个特别的精确度控制方法,在达到了期望的精确度后,它可以尽可能早地停止计算机仿真的运行。这个方法是选择图16.6中所示的运行参数试验次数对话框(Run Preferences Trials)中的第二个选项(如果达到设定的精确度即停止仿真)来实现的。设定的精确度输入到图16.10所示的扩展定义预测对话框中(Expanded Define Forecast)[这个对话框是通过点击图16.5的定

义预测对话框中(Define Forecast)的更多(More)按钮而弹出的]。图 16.10 中的右下边显示了精确度控制是应用了平均值(不是标准差或者指定百分数)和 95% 的置信区间。置信区间一半的宽度，即从置信区间的任意一端到其中点，作为已经达到的精确度。期望的精确度可以直接以绝对单位(使用和置信区间相同的单位)指定或者也可以以相对量(置信区间中点的百分比)指定。

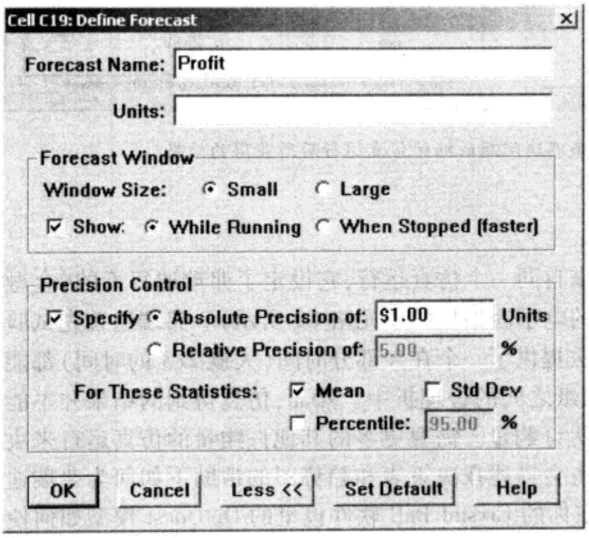



图 16.10　这个扩展定义预测对话框是用来指定弗瑞迪仿真运行需要多高的精确度。

图 16.10 中的对话框的中部则显示了以绝对单位 1 美元来指定期望精度。而 500 次试验的均值的 95% 的置信区间可由 46.67 美元加减 1.18 美元来得到，所以 1.18 美元就是这些试验后所达到的精确度。Crystal Ball 也周期性地计算置信区间(和目前的精确度)，从而可以检查目前的精确度是否在 1 美元以下，如果达到了，就可以停止仿真。然而，这种情况可能永远不会出现，所以 Crystal Ball 允许仿真运行直到达到设定的最大试验次数(500)。

> 在仿真运行中，获得 1 美元之内的精确度和 95% 的置信区间需要 750 次的试验。

为了获得期望的精确度，仿真可能会需要重新开始来产生额外的试验。这样就需要在运行参数(Run Preferences)对话框(图 16.6 所示)里的最大试验次数中(包括已经输入的 500)输入一个更大的数值(比如 1000)，然后点击 Crystal Ball 工具条上的运行仿真(Run Simulation)按钮。图 16.11 就显示了这种做法的结果。第一行显示又多运行了 250 次试验才达到期望精确度，一共运行了 750 次(检查精确度的默认频率值是 50 次，所以达到精确度 1 美元的真正试验次数是在 700 到 750 之间的某个数值)。由于这些额外的试验次数，一些统计数据也和图 16.7 中的有些轻微变化。例如，现在的均值的最佳估计是 46.61 美元，其精确度为 0.96 美元。这样，均值的真实值很有可能(95%)落在 46.61 美元的左右 0.96 美元区间。

$$95\%\ 的置信区间:45.65\ 美元 \leq 平均值 \leq 47.57\ 美元$$

对中位数和标准差的目前的估计给出了精确度要求，在百分比表中也同样要估计百分比的精确度。所以，对这些数量的 95% 的置信区间也可以从估计值里加减精确度来得到。

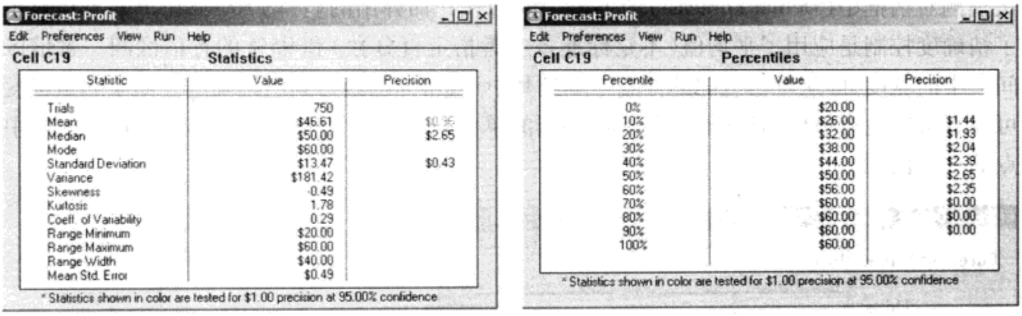



图 16.11 图 16.10 中指定的精确度达到后弗瑞迪问题的继续仿真运行后所获得的结果。

## 弗瑞迪的结论

图 16.7 和 16.11 所给出的结果是来自同一个仿真运行，它设定了弗瑞迪每天的《金融日报》的订购数量为 60 份（图 16.1 中的电子表格里的单元格 C9 所示）。弗瑞迪首先试验了这个订购数量，因为这个订购量看上去提供了一个在大部分时间（大概 2/3 的时间）都能满足需求而又不会剩余大量的未出售报纸之间的合理折中。然而，仿真得到的结果并不能说明 60 是否是最大化其日均利润的最优订购量。需要更多的其他订购量的仿真运行来决定（至少是估计）最优订单量。16.8 节将会描述在决策表和趋势图的帮助下如何为弗瑞迪找到最优的订购量。16.9 节则描述了在你的 Crystal Ball 软件包里的 OptQuest 模型如何使用强有力的最优化技术来系统地搜索最佳订购量。这标志着这个案例的结束。

> 弗瑞迪现在有 95% 的置信度相信，订购数量为 60 时从长远看能够获得日均利润在 45.65 美元和 47.57 美元之间。

尽管可能会获得更多的利润，但弗瑞迪已经从图 16.11 中了解到他的订购数量是 60 时能够获得一个不错的日均利润，大概是 46.61 美元。这也只是一个估计值，但是弗瑞迪也从 95% 的置信区间了解到日均利润很有可能是在 45.65 美元和 47.57 美元之间的某个数值。

无论如何，这个由计算机仿真所得到的利润数值是基于电子表格模型（见图 16.1 中的单元格 D12:F12）的假设之上，需求服从 40 到 70 之间的均匀分布。因此，这些利润数值只有当这些假设是有效的时候才是正确的。更多的工作还需要进行，不仅仅是要证实假设分布是否是恰当的，还要确认其他的概率分布是否能够更好地适应弗瑞迪实际经营的日需求数据。这些课题将会在 16.7 节中深入探讨。

使用 Crystal Ball 进行计算机仿真是一个有很多用途的工具，它可以解决管理上的很多难题。所以，在 16.7～16.9 节的案例继续研究之前，我们先提出应用 Crystal Ball 进行计算机仿真的另 5 个应用实例。

## 问题回顾

1. 弗瑞迪报童需要做什么决策？
2. 当使用 Crystal Ball 时假设单元格是什么？
3. 在弗瑞迪电子表格模型中假设单元格中应该输入什么数据？
4. 当使用 Crystal Ball 时预测单元格是什么？
5. 在弗瑞迪电子表格模型中预测单元格中应该输入什么数据？

6. 当使用 Crystal Ball 时频率图能够提供哪种信息?
7. 当使用 Crystal Ball 时统计表能够提供的关键统计数据是什么?
8. 来自计算机仿真结果的均值标准差有什么重要意义?
9. 在指定的试验次数完成之前,Crystal Ball 提供了什么条件可能停止仿真的运行?
10. 到现在为止,弗瑞迪报童关于他的订购量了解了多少?

## 16.2 为一项建筑工程投标:科信建筑公司案例研究序曲

管理者们经常需要制定决策,而决策的结果受到竞争公司管理者所制定的决策的极大影响。例如,市场营销决策经常是相同类型的策略。为了说明这点,考虑一个管理者必须为一种新产品投放市场时决定价格的案例。决策结果的成功与否很大程度上取决于几乎同时由其他竞争性的新产品企业所制定的价格策略。相似地,正在开发中的产品投放市场时机的决策的成功与否也主要在于是否能够抢在其他企业的竞争性产品投放市场之前。

当不了解竞争者相关决策时,决策者将在分析中考虑竞争者将会制定哪些决策的相关的不确定性。计算机仿真通过使用假设单元格来表示竞争者的决策来提供解决这种问题的标准方法。

下面的例子就说明了一个竞标的流程,当一个公司制定标书准备为一个建筑项目投标时,其他的三个公司也会同时准备他们自己的标书。

### 科信建筑公司投标问题

这个案例贯穿于整个的第 8 章,涉及科信建筑公司和为一家大型制造商建筑一个工厂的工程。那一章描述了这个工程项目经理佩蒂(David Perty)很大程度地使用了 PERT/CRM 模型来帮助指导项目的管理。

> 这一节来说明公司如何选择 5400000 美元的投标价格,从而赢得合同。

如 8.1 节中所描述的开篇中,当这个公司刚刚以 5400000 美元获得了这个项目的竞标。我们现在退回到投标的那段时间,公司的管理层使用 Crystal Ball 进行计算机仿真来指导这个工程的 5400000 美元的投标价格选择。你不必再回顾第 8 章中的案例。

在这个投标过程中,科信建筑公司的第一步是估算如果由公司接下这个项目的总成本是多少。这个已经被确定为 4550000 美元(这个数字包括了不能按时完成项目超过截止期所损失的罚金,还有提前了截止期完成可以获得的额外奖金,因为管理层甚至考虑了不可能发生的一些相关状况)。这里面还有一个准备投标所发生的大约 50000 美元的额外成本,包括估计项目的成本和分析竞争中的投标策略。

还有其他的三个建筑公司也被邀请参与这个项目的投标。所有的这三个建筑公司都是科信建筑公司长期的竞争对手,所以公司在投标策略上已经有了大量的经验。在投标筹划办公室里的一个身经百战的分析师负责对每个竞争者将要提交的投标价进行估计。由于在这个过程中存在太多的不确定性,分析师决定这些估计值中的每一个都需要以一定的概率分布来表示。现已获知竞争者 1 在其投标价格里设定了在总(直接)成本的基础上 30% 的利润率。然而,竞争者 1 也是一个特别不可预测的投标者,因为它对项目真实成本的估计精确度实在不高。在过去的投标价格里它的实际利润率在 5% 和 60% 之间波动。竞争者 2 在投标价格里使用了 25% 的利润率,但它在估计项目成本的精确度方面比竞争者 1 好一些,

但是在过去它所设定的投标价格里实际利润率在多达 15% 的范围内波动。另一方面，竞争者 3 在估计项目成本方面异常精确（和科信建筑公司相同）。竞争者 3 在投标策略上也做调节，因此它将利润率设定在 20% 和 30% 之间的某个值，这取决于它对竞争者的估计、储备工作，还有其他各种因素。所以，三个竞标者提交的投标价格的估计概率分布、科信建筑公司对项目的总成本的估计值表述如下：

**竞争者** 1：三角分布，最小值是 95%，最可能的值是 130%，最大值是 160%。
**竞争者** 2：三角分布，最小值是 110%，最可能的值是 125%，最大值是 140%。
**竞争者** 3：均匀分布，在 120% 和 130%。

## 应用计算机仿真的一个电子表格模型

> 其他公司提交的投标价格是不确定的，所以它们需要作为假设单元格。

图 16.12 给出了一个电子表格模型，用来计算评估科信建筑公司可能提交的任何投标价格。既然这一过程中存在竞争者投标价格的不确定性，这个模型需要竞争者标价（CompetitorBids）（单元格 C8：E8）作为假设单元格，所以上面的概率分布就会输入到这个单元格中。正如前节所述，设定假设单元格只需要依次选定每个单元格，任意在其中输入一个数字，然后在单元格菜单中选择定义假设（Define Assumption）选项（或者点击 Crystal Ball 工具条上的第一个按钮），然后在分布图例里选择合适的概率分布函数，从而弹出相应的对话框。图 16.13 就给出了三角分布对话框，可以用来为竞争者 1 设定参数值（最小值，最可能值，最大值），竞争者 2 也可以类似处理。为竞争者 1 所设定的参数值来自单元格 C18：C20，以百分比（C13：C15）表示的参数通过乘以项目成本（OurProjectCost）已经转换成美元的形式。均匀分布对话框，在前一节中如图 16.4 所示，用来为单元格 E8 设定参数值。

最小竞争者标价（MinimumCompetitorBids）（C23）记录了计算机仿真每次试验的竞争者最低标价。当且仅当输入投标价（OurBids）单元格的数值小于竞争者的标价，公司才会在给定试验值的条件下赢得投标。IF 函数被输入到是否赢得投标（WinBid?）（C27），如果赢得投标就会返回 1，反之就返回 0。

> 决策投标价格的目的就是所获得的期望利润最大化。

由于管理层想从整个决策投标价格（如果赢得投标）的过程来最大化期望利润，然后进行这个项目，那么在这个模型中的预测单元格是利润（C29）。达到给定的试验次数时的利润取决于公司是否赢得了投标。如果没有，利润实际上就是损失 50000 美元（投标成本）。无论如何，如果赢得投标，利润就是投标价格去掉项目成本和投标成本后剩余的部分。这个公式输了利润单元格（C29）中，用来执行不论哪种情况出现时的计算过程。

以下是这一模型的关键单元格：

**假设单元格**（Assumption cells）：竞争者标价（C8：E8）
**决策单元格**（Decision cells）：我们的标价（C25）
**预测单元格**（Forecast cells）：利润（C29）

## 仿真结果

为了估计输入我们的标价（Ourbids）（C25）中 5400000 美元的投标价格的可能值，这个

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Reliable Construction Co. Contract Bidding** | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | **Data** | | | |
| 4 | | Our Project Cost ($million) | 4.550 | | |
| 5 | | Our Bid Cost ($million) | 0.050 | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | | **Competitor Bids** | Competitor 1 | Competitor 2 | Competitor 3 |
| 8 | | Bid ($million) | 5.839 | 5.688 | 5.688 |
| 9 | | | | | |
| 10 | | Distribution | *Triangular* | *Triangular* | *Uniform* |
| 11 | | | | | |
| 12 | | Competitor Distribution Parameters (Proportion of Our Project Cost) | | | |
| 13 | | Minimum | 95% | 110% | 120% |
| 14 | | Most Likely | 130% | 125% | |
| 15 | | Maximum | 160% | 140% | 130% |
| 16 | | | | | |
| 17 | | Competitor Distribution Parameters ($million) | | | |
| 18 | | Minimum | 4.323 | 5.005 | 5.460 |
| 19 | | Most Likely | 5.915 | 5.688 | |
| 20 | | Maximum | 7.280 | 6.370 | 5.915 |
| 21 | | | | | |
| 22 | | **Minimum Competitor** | | | |
| 23 | | **Bid ($million)** | 5.688 | | |
| 24 | | | | | |
| 25 | | **Our Bid ($million)** | 5.400 | | |
| 26 | | | | | |
| 27 | | **Win Bid?** | 1 | (1=yes, 0=no) | |
| 28 | | | | | |
| 29 | | **Profit ($million)** | 0.800 | | |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| CompetitorBids | C8:E8 |
| MinimumCompetitorBid | C23 |
| OurBid | C25 |
| OurBidCost | C5 |
| OurProjectCost | C4 |
| Profit | C29 |
| WinBid? | C27 |

| | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 18 | Minimum | =OurProjectCost*C13 | =OurProjectCost*D13 | =OurProjectCost*E13 |
| 19 | Most Likely | =OurProjectCost*C14 | =OurProjectCost*D14 | |
| 20 | Maximum | =OurProjectCost*C15 | =OurProjectCost*D15 | =OurProjectCost*E15 |

| | B | C |
|---|---|---|
| 22 | **Minimum Competitor** | |
| 23 | **Bid ($million)** | =MIN(C8:E8) |
| 24 | | |
| 25 | **Our Bid ($million)** | 5.4 |
| 26 | | |
| 27 | **Win Bid?** | =IF(OurBid<MinimumCompetitorBid,1,0) |
| 28 | | |
| 29 | **Profit ($million)** | =WinBid?*(OurBid-OurProjectCost)-OurBidCost |

**图 16.12**　应用计算机仿真为科信建筑公司投标问题创建的电子表格模型。假设单元格是竞争者标价(C8:E8),预测单元格是利润(C29)。决策变量是我们的投标价(C25)。

模型的仿真运行了 500 次试验。图 16.14 以频率图和统计表的形式给出了运行结果,而图 16.15 则显示了相应的百分比图和累积图。使用百万美元为单位,每次试验的利润仅仅有两个可能值,也就是说,0.050 的损失(如果投标失败),或者是 0.800 的利润(如果赢得投标)。频率图说明了 50000 美元的损失发生的频率是在 500 次试验中发生了 181 次,相应地,获得 800000 美元利润的频率是 319 次。这样,500 次试验的结果是平均利润为 0.492

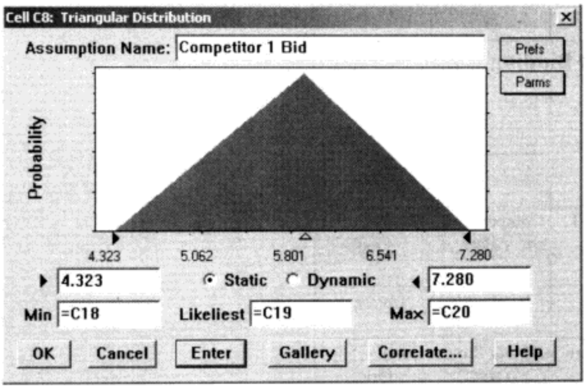



图 16.13 三角分布对话框。在此处用来输入三角分布的参数值，把单元格 C18:C20 输入到图 16.12 电子表格模型里的假设单元格 C8 中。

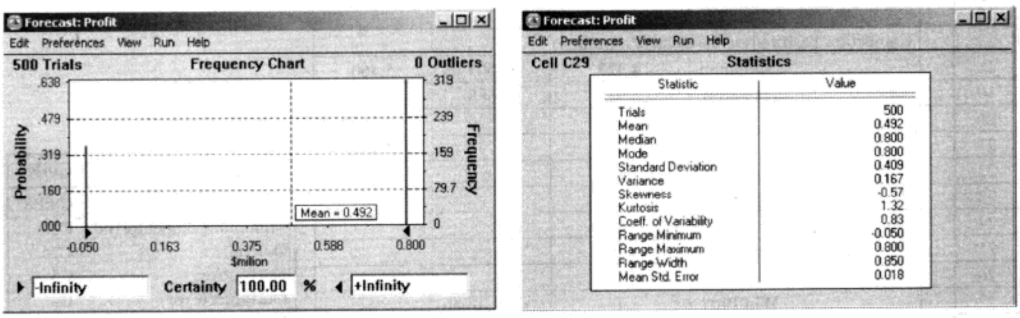



图 16.14 总结运行图 16.12 中为科信建筑公司投标问题创建的计算机仿真模型结果的频率图和统计表。

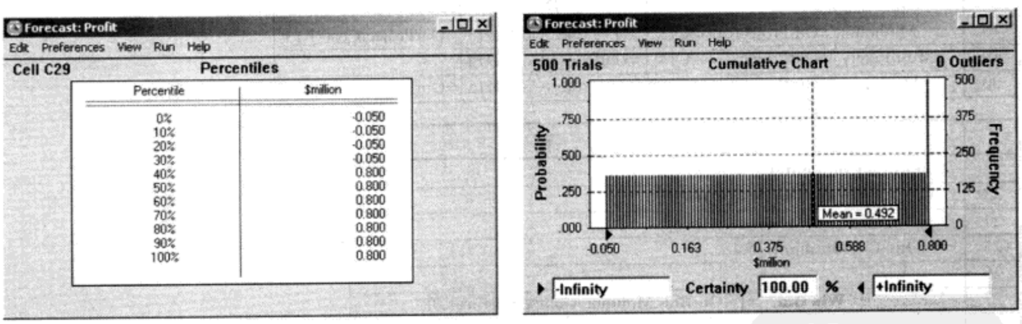



图 16.15 科信建筑公司合同投标问题的详细分析结果。

(492000 美元)的利润，同时，其他获得的数据记录在统计表中。在图 16.15 中，注意只有两个利润值的可能性导致了在百分比图中只有两个数据和平展的累积图。

> 这个案例在 16.8 节中会继续进行。

这些结果数据本身并不能说明 5400000 美元就是最好的投标价格。我们仍然需要进行额外的仿真来估计是否存在其他的投标价格能够获得更高的期望利润。16.8 节将会描述如何在决策表的帮助下来决策选择 5400000 美元作为投标价。这会证明科信建筑公司将会赢得投标，从而进入了第 8 章的案例研究。

## 问题回顾

1. 科信建筑公司正在投标的项目是什么？
2. 竞争者的投标价以什么形式被估计？
3. 在应用计算机仿真的电子表格模型中的假设单元格输入了什么数据？
4. 在这个电子表格模型的预测单元格中输入了什么数据？
5. 这个计算机仿真每次试验的可能结果有哪些？

## 16.3　项目管理：科信建筑公司案例再研究

> 计算机仿真在PERT/CRM 方法基础上改善了对最后期限之前完成项目可能性的估计。

项目经理最重要的责任之一就是满足为项目所设定的最后期限。所以，一个有经验的项目经理将会根据实际需要修正项目管理的计划以保证按时完工的最大的可能。但是项目经理如何估计在满足期限过程中出现的特别计划的可能性？8.4 节中所描述的一个方法是 PERT/CRM。我们现在将要说明如何用计算机仿真提供一个更好的方法。这个案例说明了计算机仿真的普通作用——在一些粗略的数学模型里所获得的初步分析中提炼结果。你要首先看一下假设单元格，里面输入的任意数字是次数(times)。这个案例另一个有趣的特点就是它使用了 Crystal Ball 的一种很特殊的图形，称为敏感性图(sensitivity chart)。这个图会提供项目计划如何修改的关键分析。

### 表述问题

如同前面一节的案例，这个案例也涉及了 8.1 节所介绍、第 8 章延续的科信建筑公司的案例。然而，这个案例不涉及第 8 章所描述的那个故事中前面部分，而是出现在这个案例的中间部分。8.4 节讨论了如何使用 PERT/CRM 程序来得到科信建筑公司按时完成项目概率的大概估计。需要指出的是，计算机仿真可以用来获得更好的估计。现在就让我们看看这是如何实现的。

对于目前的案例，这里有些关于案例研究的必需的因素。科信建筑公司刚赢得一家大生产商建造新厂房的投标。但是，如果施工不能在从现在开始的 47 周内完成的话，合同规定了高额的处罚金。所以在评估这个问题的备选方案时，必须考虑的关键因素是在截止期内完成任务的概率。在实施建筑计划时，共有 14 个主要工序，见图 16.16 右边列示(为了方便起见它重复了图 8.1)。图中的项目网络描述了各个工序之间的前后相关顺序。有 6 种工序发生顺序(网络中的路径)，为了完成整个项目，所有工序都必须完成。这六个路径为：

**路径 1：**　开始→A→B→C→D→G→H→M→结束
**路径 2：**　开始→A→B→C→E→H→M→结束
**路径 3：**　开始→A→B→C→E→F→J→K→N→结束
**路径 4：**　开始→A→B→C→E→F→J→L→N→结束
**路径 5：**　开始→A→B→C→I→J→K→N→结束
**路径 6：**　开始→A→B→C→I→J→L→N→结束

计划网络中工序旁边的数值表示了以正常方式、正常数量的员工完成每个工序所需的时间周数估计值。将每条路径的时间加起来(如表 8.2 所示)表明路径 4 时间最长，共需 44

周。因为一旦最长时间的路径完工,就意味着项目可以结束了,所以项目可以用44周时间来完成,比截止期限提早3周。

让我们来研究问题的症结所在。图16.16中所示的工序时间只是估计值,每个工序可能持续的时间有很大的不确定性。所以,整个计划的完成时间可能会与估计值44周相差甚远,因此还是有可能会超过截止期47周。那么超过截止期的概率又是多少呢?为了估计这个概率,我们需要知道这个项目时间的概率分布。

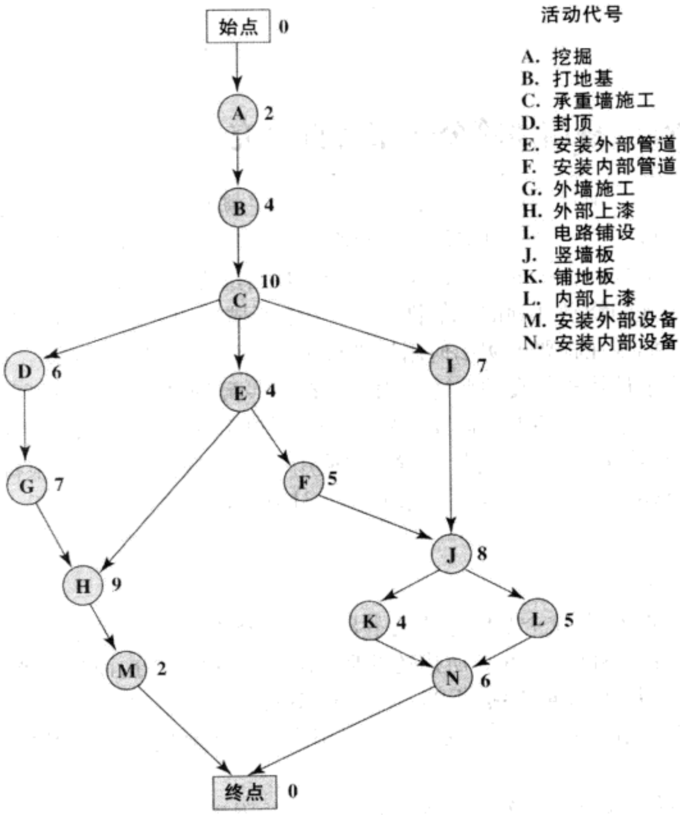



**图** 16.16 科信建筑公司的项目网络图。

这就是我们要在8.4节中介绍计划评审技术PERT三点估计的原因。这种方法包括了获得每个工序三种估计值——最可能的估计、乐观估计和悲观估计(表8.4列出了考虑中项目的14项工序的估计值)。这些数据分别被用来估计最可能的时间长度,最小时间长度以及最大时间长度。运用这三个数据,计划评审技术假设每个工序持续时间的概率分布的形式是$\beta$-分布(这有时显得较为随意)。通过三个简化的近似(见8.4节),可以获得按时完成任务的粗略估计概率。

> 计算机仿真和类似PERT/CRM的分析方法相比有两个主要的优点。

计算机仿真的主要优点之一是它不需要在使用解析方法时不得不用的简化假设。另一个优点就是可以灵活地运用各种概率分布,而不必规定一种解析方便的概率分布。

在处理工序的持续时间长度时,计算机仿真常常使用三角分布。图16.17给出了工序持续时间的三角分布的形状,$o, m, p$分别为乐观估计、最有可能的估计和悲观估计的标志。对于这种分布所包含的每个假设单元格,三角

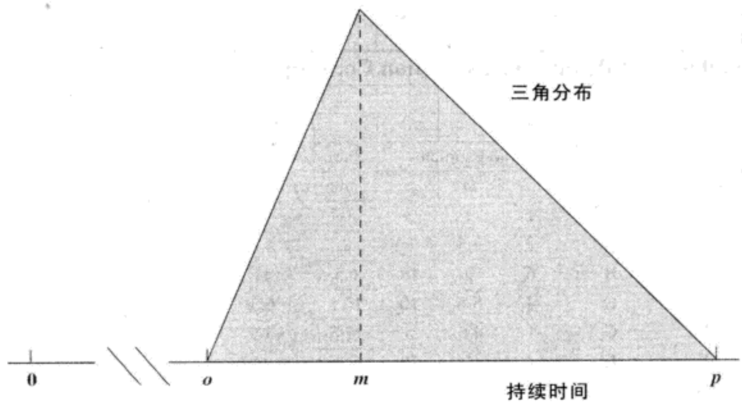



**图 16.17**　工序持续时间的三角分布的形状，其中最小值位于乐观估计 $o$，最可能值位于最可能估计 $m$，最大值位于悲观估计 $p$。

分布对话框（例如图 16.13 所示）用来输入 $o$，$m$，$p$ 所对应的单元格中的数值，从而设定了最小值、最有可能值、最大值的方框。

## 应用计算机仿真的电子表格模型

图 16.18 显示了用来模拟科信建筑公司案例的电子表格模型。数值 $o$，$m$，$p$ 位于 D、E 和 F 列中，它们直接来自于表 8.4。G 列和 I 列的单元格中的公式给出了每个工序的开始时间和结束时间。对于仿真的每次试验，完成时间的最大值是工序最后两项工序（M 和 N）所给出的项目持续时间（以周为单位），这个值输入到了预测单元格（ProjectCompletion）（I21）。

> 可变的工序持续时间需要作为假设单元格。

由于工序时间主要是可变的，除了单元格 H16 外，单元格 H6：H19 都需要作为假设单元格。因为工序 K 的 $o = m = p = 4$，这个工序时间实际上是固定值 4，所以这个固定值输入到了单元格 H16 中（如果单元格 H16 也被指定为假设单元格，其三角分布参数是最小值 = 最可能值 = 最大值，Crystal Ball 会显示出错）。图 16.19 给出了三角分布对话框，它已经被用来指定了第一个假设单元格 H6 中的参数。对于其他的假设单元格，不必再重复这个设置过程，只要快速地复制和粘贴它们相对应的参数即可。这样操作时，选中单元格 H6，然后点击 Crystal Ball 工具条上的复制数据（Copy Data）按钮（从左起的第七个按钮）。或者从单元格菜单中选择复制数据（Copy Data）选项。然后选中你要粘贴的单元格（H7：H15 和 H17：H19），再选择粘贴数据（Paste Data）选项（可以点击 Crystal Ball 工具条上的粘贴数据按钮，也可以从单元格菜单中选择这个选项）。由于和图 16.19 相关的单元格是相对关联（没有 $ 标志），行数将获得正确地更新，从而在复制粘贴过程中可以指向正确的行里的数据。例如，单元格 H7 中的三角分布参数的关联单元格将会更新为 = D7，= E7，= F7。

下面是这个模型中关键单元格的总结。

**假设单元格**（Assumption cells）：单元格 H6：H15 和 H17：H19
**预测单元格**（Forecast cells）：项目完成（I21）

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Simulation of Reliable Construction Co. Project | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | Activity | |
| 4 | | | Immediate | Time Estimates | | | Start | Time | Finish |
| 5 | | Activity | Predecessor | *o* | *m* | *p* | Time | (*triangular*) | Time |
| 6 | | A | — | 1 | 2 | 3 | 0 | 2 | 2 |
| 7 | | B | A | 2 | 3.5 | 8 | 2 | 4.5 | 6.5 |
| 8 | | C | B | 6 | 9 | 18 | 6.5 | 11 | 17.5 |
| 9 | | D | C | 4 | 5.5 | 10 | 17.5 | 6.5 | 24 |
| 10 | | E | C | 1 | 4.5 | 5 | 17.5 | 3.5 | 21 |
| 11 | | F | E | 4 | 4 | 10 | 21 | 6 | 27 |
| 12 | | G | D | 5 | 6.5 | 11 | 24 | 7.5 | 31.5 |
| 13 | | H | E, G | 5 | 8 | 17 | 31.5 | 10 | 41.5 |
| 14 | | I | C | 3 | 7.5 | 9 | 17.5 | 6.5 | 24 |
| 15 | | J | F, I | 3 | 9 | 9 | 27 | 7 | 34 |
| 16 | | K | J | 4 | 4 | 4 | 34 | 4 | 38 |
| 17 | | L | J | 1 | 5.5 | 7 | 34 | 4.5 | 38.5 |
| 18 | | M | H | 1 | 2 | 3 | 41.5 | 2 | 43.5 |
| 19 | | N | K, L | 5 | 5.5 | 9 | 38.5 | 6.5 | 45 |
| 20 | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | Project Completion | | 45 |

| | G | H | I |
|---|---|---|---|
| 3 | | Activity | |
| 4 | Start | Time | Finish |
| 5 | Time | (*triangular*) | Time |
| 6 | 0 | 2 | =AStart+ATime |
| 7 | =AFinish | 4.5 | =BStart+BTime |
| 8 | =BFinish | 11 | =CStart+CTime |
| 9 | =CFinish | 6.5 | =DStart+DTime |
| 10 | =CFinish | 3.5 | =EStart+ETime |
| 11 | =EFinish | 6 | =FStart+FTime |
| 12 | =DFinish | 7.5 | =GStart+GTime |
| 13 | =MAX(EFinish,GFinish) | 10 | =HStart+HTime |
| 14 | =CFinish | 6.5 | =IStart+ITime |
| 15 | =MAX(FFinish,IFinish) | 7 | =JStart+JTime |
| 16 | =JFinish | 4 | =KStart+KTime |
| 17 | =JFinish | 4.5 | =LStart+LTime |
| 18 | =HFinish | 2 | =MStart+MTime |
| 19 | =MAX(KFinish,LFinish) | 6.5 | =NStart+NTime |
| 20 | | | |
| 21 | | Project Completion | =MAX(MFinish,NFinish) |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| AFinish | I6 |
| AStart | G6 |
| ATime | H6 |
| BFinish | I7 |
| BStart | G7 |
| BTime | H7 |
| CFinish | I8 |
| CStart | G8 |
| CTime | H8 |
| DFinish | I9 |
| DStart | G9 |
| DTime | H9 |
| EFinish | I10 |
| EStart | G10 |
| ETime | H10 |
| FFinish | I11 |
| FStart | G11 |
| FTime | H11 |
| GFinish | I12 |
| GStart | G12 |
| GTime | H12 |
| HFinish | I13 |
| HStart | G13 |
| HTime | H13 |
| IFinish | I14 |
| IStart | G14 |
| ITime | H14 |
| JFinish | I15 |
| JStart | G15 |
| JTime | H15 |
| KFinish | I16 |
| KStart | G16 |
| KTime | H16 |
| LFinish | I17 |
| LStart | G17 |
| LTime | H17 |
| MFinish | I18 |
| MStart | G18 |
| MTime | H18 |
| NFinish | I19 |
| NStart | G19 |
| NTime | H19 |
| ProjectCompletion | I21 |

**图 16.18** 科信建筑公司项目计划完成问题的计算机仿真的电子表格模型，假设单元格是 H6:H15 和 H17:H19，预测单元格是项目完成（ProjectCompletion）（I21）。

## 仿真结果

我们现在已经准备好执行图 16.18 中电子表格模型的计算机仿真。我们在运行选项（Run Preferences）对话框中设定 1000 次作为仿真次数，图 16.20 分别以频率图、统计表和百分比图的形式显示了结果。这个结果显示了此项目持续时间在很大的范围内波动。在这

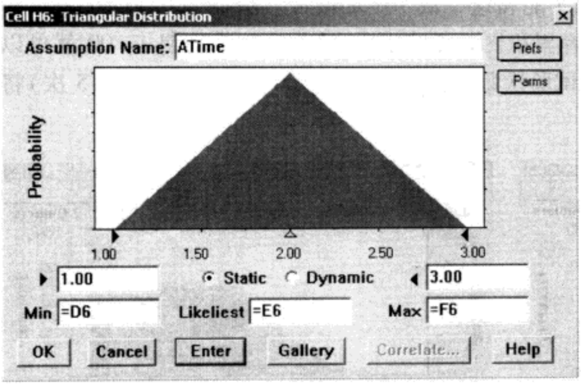



图 16.19　以单元格 D6:F6 为参数的三角分布被输入到了图 16.18 电子表格模型中的第一个假设单元格。

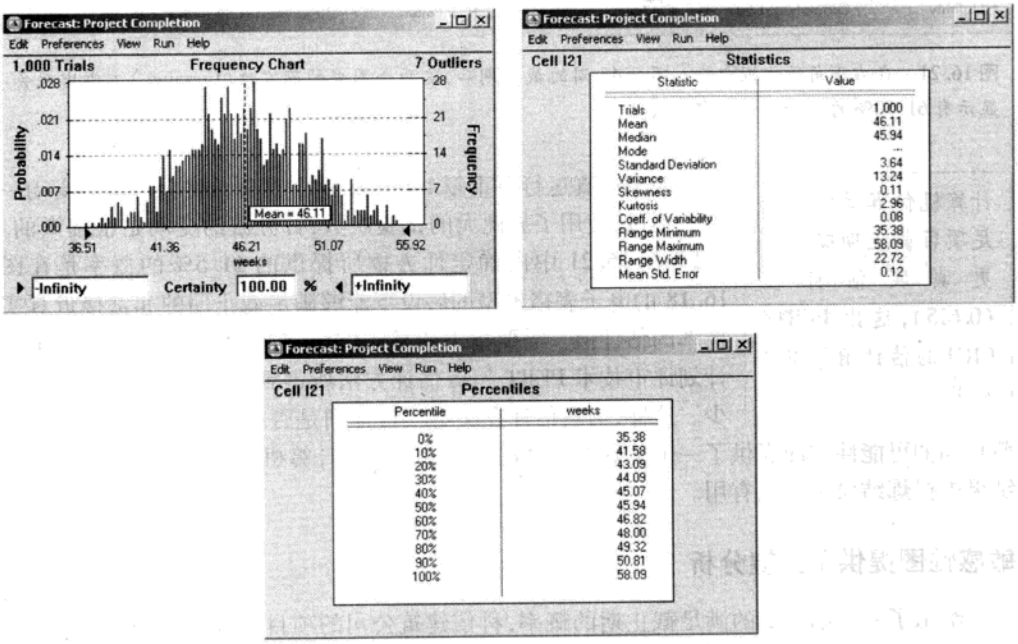



**图 16.20**　频率图、统计表和百分比图，总结了解决科信建筑公司项目时间安排问题的电子表格模型的运行仿真结果。

1000 次的仿真试验中，在统计表和百分比图都显示有一次的项目最短完成时间是 35.38 周，最长是 58.09 周。频率图显示在 1000 次的试验中出现最频繁的项目完成时间接近于 47 周(项目的截止期)，但是许多其他的完成时间以相当高的频率大于或少于截止期几周内。平均值是 46.11 周，这个数值非常接近截止期 47 周，从而需要在项目时间安排上留出较多的保证时间(统计表最底下所报告的最小标准差 0.12 周说明这个来自 1000 次试验抽样的平均值 46.11 周非常接近于给定项目持续时间的概率分布下的真实值)。在百分比图中 48 周对应的 70% 表示有 30% 的试验次数至少超过了截止期一周。

科信建筑公司的管理层特别感兴趣的一个统计值是在目前项目计划下能够在 47 周的最后期限准时完成项目的概率(记住合同中包含了如果超过截止期就要承受多达 300000 美元的处罚金)。在百分比图中 46.82 周对应 60% 说明了略微超过 60% 的试验次数满足了截

止期，但是，在图 16.20 中没有其他的数字能和这个数字更加接近。图 16.21 说明了要证实确切百分比，你所要作的是在频率图或者累积图右下角的方框中输入截止期 47.00 就可以了。确定性(Certainty)方框中就会显示试验次数中的 61.50%(1000 次试验中有 615 次)将会满足截止期。

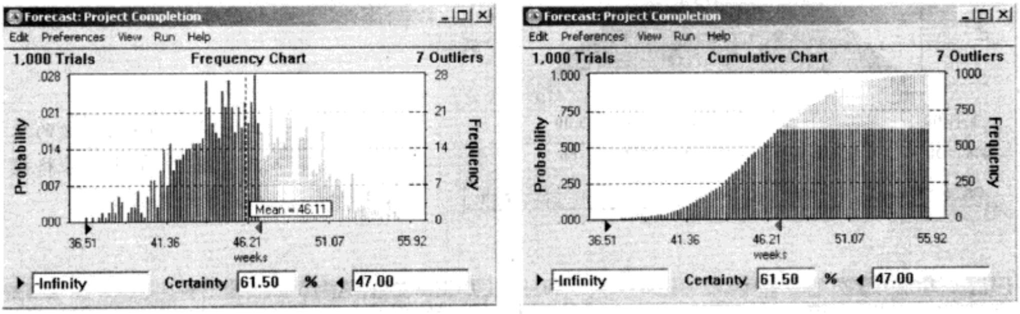



图 16.21 在右下角的方框中输入项目 47 周的截止期后，这两个图里的确定性(Certainty)方框中就会显示有 61.50% 的试验能按时完成项目。

> 计算机仿真提供了满足项目截止期概率的更真实估计值(0.615)，这比 PERT/CRM 的估计值(0.82)小多了。

如果仿真运行再重复 1000 次，这个百分数将会稍微地变动一点。不过，使用了如此大的试验次数，百分数的变动是很细微的。所以，图 16.21 中由确定性方框所提供的 61.5% 的概率是在图 16.18 的电子表格模型的假设下能够满足截止期的非常接近真实概率的估计值。需要指出的是，这个相对精确估计比 8.4 节里的计划评审技术 PERT 三点估计方法所得到的 0.84 的估计小了不少。这样，仿真估计在决定项目计划是否应该改善以提高能满足截止期的可能性方面提供了一个更好的管理向导。这证明了计算机仿真从那些粗略的分析结果中提炼结果是多么有用。

## 敏感性图提供了关键分析

给出了一个如此低的满足截止期的概率，科信建筑公司的项目经理(David Perty)想修改项目计划以改善准时完成项目的概率。Crystal Ball 还有另外一个工具，叫做敏感性图(sensitivity chart)，它强有力地指导了如何确认项目计划的哪种修改方案是最有益处的。为了生成敏感性图，在运行仿真前，如图 16.22 所示的运行参数(Run Preferences)设定对话框中的“计算敏感性”(Calculate Sensitivity)选项必须被选中(上面方框中的数字 50 始于与敏感性图无关的默认值)。图 16.23 则显示了相应的敏感性图，要打开它，只要点击 Crystal Ball 工具条上的敏感性图(Sensitivity Chart)按钮[或者从运行菜单中选择打开敏感性图(Open Sensitivity Chart)选项]。使用函数值名字，第一列给出了图 16.18 电子表格模型里 H 列中的各个假设单元格(时间)。电子表格模型中的另一个关键的单元格也被放在了这个敏感性图中(在图的顶部显示)，就是这个项目的完成时间所对应的预测单元格项目完成(ProjectCompletion)(I21)。对于敏感性图中第一列所列出的各个假设单元格，在第二列相应的输入则是这个单元格和预测单元格之间的相互关联系数(correlation coefficient)(基于等级)。在最右边则用黑方块图形表示了相互关联系数。在图 16.23 中的 10 行以相互关联系数的降序列出。

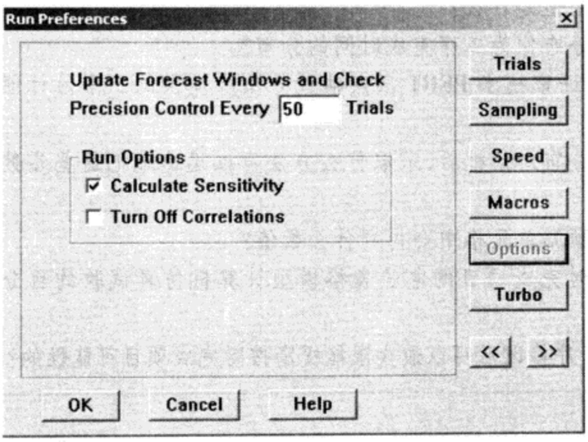



图 16.22　在选择了选项按钮后，运行参数对话框用来选择计算敏感性选项，以准备生成敏感性图。

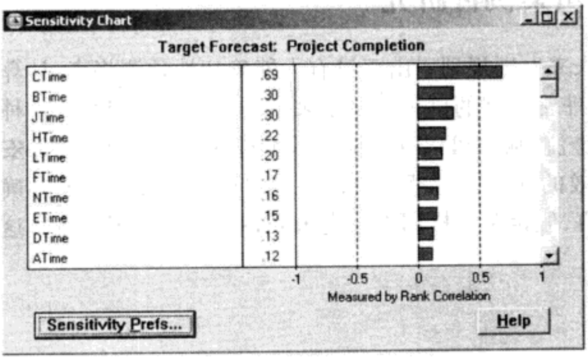



图 16.23　敏感性图显示了科信建筑公司的各个工序时间是以怎样的强度影响了项目的完成时间。

在两个变量之间的相互关联系数衡量了这些变量之间的依存关系的强度。这样，图 16.23 中的每个相互关联系数都衡量了工序时间在多大程度上影响了项目的完成时间。相互关联系数越高，则这个时间的影响程度就越大。所以，那些对应相互关联系数最高的工序，就是应该尽最大努力来缩短时间的工序。

图 16.23 说明工序 C 的时间比其他的任何一个工序的时间都有相对较高的相互关联系数。图 16.16 和图 16.18 的试验也说明了原因。图 16.16 指出工序 C 在除工序 A 和 B 之外所有的工序之前，所以在完成工序 C 上的任何延迟都会推迟这些处于它之后的所有工序的开始时间。再进一步地说，图 16.18 中的单元格 D8:F8 也说明了工序 C 的时间是最容易变化的，它的最可能时间和最悲观时间相差高达 9 周，所以超过最可能时间的较长延迟也会经常发生。

> 这种敏感性图说明缩减工序 C 的时间能够最明显地提高按时完成项目的可能性。

由于工序 C 的相当高的相互关联系数，缩减项目完成时间的最好方法是关注于缩减这一工序的时间（和它的变动范围）。这样就可以通过修改项目计划以指派更多的人力、更好的设备、更强的监督管理等实现项目的按时完成。Crystal Ball 的敏感性图很清楚地指出了项目计划的什么环节应该被修改。

## 问题回顾

1. 在这一节的案例中正在考虑的项目是什么？
2. PERT/CRM 程序仅可得到一个真实值的大概估计值，所以计算机仿真用来获得更接

近于这个值的估计值。那么这个值是什么？

3. 计算机仿真通常使用哪种概率分布作为工序完成时间的分布？
4. 工序完成时间分布参数的计划评审技术 PERT 三点估计方法所提供的三个估计值是什么？
5. 在使用了首个工序完成时间的分布对话框后，采取什么方法可以迅速地把这些参数值输入到这些假设单元格中？
6. 从这个案例的电子表格模型的预测单元格中会得到什么数值？
7. 使用什么方法可以得到能够按时完成项目的电子表格模型计算机仿真试验的百分数？
8. 哪种图可用来指出项目中某一工序修改后可以最大限度能提高按时完成项目可能性的？

## 16.4 现金流管理：EGGY 公司案例再研究

许多计算机仿真的应用都涉及了未来发展规划。由于没有人能确切地预测将来，计算机仿真需要考虑未来不确定性。例如，非常典型的例子就是未来现金流的不确定性。一种努力就是第一步先预测这些未来的现金流，从而可以预测应该采取什么商业行为（例如安排贷款）来满足现金流需求。不过，有效的现金流管理需要进一步考虑未来现金流的不确定性的影响。这里可以引入计算机仿真，假设单元格用来设定未来各个时期的现金流。这个过程正如下面的案例所说明的那样。

### EGGY 公司现金流管理问题

在第 3 章中分析的案例涉及了 EGGY 公司（管理高档退休社区）和它管理现金流问题的努力。由于商业的暂时不景气和一些目前或者未来的建筑成本，公司在接下来的几年甚至持续更长的时间里将会面对负的现金流。根据表 3.1 所提供的数据，表 16.1 给出了在接下来的 10 年里（2003～2012 年）计划的净现金流。在这 10 年里公司还会有新的退休社区竣工，所以公司期望（至少是希望）在 2012 年能有非常大的净现金流。因此，EGGY 公司管理层所面对的难题是如何最好地安排公司的财务来克服公司的财务困境，直到新的退休社区能够开始赢利。

**表 16.1 EGGY 公司在今后 10 年中计划的净现金流**

| 年　份 | 计划的净现金流<br>（单位：百万美元） |
|---|---|
| 2003 | −8 |
| 2004 | −2 |
| 2005 | −4 |
| 2006 | 3 |
| 2007 | 6 |
| 2008 | 3 |
| 2009 | −4 |
| 2010 | 7 |
| 2011 | −2 |
| 2012 | 10 |

第 3 章描述了如何制定决策以把十年期的贷款(从 2003 年开始)和一系列的短期(1 年)贷款相结合,作为在这 10 年中所需要维持的至少 500000 美元的正现金流。假设表 16.1 中的计划净现金流没有偏差,那么线性规划可以用来优化长期和短期贷款的额度,从而在 2013 年还清这些贷款后能够最大化公司的现金余额。第 3 章的图 3.5 给出了使用 Excel 线性规划工具获得最优解的电子表格模型。为了方便起见,图 3.5 重复放在图 16.24 中。变化的单元格,长期贷款(LTLoan)(D11),短期贷款(STLoan)(E11:E20),给出了各年初的长期贷款和短期贷款的金额。目标单元格余额(EndBalance)(J21)则指定在 10 年后(2013 年初)的现金余额将会是 2920000 美元。既然这个单元格被最大化,其他任何的贷款金额计划都会导致 10 年结束时的更小的现金余额。

> 图 16.24 中的线性规划解的缺陷是它没有评估未来现金流的巨大不确定性的影响,而计算机仿真做到了这一点。

获得了图 16.24 所给出的最优财务计划是形成最终方案的出色的第一步。然而,图 16.24 中的电子表格模型的缺陷是它不能容许有表 16.1 所给出的计划现金流的任何不可避免的偏差。第一年(2003)的实际现金流可能会被证实比较接近计划值。不过,以相当高的精确度来预测第二年甚至第三年的现金流是非常困难的,更何况是 10 年。计算机仿真需要评估这些不确定性的影响。

## 应用计算机仿真的电子表格模型

> 以未来现金流的不确定性作为假设单元格。

图 16.25 给出了图 16.24 中电子表格模型的应用计算机仿真的修改版本。二者的一个关键区别是图 16.24 的现金流(CashFlow)单元格(C11:C20)中的定值已经改成了图 16.25 的现金流(CashFlow)单元格(F12:F21)的随机输入值。这样,后者的单元格中,现金流(CashFlow)单元格(F12:F21),就是假设单元格(出现在这些单元格的数值是在第一步定义假设单元格时任意输入的)。如单元格 D9:E9 所示,所做的假设是每一个现金流都服从一个三角分布。这个分布每年的三个参数值(最小值、最可能值、最大值)的估计见单元格 C12:E21。

输入到长期贷款(LTLoan)单元格(G12)中的数字 6.65 是在图 16.24 中得到的长期贷款金额(以百万美元为单位)。然而,因为现金流的可变性,将从图 16.24 的短期贷款(STLoan)单元格(E11:E20)得到的短期贷款金额固定是没有意义的。这些金额最好是有柔性,并且可以根据前一年的实际现金流调节这些金额。如果在一年开始时的余额[在短期贷款前余额(BalanceBeforeSTLoan)的单元格(L12:L22)中计算得到]已经超过了所需要的最小余额 50000 美元,那么在这一年就不需要任何的短期贷款。无论如何,如果余额没有那么大,足够大金额的短期贷款还是应该贷的,以使得余额达到 50000 美元。这就是输入到图 16.25 底部所示的短期贷款(STLoan)单元格(M12:M22)中的公式所起的作用。

> 一个关键问题是在 10 年后实现正的现金余额的可能性。

图 16.24 中的目标单元格余额(EndBalance)(J21)变成了图 16.25 中的预测单元格(EndBalance)(N22)。在计算机仿真的每次试验中,如果图 16.25 的现金流(CashFlow)单元格(F12:F21)中仿真的现金流比表 16.1 给出的计划现金流(如图 16.25 中的货币数字)更有利,那么图 16.25 的余额大于图 16.24 的余额(EndBalance)(J21)。然而,如果仿真的现金流不如计划现金流,那么图 16.25 的余额(EndBalance)(N22)甚至可能是一个负数。例如,如果所有的仿真现金流都和单元格 C12:C21 给出的相应最小值

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Everglade Cash Flow Management Problem When Applying Linear Programming | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | LT Rate | 7% | | | | | | | | | |
| 4 | | ST Rate | 10% | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | Start Balance | 1 | | | (all cash figures in millions of dollars) | | | | | | |
| 7 | | Minimum Cash | 0.5 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | Cash | LT | ST | LT | ST | LT | ST | Ending | | Minimum |
| 10 | | Year | Flow | Loan | Loan | Interest | Interest | Payback | Payback | Balance | | Balance |
| 11 | | 2003 | -8 | 6.65 | 0.85 | | | | | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 12 | | 2004 | -2 | | 3.40 | -0.47 | -0.09 | | -0.85 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 13 | | 2005 | -4 | | 8.21 | -0.47 | -0.34 | | -3.40 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 14 | | 2006 | 3 | | 6.49 | -0.47 | -0.82 | | -8.21 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 15 | | 2007 | 6 | | 1.61 | -0.47 | -0.65 | | -6.49 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 16 | | 2008 | 3 | | 0 | -0.47 | -0.16 | | -1.61 | 1.27 | ≥ | 0.5 |
| 17 | | 2009 | -4 | | 3.70 | -0.47 | 0 | | 0 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 18 | | 2010 | 7 | | 0 | -0.47 | -0.37 | | -3.70 | 2.97 | ≥ | 0.5 |
| 19 | | 2011 | -2 | | 0 | -0.47 | 0 | | 0 | 0.50 | ≥ | 0.5 |
| 20 | | 2012 | 10 | | 0 | -0.47 | 0 | | 0 | 10.03 | ≥ | 0.5 |
| 21 | | 2013 | | | | -0.47 | 0 | -6.65 | 0 | 2.92 | ≥ | 0.5 |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| CashFlow | C11:C20 |
| EndBalance | J21 |
| EndingBalance | J11:J21 |
| LTLoan | D11 |
| LTRate | C3 |
| MinimumBalance | L11:L21 |
| MinimumCash | C7 |
| StartBalance | C6 |
| STLoan | E11:E20 |
| STRate | C4 |

**Solver Parameters**

Set Target Cell: EndBalance

Equal To: ◉ Max ○ Min ○

By Changing Cells:

LTLoan,STLoan

Subject to the Constraints:

EndingBalance >= MinimumBalance

**Solver Options**

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

| | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | LT | ST | LT | ST | Ending | | Minimum |
| 10 | Interest | Interest | Payback | Payback | Balance | | Balance |
| 11 | | | | | =StartBalance+SUM(C11:I11) | ≥ | =MinimumCash |
| 12 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E11 | | =-E11 | =J11+SUM(C12:I12) | ≥ | =MinimumCash |
| 13 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E12 | | =-E12 | =J12+SUM(C13:I13) | ≥ | =MinimumCash |
| 14 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E13 | | =-E13 | =J13+SUM(C14:I14) | ≥ | =MinimumCash |
| 15 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E14 | | =-E14 | =J14+SUM(C15:I15) | ≥ | =MinimumCash |
| 16 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E15 | | =-E15 | =J15+SUM(C16:I16) | ≥ | =MinimumCash |
| 17 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E16 | | =-E16 | =J16+SUM(C17:I17) | ≥ | =MinimumCash |
| 18 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E17 | | =-E17 | =J17+SUM(C18:I18) | ≥ | =MinimumCash |
| 19 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E18 | | =-E18 | =J18+SUM(C19:I19) | ≥ | =MinimumCash |
| 20 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E19 | | =-E19 | =J19+SUM(C20:I20) | ≥ | =MinimumCash |
| 21 | =-LTRate*LTLoan | =-STRate*E20 | =-LTLoan | =-E20 | =J20+SUM(C21:I21) | ≥ | =MinimumCash |

**图 16.24** 第 3 章中(图 3.5)不考虑未来现金流不确定性,分析 EGGY 公司现金流管理问题的线性规划电子表格模型。

接近,那么所需要的短期贷款将会变得足够大以至于在 2013 年初还清最后一笔贷款(还要接着还清长期贷款)将会导致余额(EndBalance)(N22)中的一个非常大的负数。这势必会

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Everglade Cash Flow Management Problem When Applying Simulation | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | LT Rate | 7% | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | ST Rate | 10% | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | Start Balance | 1 | | | | (all cash figures in millions of dollars) | | | | | | | | | |
| 7 | | Minimum Cash | 0.5 | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | Cash Flow (Triangular Distribution) | | | Simulated | | | | | | Balance | | | | |
| 10 | | | | Most | | Cash | LT | LT | ST | LT | ST | Before | ST | Ending | | Minimum |
| 11 | | Year | Minimum | Likely | Maximum | Flow | Loan | Interest | Interest | Payback | Payback | ST Loan | Loan | Balance | | Balance |
| 12 | | 2003 | -9 | -8 | -7 | -8.00 | 6.65 | | | | | -0.35 | 0.85 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 13 | | 2004 | -4 | -2 | 1 | -1.67 | | -0.47 | -0.09 | | -0.85 | -2.57 | 3.07 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 14 | | 2005 | -7 | -4 | 0 | -3.67 | | -0.47 | -0.31 | | -3.07 | -7.01 | 7.51 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 15 | | 2006 | 0 | 3 | 7 | 1.33 | | -0.47 | -0.75 | | -7.51 | -4.89 | 5.39 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 16 | | 2007 | 3 | 6 | 9 | 6.00 | | -0.47 | -0.54 | | -5.39 | 0.11 | 0.39 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 17 | | 2008 | 1 | 3 | 5 | 3.00 | | -0.47 | -0.04 | | -0.39 | 2.60 | 0.00 | 2.60 | ≥ | 0.50 |
| 18 | | 2009 | -6 | -4 | -2 | -4.00 | | -0.47 | 0 | | 0 | -1.86 | 2.36 | 0.50 | ≥ | 0.50 |
| 19 | | 2010 | 4 | 7 | 12 | 7.67 | | -0.47 | -0.24 | | -2.36 | 5.10 | 0.00 | 5.10 | ≥ | 0.50 |
| 20 | | 2011 | -5 | -2 | 4 | -1.00 | | -0.47 | 0 | | 0 | 3.64 | 0.00 | 3.64 | ≥ | 0.50 |
| 21 | | 2012 | 5 | 10 | 18 | 11.00 | | -0.47 | 0 | | 0 | 14.17 | 0.00 | 14.17 | ≥ | 0.50 |
| 22 | | 2013 | | | | | | -0.47 | 0 | -6.65 | 0 | 7.05 | | 7.05 | ≥ | 0.50 |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| BalanceBeforeSTLoan | L12:L22 |
| CashFlow | F12:F21 |
| EndBalance | N22 |
| EndingBalance | N12:N22 |
| LTLoan | G12 |
| LTRate | C3 |
| MinimumBalance | P12:P22 |
| MinimumCash | C7 |
| StartBalance | C6 |
| STLoan | M12:M22 |
| STRate | C4 |

| | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | LT | ST | LT | ST | Before | ST | Ending | | Minimum |
| 11 | Interest | Interest | Payback | Payback | ST Loan | Loan | Balance | | Balance |
| 12 | | | | | =StartBalance+SUM(F12:K12) | =MAX(MinimumBalance–BalanceBeforeSTLoan,0) | =BalanceBeforeSTLoan+STLoan | ≥ | =MinimumCash |
| 13 | =–LTRate*LTLoan | =–STRate*M12 | | =–M12 | =N12+SUM(F13:K13) | =MAX(MinimumBalance–BalanceBeforeSTLoan,0) | =BalanceBeforeSTLoan+STLoan | ≥ | =MinimumCash |
| 14 | =–LTRate*LTLoan | =–STRate*M13 | | =–M13 | =N13+SUM(F14:K14) | =MAX(MinimumBalance–BalanceBeforeSTLoan,0) | =BalanceBeforeSTLoan+STLoan | ≥ | =MinimumCash |
| 15 | =–LTRate*LTLoan | =–STRate*M14 | | =–M14 | =N14+SUM(F15:K15) | =MAX(MinimumBalance–BalanceBeforeSTLoan,0) | =BalanceBeforeSTLoan+STLoan | ≥ | =MinimumCash |
| 16 | =–LTRate*LTLoan | =–STRate*M15 | | =–M15 | =N15+SUM(F16:K16) | =MAX(MinimumBalance–BalanceBeforeSTLoan,0) | =BalanceBeforeSTLoan+STLoan | ≥ | =MinimumCash |
| 17 | =–LTRate*LTLoan | =–STRate*M16 | | =–M16 | =N16+SUM(F17:K17) | =MAX(MinimumBalance–BalanceBeforeSTLoan,0) | =BalanceBeforeSTLoan+STLoan | ≥ | =MinimumCash |
| 18 | =–LTRate*LTLoan | =–STRate*M17 | | =–M17 | =N17+SUM(F18:K18) | =MAX(MinimumBalance–BalanceBeforeSTLoan,0) | =BalanceBeforeSTLoan+STLoan | ≥ | =MinimumCash |
| 19 | =–LTRate*LTLoan | =–STRate*M18 | | =–M18 | =N18+SUM(F19:K19) | =MAX(MinimumBalance–BalanceBeforeSTLoan,0) | =BalanceBeforeSTLoan+STLoan | ≥ | =MinimumCash |
| 20 | =–LTRate*LTLoan | =–STRate*M19 | | =–M19 | =N19+SUM(F20:K20) | =MAX(MinimumBalance–BalanceBeforeSTLoan,0) | =BalanceBeforeSTLoan+STLoan | ≥ | =MinimumCash |
| 21 | =–LTRate*LTLoan | =–STRate*M20 | | =–M20 | =N20+SUM(F21:K21) | =MAX(MinimumBalance–BalanceBeforeSTLoan,0) | =BalanceBeforeSTLoan+STLoan | ≥ | =MinimumCash |
| 22 | =–LTRate*LTLoan | =–STRate*M21 | =–LTLoan | =–M21 | =N21+SUM(F22:K22) | =MAX(MinimumBalance–BalanceBeforeSTLoan,0) | =BalanceBeforeSTLoan+STLoan | ≥ | =MinimumCash |

**图 16.25**　应用计算机仿真的 EGGY 公司现金流管理问题的电子表格模型。假设单元格是现金流(F12:F21)、预测单元格是余额(N22)。

给公司招致严重灾难。计算机仿真将会显示有利结果发生的相对可能性。

下面是这个模型中的关键单元格的总结。

**假设单元格**：现金流（CashFlow）（F12：F21）
**预测单元格**：余额（EndBalance）（N22）

## 仿真结果

> 在频率图中的确定性方框里显示了试验次数的88%获得了10年末的正现金余额。

图16.26给出了应用计算机仿真试验500次得到的结果。因为EGGY公司管理层特别感兴趣于了解目前的财务计划在10年后得到一个正的现金余额的可能性有多大，我们将数字0输入到频率图的左下角的方框中。在中下部的确定性方框显示了试验次数的88%的结果是10年后得到正的现金余额。进一步分析，频率图和累积图都说明了大多数的正现金余额是非常大的，其中的一些甚至超过了10000000美元，整个试验的结果是6700000美元。

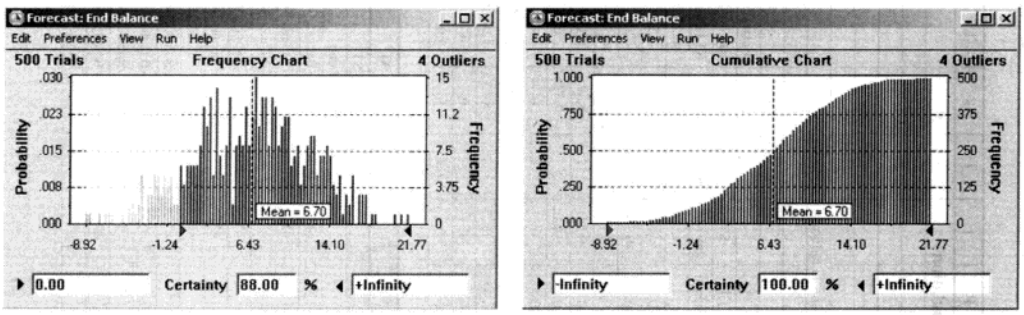



图16.26　总结EGGY公司现金流管理问题的图16.25仿真模型运行结果的频率图和累积图。

另一方面，所有试验次数中还有令人担心的12%导致了10年后的负现金余额。尽管巨大的损失很少，但是大部分的负现金余额是比较大的，范围从1000000美元到3000000美元。

## 结　论

EGGY公司管理层感到很高兴，仿真结果说明所建议的财务计划很可能在10年末获得有利的结果。同时，管理层感觉到公司应该谨慎地采取措施来降低12%的不利结果发生率。

一个可能性就是增加长期贷款的数额，因为当现金流并不如目前计划的那样理想时，这将会减少后面几年的高利率短期贷款数额。这个可能性在习题16.19中调查过了。

> 一个更加谨慎的扩充计划需要提高结束时实现正的现金余额的可能性。

在10年末能够导致负现金余额的情况就是因为过高估计了这种服务的需求，公司的退休社区未能充分运用。所以，EGGY公司管理层认为应该采取较为谨慎的方法来推进目前的财务计划（即在10年后建成更多的退休社区）。

采取这一政策后，EGGY公司管理层同意了财务计划，它已经编入了图16.25的电子表格模型中。10年期的6650000美元贷款现在（在2003年初）就要开始安排。除此之外，一年期的短期贷款将会从2003年到2012的每年年初进行安排，务求满足公司现金余额达到500000美元的计划要求。

**问题回顾**

1. EGGY 公司管理层所面对的现金流管理问题是什么?
2. 在应用计算机仿真之前,先前用来分析现金流管理问题的管理科学技术是什么?
3. 计算机仿真考虑了先前管理科学技术没有考虑到的问题的哪一方面?
4. 应用计算机仿真的电子表格模型里的假设单元格中的数值是什么?
5. 电子表格模型中所决定的短期贷款的金额是多少?
6. 在计算机仿真的试验中,如果 10 年结束时结果是负现金余额,会发生什么情况?
7. 在 10 年结束时,试验次数的百分之多少会发生负现金余额?
8. EGGY 公司管理层采取什么措施来降低 10 年末发生负现金余额的可能性?

## 16.5 财务风险分析:梦大发展公司案例再研究

计算机仿真应用最早的领域之一,要追溯到 60 年代,即财务风险分析领域。目前这仍然是最重要的应用领域之一。

当评估财务投资(或者是一种投资证券)时,一个关键的权衡是在投资的收益(return)和与投资相关联的风险(risk)之间如何取舍。每一个目前计划的项目中所获得的收益是比较容易计算的,然而,评估风险相对难一些。幸运的是,计算机仿真比较适合于执行基于风险曲线(risk profile)的风险分析,也就是投资收益的频率分布图。其中反映不利收益的频率分布清晰地描绘了和投资相关联的风险。

下面的例子证明了房地产投资情况中的这种方法。如同前节中的 EGGY 案例一样,你将会看到计算机仿真用来提炼由线性规划得到的初步分析,因为这个初步分析没有把未来现金流的不确定性考虑在内。

### 梦大的财务风险分析问题

在 4.2 中介绍的梦大发展公司是一个大型商业房地产开发投资商。该公司正在考虑在三个工程项目中持股,这三个项目为高层商务楼、宾馆和购物中心。每个项目合作者都需要投入三年的时间建设,在项目完成后的前 3 年可拥有所有权,然后在第 7 年售出。通过估计预期现金流,4.2 节介绍了如何运用线性规划分析梦大公司应该在各个项目的每股中持多少份额,并提出了如下的建议。

**建　议**

不要对高层商务楼项目投资持股。
宾馆项目持股 16.50%。
购物中心项目持股 13.11%。

这个建议估计可以为梦大公司创造净现值(NPV)18.11 万美元的利润。

然而,梦大公司的管理层非常明白这些做法都没有将风险考虑在内。由于很难预测在数年后将房产推向市场时市场的竞争状况会如何,所以这些项目都是具有相当风险的。虽然项目前三年的支出成本能够非常近似地估计出来,但后三年的净收入就很难确定了。最后,在第 7 年时,售出每个项目的价格可能会在很大的范围内波动。所以,管理层想要(用

计算机仿真)进行风险分析获得对此项建议所获得的净现值可能面临的风险分析结果。

为了进行风险分析,梦大公司的职员花大量时间估计这 7 年中每个项目的现金流中不确定的数值。这些数据都已在表 16.2 总结出(单位为百万美元),假设 100% 的项目股份。这样,当持有一个项目较小份额的股份,在表中的梦大公司所获得的数据也应该成比例地减少。每个项目现金流从第 1 到第 6 年假设服从正态分布(normal distribution),其中第一个数值为估计的均值(mean),第二个数字为估计的分布的标准差(standard deviation)。在第 7 年,售出地产的收入是假设服从从第一个数字到第二个数字范围的均匀分布(uniform distribution)。

**表 16.2 梦大公司预计的 100% 持股的宾馆和购物中心投资方案的现金流。**

| 宾馆投资项目 | | 购物中心投资项目 | |
|---|---|---|---|
| 年　份 | 现金流(百万美元) | 年　份 | 现金流(百万美元) |
| 0 | -80 | 0 | -90 |
| 1 | 正态分布(-80,5) | 1 | 正态分布(-50,5) |
| 2 | 正态分布(-80,10) | 2 | 正态分布(-20,5) |
| 3 | 正态分布(-70,15) | 3 | 正态分布(-60,10) |
| 4 | 正态分布(+30,20) | 4 | 正态分布(+15,15) |
| 5 | 正态分布(+40,20) | 5 | 正态分布(+25,15) |
| 6 | 正态分布(+50,20) | 6 | 正态分布(+40,15) |
| 7 | 均匀分布(+200,844) | 7 | 均匀分布(+160,600) |

为了计算净现值(NPV),设定每年资金成本为 10%。这样为了求得净现值,在将所有的贴现值加总之前,必须用 $1.1^n$ 去除以第 $n$ 年的现金流。

## 应用计算机仿真的电子表格模型

> 为假设单元格输入了参数后,你可以通过选择单元格菜单中的参数选项使用 Crystal Ball 来显示这个单元格的均值。

在图 16.27 中,这个问题的电子表格模型已经建立。对于目前(第 0 年)的现金流是没有不确定性的,出现在单元格 D6 和 D16 中,所以这些是数据单元格。不过,因为第 1 ~ 7 年的不确定性,单元格 D7:D13 和 D17:D23 包含了这些年份的仿真现金流,作为假设单元格(在图 16.27 单元格中的数字刚好是平均值,是为了定义假设单元格时而输入的)。表 16.2 指出了估计现金流的概率分布和相应的参数,因此分布的形式已经记录到了单元格 E7:E13 和 E17:E23 中,它们所对应的参数是单元格 G7:G13 和 G17:G23。图 16.28 显示了正态分布对话框,它用来输入第一个假设单元格 D7 的正态分布参数(均值和标准差),参数关联到单元格 F7 和 G7。其他正态分布的参数也可以复制粘贴到相应的假设单元格中。平均分布对话框(就像前面图 16.4 中显示的那个)以同样的方式把这类分布的参数输入到假设单元格 D13 和 D23。

在单元格 D6:13D 和 D16:D23 中的仿真现金流是对于宾馆和购物中心持有 100% 股份。所以梦大公司这些现金流的份额需要基于公司在这个项目中所持有的股份成比例地减少。正在分析的建议是持有单元格 H28:H29 中所示的份额。公式已经输入到了单元格 D28:D35(见图 16.27 的底部),并给出了梦大公司对应两个项目所持股份的每年的总现金流。

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Simulation of Think-Big Development Co. Problem** | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | | **Project Simulated** | | | | |
| 4 | | | | **Cash Flow** | | | | |
| 5 | **Hotel Project:** | | | **($millions)** | | | | |
| 6 | | Construction Costs: | Year 0 | -80 | | | | |
| 7 | | | Year 1 | -80 | *Normal* | -80 | 5 | (mean, st. dev.) |
| 8 | | | Year 2 | -80 | *Normal* | -80 | 10 | (mean, st. dev.) |
| 9 | | | Year 3 | -70 | *Normal* | -70 | 15 | (mean, st. dev.) |
| 10 | | Revenue per Share | Year 4 | 30 | *Normal* | 30 | 20 | (mean, st. dev.) |
| 11 | | | Year 5 | 40 | *Normal* | 40 | 20 | (mean, st. dev.) |
| 12 | | | Year 6 | 50 | *Normal* | 50 | 20 | (mean, st. dev.) |
| 13 | | Selling Price per Share | Year 7 | 522 | *Uniform* | 200 | 844 | (min,max) |
| 14 | | | | | | | | |
| 15 | **Shopping Center Project** | | | | | | | |
| 16 | | Construction Costs: | Year 0 | -90 | | | | |
| 17 | | | Year 1 | -50 | *Normal* | -50 | 5 | (mean, st. dev.) |
| 18 | | | Year 2 | -20 | *Normal* | -20 | 5 | (mean, st. dev.) |
| 19 | | | Year 3 | -60 | *Normal* | -60 | 10 | (mean, st. dev.) |
| 20 | | Revenue per Share | Year 4 | 15 | *Normal* | 15 | 15 | (mean, st. dev.) |
| 21 | | | Year 5 | 25 | *Normal* | 25 | 15 | (mean, st. dev.) |
| 22 | | | Year 6 | 40 | *Normal* | 40 | 15 | (mean, st. dev.) |
| 23 | | Selling Price per Share | Year 7 | 387.5 | *Uniform* | 160 | 615 | (min,max) |
| 24 | | | | | | | | |
| 25 | | | | **Think-Big's** | | | | |
| 26 | | | | **Simulated Cash Flow** | | | | |
| 27 | | | | **($millions)** | | | | **Share** |
| 28 | | | Year 0 | -24.999 | | | Hotel | 16.50% |
| 29 | | | Year 1 | -19.755 | | Shopping Center | | 13.11% |
| 30 | | | Year 2 | -15.822 | | | | |
| 31 | | | Year 3 | -19.416 | | Cost of Capital | | 10% |
| 32 | | | Year 4 | 6.917 | | | | |
| 33 | | | Year 5 | 9.878 | | | | |
| 34 | | | Year 6 | 13.494 | | | | |
| 35 | | | Year 7 | 136.931 | | | | |
| 36 | | | | | | | | |
| 37 | | Net present Value ($millions) | | 18.120 | | | | |

| | C | D |
|---|---|---|
| 25 | | **Total Simulated** |
| 26 | | **Cash Flow** |
| 27 | | **($millions)** |
| 28 | Year 0 | =HotelShare*D6+ShoppingCenterShare*D16 |
| 29 | Year 1 | =HotelShare*D7+ShoppingCenterShare*D17 |
| 30 | Year 2 | =HotelShare*D8+ShoppingCenterShare*D18 |
| 31 | Year 3 | =HotelShare*D9+ShoppingCenterShare*D19 |
| 32 | Year 4 | =HotelShare*D10+ShoppingCenterShare*D20 |
| 33 | Year 5 | =HotelShare*D11+ShoppingCenterShare*D21 |
| 34 | Year 6 | =HotelShare*D12+ShoppingCenterShare*D22 |
| 35 | Year 7 | =HotelShare*D13+ShoppingCenterShare*D23 |
| 36 | | |
| 37 | Net Present Value ($millions) | =CashFlowYear0+NPV(CostOfCapital,CashFlowYear1To7) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| CashFlowYear0 | D28 |
| CashFlowYear1To7 | D29:D35 |
| CostOfCapital | H31 |
| HotelShare | H28 |
| NetPresentValue | D37 |
| ShoppingCenterShare | H29 |

**图 16.27** 梦大发展公司的财务风险分析问题应用计算机仿真的电子表格模型。假设单元格是D7:D13和 D17:D23，预测单元格是净现值（D37），决策变量是宾馆股份（H28）和购物中心股份（H29）。

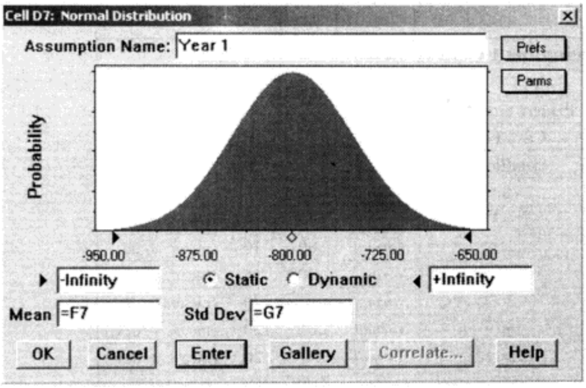



图 16.28　图 16.27 电子表格模型中的以单元格 F7:G7 为参数的正态分布被输入到了第一个假设单元格 D7 中。

NPV(贴现率,现金流)函数计算规则间隔(如每年)未来现金流的净现值,它们设定在一定范围内的单元格(现金流),使用指定的每个间隔期的贴现率。

梦大公司的管理层希望获得这个建议的总净现值(NPV)的风险曲线。所以,预测单元格是净现值(D37)。

下面是这个模型中一些重要单元格的总结。

**假设单元格:**单元格 D7:D13 和 D17:D23

**决策变量:**宾馆份额(H28)和购物中心份额(H29)

**预测单元格:**净现值(D37)

## 仿真结果

频率图提供了与建议对应的风险。

使用运行参数对话框来指定 1000 次试验,图 16.29 显示了图 16.27 运用计算机仿真的电子表格模型的运行结果。图 16.29 的频率图提供了采用建议后的风险曲线,因为它显示了相关各种净现值(NPV)的各种发生可能性,包括净现值(NPV)是负的情况。平均值是 18116000 美元,这是非常诱人的。但是,在这 1000 次的试验中,净现值(NPV)产生了一个巨大的波动范围,从 -22000000 美元到 60000000 美元。这里有一个很明显的发生巨大损失的可能。通过在频率图的左下角的方框中输入数字 0,则确定性(Certainty)方框中显示了有 81% 的试验次数获得了利润(正的净现值)。这也说明不利的一方面是有大概 19% 的可能。图上从左边到 0 的小部分浅灰色区域说明大部分引起损失的试验都小于 10000000 美元,但是其中也有不少试验其损失额度达到 10000000 美元和 20000000 美元之间。

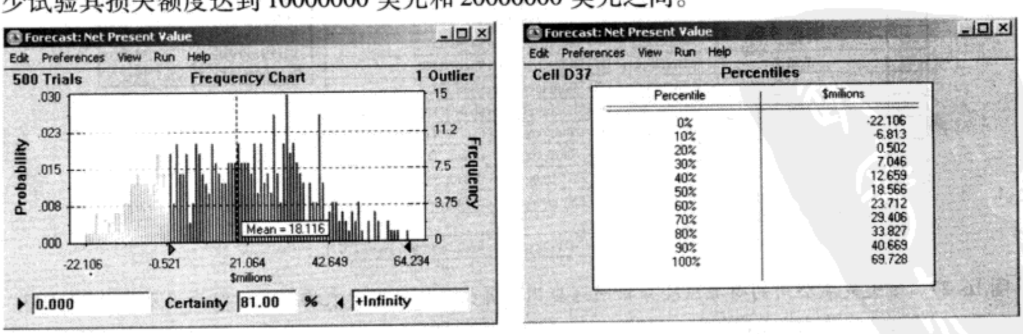



图 16.29　频率图和百分比表,总结了图 16.27 梦大公司财务风险分析问题的计算机仿真运行的结果。在频率图中确定性方框显示了有 81% 的试验获得了正的净现金流。

图 16.29 的百分比表也提供给管理层一些更好地进行风险估计的特别数值。数值 -6.813对应的 10% 指出有 10% 的试验发生了超过 6800000 美元的损失。另一方面，40.669 对应的 90% 指出有 10% 的机会可以实现巨大的利润(NPV)，超过 40669000 美元。

有了这些信息后，管理决策现在就可以制定，巨大利润的可能性是否与伴随发生损失甚至巨大灾难所对应的巨大的风险相称。这样，计算机仿真的作用就是提供了做正确决策所需要的信息，但是，管理层应该通过正确的判断来做出决策。

**问题回顾**

1. 投资(或者是投资证券)的风险曲线是什么?
2. 梦大发展公司管理层需要评估的投资建议是什么?
3. 需要为这个案例应用计算机仿真做准备的估计值是什么?
4. 这个案例的电子表格模型中的假设单元格出现了什么数字?
5. 这个案例的预测单元格中出现了什么数字?
6. 计算机仿真能够显示如果梦大管理层同意这个投资建议的话其发生损失的有意义的概率吗?

## 16.6　旅游业中的收益管理

近年来管理科学的一个最广为人知的应用领域之一是改善旅游业中的收益管理。收益管理涉及了收益流的各种方式的增长，比如为不同种类的顾客设定不同的路费。目标是通过设定不同的路费最大化总收人，这些路费在不同市场细分中处于愿意支付的最高路费的部分，并且还得考虑为不同的游客适当分配座位。

正如这节的例子，收益管理的一个关键方面就是超额订票问题，也就是说所接受的预订票数稍微大于现有可用的座位。通常会有一小部分预订座位的游客实际上没有搭乘，所以超额订票可以增加收益，因为它实际上充分利用了现有座位。但是，如果到达的顾客数目大于现有座位数目，这样也会发生成本。所以，超额订票的数量需要仔细地设定，从而可以达到在利用现有座位和避免顾客退票二者之间的平衡。

**美国航空**(American Airlines)公司就是开展管理科学广泛应用并提供收益管理的先驱。其指导格言是“在合适的时间把合适的机票卖给合适的顾客”。这方面的工作获得了当年全世界管理科学应用的弗兰茨 · 厄德曼奖。正如 Interfaces 杂志的 1992 年 1 ~2 月的那期中的文章①所描述，这个应用确实为美国航空公司每年增收超过 5 亿美元。增加的收益中几乎一半是来自超额订票模型的应用。

随着美国航空公司的这一重大突破，其他的航空公司也迅速地跟随以相似的方式采用了管理科学。这些收益管理的应用迅速地推广到了全世界旅游业的其他部分(铁路旅游、海运路线、汽车出租等等)。下面我们介绍的就是一家航空公司的超额订票问题。

### Transcontinental 航空公司的超额订票问题

Transcontinental 航空公司有一趟从旧金山到芝加哥的日航班(包括周末)，主要服务于

① 这篇文章可以在 www.mhhe.com/hillier2e/articles 下载。

商业旅行。在一个机舱中有 150 个座位。每个座位的平均费用是 300 美元。这是不可退票的费用,所以退票的罚金就是整个票价。运行一趟航班的固定成本是 30000 美元,所以在任何一天订票超过 100 个就可以盈利了。

对于这些航班中的大部分,要求订票的数字远远超过了现有的座位数。公司的管理科学小组已经在收集过去几个月中的每次航班的订票数的数据。平均数字是 195,但是每趟航班之间相对平均值的偏差是相当大的。为这些数据所作的频率分布图说明,这些数据粗略地服从钟形曲线分布。所以,小组估计了每趟航班订票数服从正态分布(normal distribution),均值是 195。数据估计的计算得到标准差是 30。

高达 20% 的预订缺席率表明,需要针对这一航班开发特别的超额订票策略。

公司的策略是接受每趟航班 10% 的超过实际座位数的超额订票。因为它所有顾客的大概 10% 最终会缺席。但是,某些特殊航班却不同于这种情况,为此公司召集管理科学小组来分析对于这种特殊航班应该采取哪种超额订票策略。这就是刚才所提的从旧金山到芝加哥的每天航班。即使当全额的票数 165 达到(对于大多数的航班)时,通常也会有很多的空位。当收集数据时,管理科学小组就已经发现原因了。只有 80% 的订票顾客会乘坐他所订的航班,其他 20% 的乘客(或者,在大多数情况下,允许他们的公司这样去做)是因为计划改变而被处以罚金。

既然数据已经收集,管理科学小组决定开始分析调查将接受订票数目增加到 190 的选择。如果这个特殊航班的接受订票数字实际上达到了这个水平的话,那么这个数字应该是足够大来避免许多或者是某些空位。更进一步,这个数字可以应该足够小以至于许多顾客因为实际订票数超过座位数(150)而不得不改乘另一航班的情况尽量发生得不多。这样,190 看上去是很好的首选,它能平衡避免空余较多座位和迫使许多顾客改变航班的两种情况。

当一个顾客改乘另一航班时,航空公司必须安排顾客到相近的另一到芝加哥的航班。公司这种安排的平均成本是 150 美元。除此之外,公司还给予顾客使用以后航班的 200 美元的优惠券。公司觉得在这部分改机的顾客身上还有额外的 100 美元的隐性商誉损失成本。所以,改机顾客的总成本被估计为 450 美元。

管理科学小组现在想利用计算机仿真来调查接受 190 订票数的可能,由频率图所生成的每天航班的运行性能的三个指标如下:

1. 利润。
2. 使用座位数目。
3. 未登机顾客数目。

## 应用计算机仿真的电子表格模型

使用三个性能指标表示仿真模型需要三个预测单元格。

图 16.30 显示了这个问题的电子表格模型。因为这里有三个目标单元格的指标,电子表格模型需要三个预测单元格。这些预测单元格是利润(Profit)(F23)、座位使用数(NumberOfFilledSeats)(C20),还有未登机顾客数目(NumberDeniedBoarding)(C21)。决策变量接受订票数(ReservationsToAccept)(C13)已经设定为 190,是目前调查的数值。一些基本的数据也已经输入到了电子表格里顶部附近的 C4:C7 单元格中。

计算机仿真的每次试验都会对应一天的航班。有两个随机输入值与每次航班相关联,即要求订票的顾客数[单元格 B10 中缩写的机票需求(Ticket Demand)]和顾客的实际登机数[缩写为单元格 B17 中的登机人数(Number That Show)]。这样,这个模型中的两个假设

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Airline Overbooking** | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | **Data** | | | |
| 4 | | Available Seats | 150 | | | |
| 5 | | Fixed Cost | $30,000 | | | |
| 6 | | Avg. Fare / Seat | $300 | | | |
| 7 | | Cost of Bumping | $450 | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | | | | Mean | Standard Dev. |
| 10 | | Ticket Demand | 195 | *Normal* | 195 | 30 |
| 11 | | Demand (rounded) | 195 | | | |
| 12 | | | | | | |
| 13 | | Reservations to Accept | 190 | | | |
| 14 | | | | | | |
| 15 | | | | | Tickets | Probability |
| 16 | | | | | Purchased | to Show Up |
| 17 | | Number That Show | 152 | *Binomial* | 190 | 80% |
| 18 | | | | | | |
| 19 | | | | | | |
| 20 | | Number of Filled Seats | 150 | | Ticket Revenue | $45,000 |
| 21 | | Number Denied Boarding | 2 | | Bumping Cost | $900 |
| 22 | | | | | Fixed Cost | $30,000 |
| 23 | | | | | Profit | $14,100 |

| | B | C |
|---|---|---|
| 11 | Demand (rounded) | =ROUND(SimulatedTicketDemand,0) |

| | E |
|---|---|
| 15 | Tickets |
| 16 | Purchased |
| 17 | =MIN(Demand,ReservationsToAccept) |

| Range Name | Cell |
|---|---|
| AvailableSeats | C4 |
| AverageFare | C6 |
| BumpingCost | F21 |
| CostOfBumping | C7 |
| Demand | C11 |
| FixedCost | C5 |
| NumberDeniedBoarding | C21 |
| NumberOfFilledSeats | C20 |
| NumberThatShow | C17 |
| Profit | F23 |
| ReservationsToAccept | C13 |
| SimulatedTicketDemand | C10 |
| TicketRevenue | F20 |
| TicketsPurchased | E17 |

| | B | C |
|---|---|---|
| 20 | Number of Filled Seats | =MIN(AvailableSeats,NumberThatShow) |
| 21 | Number Denied Boarding | =MAX(0,NumberThatShow–AvailableSeats) |

| | E | F |
|---|---|---|
| 20 | Ticket Revenue | =AverageFare*NumberOfFilledSeats |
| 21 | Bumping Cost | =CostOfBumping*NumberDeniedBoarding |
| 22 | Fixed Cost | =FixedCost |
| 23 | Profit | =TicketRevenue–BumpingCost–FixedCost |

**图 16.30** 应用计算机仿真的 T 航空公司超额订票问题的电子表格模型。假设单元格是仿真机票需求(C10)和登机顾客数(C17)。预测单元格是利润(C23)和未登机顾客数(C21)，决策变量是接受订票数(C13)。

单元格就是仿真机票需求(C10)和登机人数(C17)。

由于管理科学小组已经估计了要求订票的顾客的人数服从正态分布,其均值为195,标准差是30,这个信息已经输入到了单元格D10:F10。正态分布对话框(如前面的图16.28所示)用来输入带有这些参数的正态分布到仿真机票需求单元格(C10)中。因为正态分布是连续分布,然而订票数是整数值,需求(C11)使用了Excel的ROUND函数,它可以将仿真机票需求(SimulatedTicketDemand)中的数值近似成最接近的整数。

第二个假设单元格登机人数(Number That Show)(C17)中的随机输入数取决于两个数值。一个是机票订购数(TicketPurchased)(E17),它是需求(Demand)(C11)和接受订票数(ReservationsToAccept)(C13)中的最小值。另一个是订票的顾客登机的概率。这个概率在单元格F17中已经设定为80%,因为这个平均百分数是在近几个月内统计得出。

无论如何,这些购票顾客登机的实际概率在任何一天都是在平均值周围的一定范围内波动的。因此,尽管登机人数(Number That Show)(C17)被认为是非常接近单元格E17和F17中的数值的,根据某些概率分布这个数值会有一些波动。那么这个假设单元格的合适的概率分布是什么?适合这一单元格的特点的一个分布证明是二项式分布(binomial distribution)。

> 二项式分布的特点正是假设单元格登机人数所需要的。

如16.7节中所说明的,二项式分布给出了在一定的机会数下某一特定事件发生数的概率分布。在本例中,事件就是顾客登机。这一事件的发生的机会是顾客订票。这些发生数一般是作为抽样(不要和计算机仿真的试验相混淆)。二项式分布假设,抽样都是随机独立的,并且每次抽样时,这一事件发生的概率是固定不变的(这个例子中为80%)。这种分布的参数就是这个固定概率和样本容量。

> 选择动态选项是必须的,因为这个分布中的一个参数会随着每次试验而改变。

图16.31显示了二项式分布对话框,将单元格F17和E17中的参数输入此分布中的登机人数(NumberThatShow)(C17)。注意在样本(Trials)方框上方的动态(Dynamic)按钮已经选中。这个选项表示在概率和样本方框中的相关单元格会随着计算机仿真的每次运行而同时再评估,而不是始终保持在仿真初始运行时的参数数值(静态选项)。这是很必要的,因为二项式分布的样本数量(单元格E17给出的机票购买数量)会随着计算机仿真的每次新试验而改变。

输出单元格和预测单元格中输入的公式在图16.30的底部已经给出。

下面是这个模型的主要单元格。

**假设单元格:**仿真机票需求(C10)和登机人数(C17)
**决策单元格:**接受订票数(C13)
**预测单元格:**利润(F23),座位使用数(C20)和换机顾客数(C21)

## 仿真结果

接受订票数设定为190,应用图16.30电子表格模型500次仿真试验的计算机仿真后,图16.32给出了每一个预测单元格对应的频率图。

利润结果的估计是每次航班平均利润6821美元。但是,这个平均值稍微低于发生频率最高的利润。原因是有一小部分的试验远远低于平均值,包括了几次甚至发生亏损的试验,从而将平均值一定程度地拉低了。通过在左下角的方框中输入数字0,确定性方框中就会

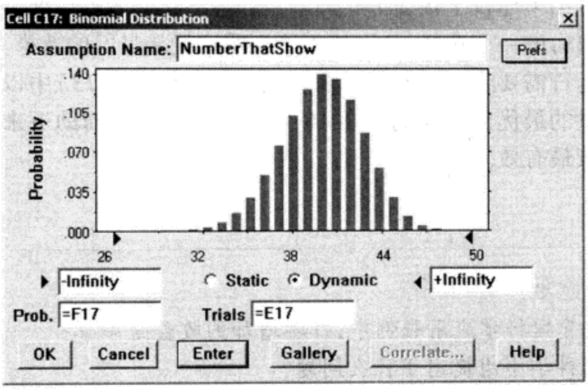



图 16.31　以单元格 F17 和 E17 为参数的二项式分布已经输入到了假设单元格登机人数(C17)中。动态选项已经选中，因为单元格 E17 中的数值会随着每次仿真试验而变化。

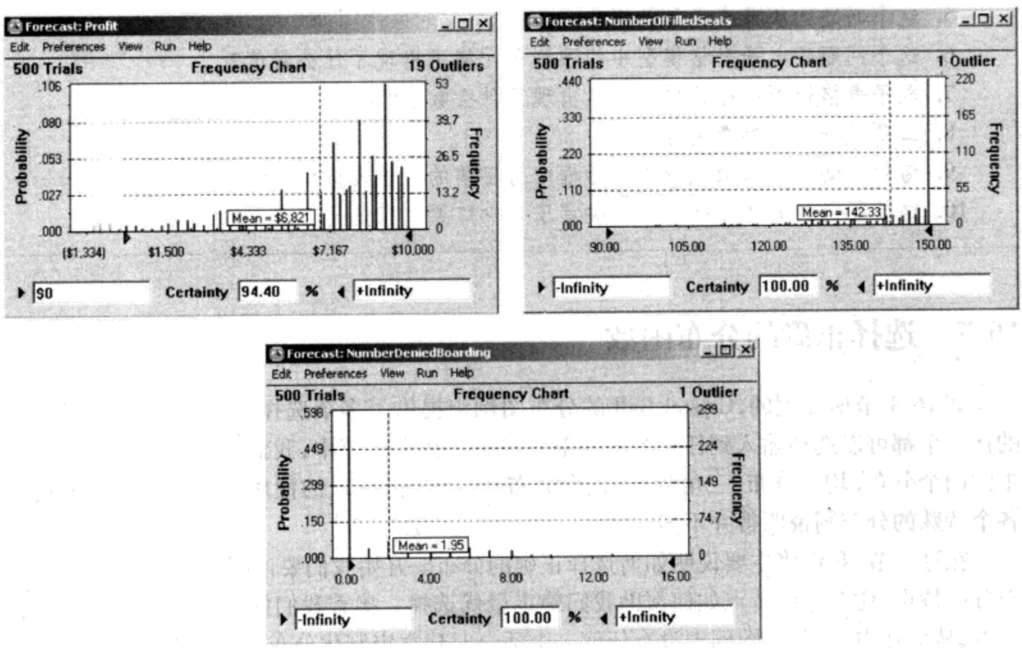



图 16.32　频率图总结了各个预测单元格的结果，利润单元格(F23)、座位使用数(C20)和换机顾客数(C21)，它来自于 T 航空公司超额订票问题的图 16.30 电子表格模型的仿真运行。确定性对话框显示了 94.40% 的试验获得了利润。

显示 94.40% 的试验获得了当天航班的利润。

座位使用数(C20)的频率图指出 500 次试验中的 220 次航班使用了 150 个座位。更进一步，大部分的试验至少是使用了 140 个座位。事实是 142.33 的均值是如此接近 150，以至于接受 190 的订票数的策略应该是非常出色的使用座位的业绩了。

充分利用座位的代价是有些顾客需要改乘别的航班。换机顾客数(C21)的频率图显示这会在 500 次试验中发生 201 次(500 - 299 = 201)。在几乎所有的这些试验中，换机顾客数字波动在 1 到 8 之间。如果加上没有顾客换机的 299 次试验，换机顾客数平均值仅仅是 1.95。

我们在 16.8 节中将重新回到这一案例，进一步评估应该接受多少订票数。

尽管这些结果建议了接受 190 订票数的策略在大多数情况下是比较有吸引力的一个选择，他们还不能证明这就是最好的选择。额外的仿真运行需要将其他的数目输入到接受订票数(C13)中以选取决策变量的最优值。我们将在 16.8 节的决策表的辅助下来证明如何决策最有效。

**问题回顾**

1. 在旅游业中收益管理表示什么意思？
2. 在美国航空公司的收益管理的管理科学应用先例中，每年增加的收益是多少？
3. 在这节的 T 航空公司中的管理科学小组提出了什么问题？
4. 在解决这个问题的过程中需要考虑何种平衡？
5. 这个问题的决策变量是什么？
6. 这个问题的电子表格模型中的预测单元格里出现了什么数值？
7. 电子表格模型的假设单元格里出现了什么数值？
8. 二项式分布的参数是什么？
9. 为什么必须在二项式分布对话框中为目前的电子表格模型选择动态选项？
10. 这节所得到的仿真结果是否决定了多少订票数应该是考虑中的最优值？

## 16.7 选择正确的分布函数

如 16.1 节所提到的，Crystal Ball 的分布图例中提供了多个选择。这 17 个分布函数中的任一个都可以选择输入到任一个假设单元格中。在上一节中，我们已经说明了这些分布中的四个分布(均匀分布、三角分布、正态分布和二项式分布)的使用。然而关于为何选择各个特殊的分布则说明得并不多。

在这一节，我们将主要说明如何选择正确的分布。开始我们要说明这 17 个分布中的大部分的特点，还有这些特点如何帮助我们确定最优选择。接着我们描述 Crystal Ball 的独特特点，从而在 16 个分布图例中没有任何一个适合时建立定制化分布函数。然后我们返回到 16.1 节的案例中，借以说明 Crystal Ball 的其他特点。当拥有历史数据时，这些特点将会说明哪一个现有的连续分布函数最适合这些数据，同时也可以估计这个分布的参数。如果你不喜欢这个选择，这个特点也提供了这些最佳可用分布的第二选择、第三选择等等。

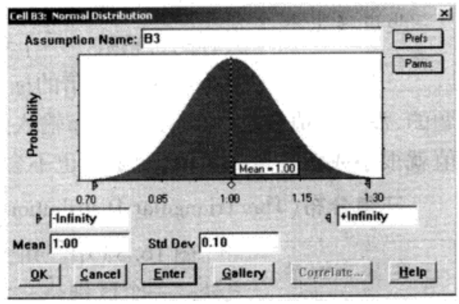
### 现有分布的特点

任何随机变量的概率分布都描述了这个随机变量的可能值的相对发生概率。如果任何值都是有可能发生的，包括整个可能发生值范围内的任何整数和分数，那么此时就是一个连续(continuous)分布。只有确定的特殊值(比如在某个范围内的整数)可能发生时，那么这个分布就是离散(discrete)分布。但是，如果可能发生的是在一个相对较大范围的整数值，连续分布可以用来近似估计，只要通过四舍五入法近似成整数即可(这种近似用在电子表格模型图 16.1 的 C12:C13 单元格和图 16.30 的 C10:C11 单元格中)。Crystal Ball 的分布图例中包含了连续分布和离散分布。我们先看看连续分布。

在图 16.33 中的右边给出了图例中常见连续分布的对话框。在每个对话框中的黑色图形显示了对应分布函数的典型的概率密度函数(probability density function)。概率密度函数各点的高度给出了在横轴的相对应值的相对发生概率。每一个分布都有最可能发生值,这点也对应了概率密度函数的峰值。更进一步,所有其他的相对较高的点都是和峰值临近的。这说明对于一个接近最可能发生值的中间值都有向峰值靠近的趋势。因此,这些分布也称为中心趋势分布(central-tendency distribution)。每个这种分布的特点都在图 16.33 中的左边列出。

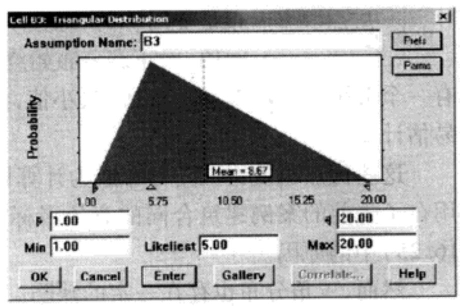
**正态分布:**

- 有最可能发生值(均值)
- 越接近均值的值发生率也越高
- 对称(均值左右对称值的概率相等)
- 极值也是有可能发生的,不过概率非常小




**三角分布:**

- 有最可能发生值
- 接近最可能发生值的值比较多
- 可以不对称
- 固定的上限和下限




**偏正态分布:**

- 有最可能发生值
- 正偏态(低于均值的值发生概率更高)
- 数值非负
- 极值(仅有最高值)也是有可能发生的,不过概率非常小

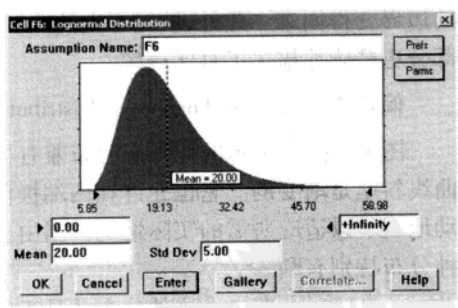



**图 16.33**　Crystal Ball 分布图例中三种常见中心趋势分布的特点和对话框:(1)正态分布;(2)三角分布;(3)偏正态分布。

**正态分布(The Normal Distribution)**

正态分布在管理科学和其他领域被广泛地使用,因为它描述了很多的自然现象。此分布出现如此频繁的一个原因是许多随机变量趋向于服从一个(接近)正态分布,尽管单个随

机变量可能不服从。使用这一分布需要估计均值和标准差。均值和最可能发生值是相一致的,因为这是一个对称分布。这样,均值就是非常直观的数值,它可以被估计,但是标准差却不行。大概这种分布有2/3均值左右范围的一个标准差。因此,如果没有掌握历史数据以计算标准差的估计值,一个近似的估计可以由经验丰富的人得出,他只要询问随机值在均值周围2/3的范围内的波动范围的数值即可。

正态分布允许负值,这对于一些应用是不适合的。

一些应用使用正态分布的一个风险是它会得到负值,即使这些值不可能发生。幸运的是,只有当均值小于三倍标准差时才会出现一定频率的负值。例如,将一个正态分布输入到了图16.30的假设单元格中,代表顾客的订票数。一个负的数值在这个例子中是没有意义的,但是由于均值是195,比3倍的标准差(3×30)还要大得多,所以这个案例是没有问题的,没有负值会发生(当正态分布输入到了图16.27的假设单元格中,代表现金流,那么均值就很小或者甚至是负值,但是这也不会存在问题,因为现金流可以是正也可以是负的)。

**三角分布**(The Triangular Distribution)

三角分布的参数相对容易估计,因为他们比较直观。

图16.33中三角分布和正态分布的形状比较显示了一些主要的不同之处。一个区别是三角分布有一个固定的最小值和固定的最大值,而正态分布允许存在概率极小的趋向于无穷远的极值。另一个区别是三角分布是非对称的(如图所示),因为最有可能发生的值不必是两个边界的中间值,而正态分布始终是对称的。这为三角分布提供了更多的柔性。还有一个关键的不同是它的参数(最小值,最可能值,最大值)是很直观的,所以它们也相对容易估计。

这些优点也使得三角分布成为计算机仿真的一个常用选择。这就是为什么这一分布被用在了先前的案例建筑合同的竞争者标价(图16.12)、工序时间(图16.18)和现金流(图16.25)中的原因。

然而,三角分布也存在一定的缺陷。一个缺点是在许多情况下,一些发生概率非常小的极值还是有可能发生的,所以设定固定的最小值和最大值是人为的。这也使得估计有意义的边界变得困难。此外,坡度不大的曲线,如正态分布的钟形曲线应当比三角分布中的直线部分更精确地描述了真实概率。

**偏正态分布**(The Lognormal Distribution)

图16.33中所示的偏正态分布兼有了正态分布和三角分布的一些优点,它的密度函数曲线斜率是渐变的。它也允许在两端极值的存在。同时,它不允许存在负值,所以它能够自动地调节以适应所需的实际情况。当由于均值小于3倍的标准差而不能采用正态分布时这种分布特别有利。

偏正态分布在其右边有个长长的尾巴,左边不存在负值。

这种分布总是正偏态,也就是说它的长长的尾部总是在右边。这样就使得最可能发生值会朝向左边集中(所以均值在其右边),所以这种分布没有三角分布这么具有柔性。另一个缺点是它有和正态分布相同的参数(均值和标准差),所以不直观的参数(标准差)很难估计,除非掌握了历史数据。

当需要使用不允许负值存在的正偏态分布时,偏正态分布提供了一个很好的选择。这就是为什么这种分布被频繁地使用来代表股票价格和房地产价格的原因。

**均匀分布**(The Uniform Distribution)

尽管前面的三种分布都是中心趋势分布,但是图 16.34 给出的均匀分布却不是。它有一个固定的最小值和一个固定的最大值。另外,它还规定在这两个边界之间的任何一个值发生的概率都不会比另一个高。所以,这种分布比中心趋势分布在同样的可能发生值范围内(包括极值)具有更多的变化性。

**均匀分布:**

- 固定平均的最小值和最大值
- 所有值等可能发生

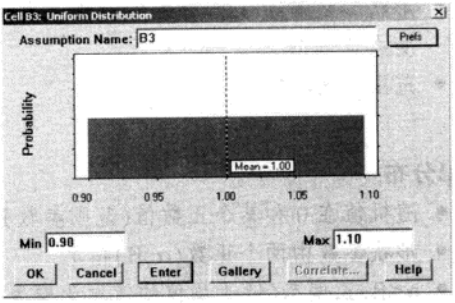



图 16.34 Crystal Ball 分布图例中均匀分布的特点和对话框

> 均匀分布很容易使用,但它只是对真实分布的粗略估计。

这种分布是一个使用起来特别方便的分布,因为它只有两个参数(最小值和最大值),并且这两个参数都是很直观的。正因为如此,它的使用率也相当高,在这章的前面,均匀分布用来代表报纸需求(图 16.1)、竞争者的建筑工程标价(图 16.12)和房地产未来的销售价格(图 16.27)。

这种分布的缺点是它通常只是对真实分布的粗略估计。最小值或者是最大值和其他处于二者边界之内的任何值发生概率相同,而边界之外的任何值都几乎不发生的情况是很少见的。

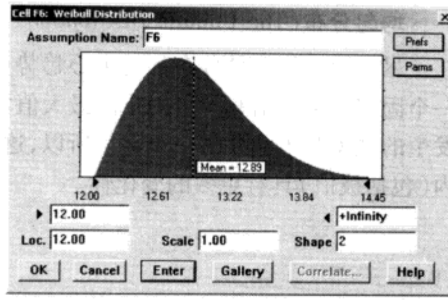
**韦布尔分布和 $\beta$ 分布**(The Weibull and Beta Distribution)

我们之所以同时描述韦布尔分布和 $\beta$ 分布,是因为根据图 16.35 所给出的分布曲线形状,这两种分布有相似的特点。和均匀分布相比较,这两个都是中心趋势分布。和正态、偏正态、平均分布相比较,这两个都是三个参数的分布。这三个参数提供了极大的柔性来调节曲线的形状以适应实际需要。这使得此分布能够根据需求而正偏、对称或负偏。这种柔性是此种分布的主要优点。另一个优点是他们有一个最小值,所以可以避免负值的存在。位置参数为韦布尔分布设定了一个最小值,因而 Crystal Ball 一般为 $\beta$ 分布设定了 0 作为最小值(如果需要为 $\beta$ 分布设定一个正的最小值,只要简单地把这个定值加在来自分布的任一个随机观察数即可)。韦布尔分布允许发生概率极小的右边极值的存在,但是 $\beta$ 分布有个固定的最大值。

> 韦布尔分布和 $\beta$ 分布具有足够的柔性以适应实际需要,但它们通常需要历史数据来计算参数的估计值。

某些参数,比如上面提到的韦布尔分布的位置参数,有一个直观的解释。两种分布的范围参数设定了分布的宽度(除去了韦布尔分布中的极少发生的极值)。无论如何,不管是韦布尔分布的形状参数还是 $\beta$ 分布的 $\alpha$ 和 $\beta$ 参数都不是特别直观的。因此,只有当掌握历史数据能够估计出这些参数时,这两种分布才会被采用(一个例外是 $\beta$ 分布的革新使用方

**韦布尔分布**:
- 大于某个值(位置参数)的随机值
- 形状参数大于 0(一般小于等于 10)
- 形状参数小于 3 变成了正偏态(低于均值的值发生概率更高)直至变成指数分布(形状=1)
- 形状参数等于 3.25 时左右对称，大于此值时变成负偏态
- 范围参数决定宽度




**β分布**:
- 随机值在 0 和某个正数值(范围参数)之间
- 形状参数由两个正数(α,β)指定
- α<β,正偏态(低于均值的值发生概率更高)
- β<α,负偏态

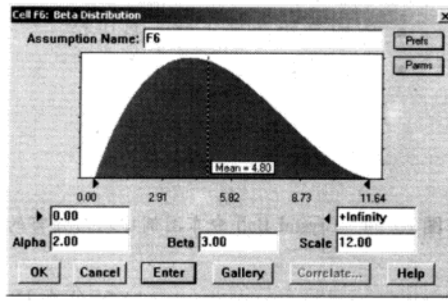



**图 16.35** Crystal Ball 分布图例中三参数分布的特点和对话框:(1)韦布尔分布;(2)β 分布。

法,就是在 8.4 节所描述的 PERT 三点估计方法,它使用了最小值、最可能值和最大值来计算近似值的均值和标准差)。当拥有了历史数据时,在这两种分布(还有其他的分布)中的选择就要在获得了分布的统计参数后考察哪一种分布更适合这些数据。随后我们将描述 Crystal Ball 如何为你解决这一切。

**指数分布**(The Exponential Distribution)

如果你已经学习了第 14 章的排队模型,但愿你能回忆起使用非常普遍的排队模型假设了顾客连续到达的时间间隔服从指数分布。这种假设的原因是,在大多数的情况下,顾客到达是随机事件,指数分布就是随机事件间隔时间的概率分布。14.1 节描述了指数分布的一些细节情况。

如图 14.3 中首先描述的,这种分布有如图 16.36 所示的异常的形状。特别的是,峰值是在 0 处,但是在其右边有长长的尾部。这说明最可能发生的时间是大大低于均值的较短的那些时间段,但是很长的时间段也是有可能发生的。这就是随机事件发生时间间隔的本质。

由于其中惟一的参数是随机事件的平均发生率,所以这种分布使用起来相对容易一些。

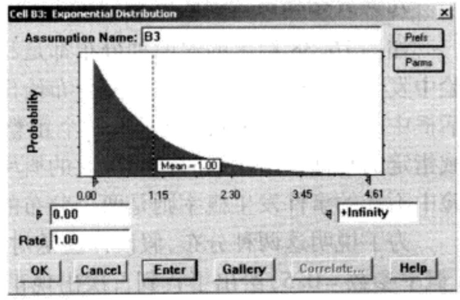
**泊松分布**(The Poisson Distribution)

尽管指数分布(比如前面的一些分布)是连续分布,但是泊松分布是一种离散分布。惟一的可能值是非负整数:0、1、2…。然而,将这种分布和指数分布互相搭配是很普通的,原因如下。如果连续事件间隔的时间服从指数分布(例如事件是随机发生的),那么某一段时间内事件的发生次数就服从泊松分布。这种分布还有其他的一些应用。

当考虑某一段时间内事件的发生次数时,输入到对话框的参数区域的"发生率"(Rate)应该是那段时间内事件发生的平均次数。

**指数分布：**

- 广泛应用于描述随机事件到达的时间(比如两次到达事件的间隔时间)
- 事件相互独立
  到达率=单位时间内的平均事件发生次数(例如每小时的到达次数)




**泊松分布：**

- 描述给定时间段或空间内的事件发生的次数
- 发生事件相互独立
- 事件发生的任何次数都是可能的
  发生率=一段时间内事件的平均发生次数(如每小时内的到达次数)，假设时间段是不变的

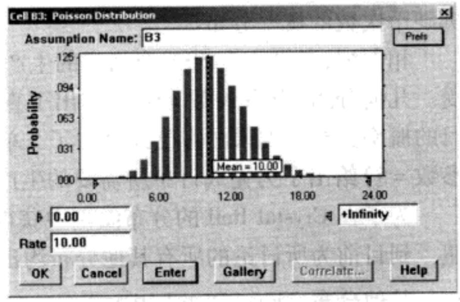



**图 16.36**　涉及随机事件的两种分布的特点和对话框。这些 Crystal Ball 分布图例中的分布是：(1) 指数分布；(2) 泊松分布。

**二项式分布(The Binomial Distribution)**

二项式分布也是一种离散分布，它的可能发生值是非负整数，如图 16.37 所示。在给定了事件发生的独立发生(称为试验)的次数后，它给出了一特定事件发生次数的概率分布，其中各个试验的事件发生概率是保持不变的。例如，如果目标事件是掷硬币得到正面，那么二项式分布(其概率参数 =0.5)给出了在给定掷硬币试验次数下得到正面次数的概率分布。每掷一次都是一次试验，这一事件(得到正面)的发生概率都是保持不变的(0.5)。

你可以看看前一节的另一个例子，在那里二项式分布输入到了图 16.30 的假设单元格登机人数(C17)中。在这一航空公司超额订票案例中，事件是顾客登机，试验是顾客订票，订票的顾客实际上乘坐那一航班的概率是固定不变的。

这种分布的参数是试验次数和每次试验中事件发生的概率。

**二项式分布：**

- 描述固定试验次数内一个事件的发生次数(例如在 10 次掷硬币中的正面次数)
- 对于每次试验，只有两个可能的结果
- 试验相互独立
- 对于每次试验，概率保持不变

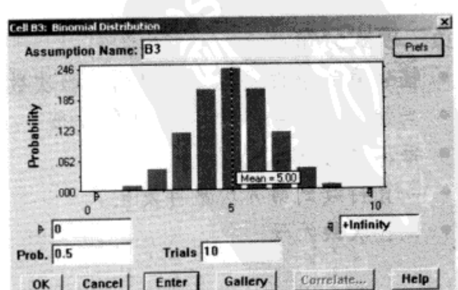



**图 16.37**　Crystal Ball 分布图例中的二项式分布的特点和对话框。

**几何分布和负二项式分布**(The Geometric and Negative Binomial Distributions)

如图 16.38 给出的这两种分布都是和二项式分布相关联的,因为他们也涉及了每次试验中发生事件的固定概率。几何分布给出了直到事件发生时的试验次数的概率分布。在对话框中的状态(Shape)区域输入一个正整数后,负二项式分布可以给出直到达到由状态区域指定的事件发生次数时试验次数的概率分布。这样,状态是这种分布的一个参数,每次试验中不变的事件发生概率则是两个分布的共同参数。

为了说明这两种分布,假设你还是对掷硬币(试验)得到正面的事件感兴趣。几何分布(概率参数 =0.5)给出了直到首次出现正面时的各试验次数的概率分布。如果你想获得五次正面,那么负二项式分布(概率参数 =0.5 和状态参数 =5)给出了直到出现 5 次正面时的掷硬币次数的概率分布。

相似地,考虑一个 50% 合格率的生产工序,生产的每单位产品都有 50% 的概率可以接受。几何分布(概率参数 =0.5)给出了直到获得可接受的一单位产品时需要生产的产品数目的概率分布。如果顾客已经订购了 5 单位的产品,负二项式分布(概率参数 =0.5 和状态参数 =5)给出了为完成订单所需要的生产次数的概率分布。

为了在 Crystal Ball 的分布图例中获得负二项式分布的对话框,需要点击更多(More)按钮。到目前为所讨论的所有其他分布均出现在前面章节里的对话框中(如图 16.3 所示)。

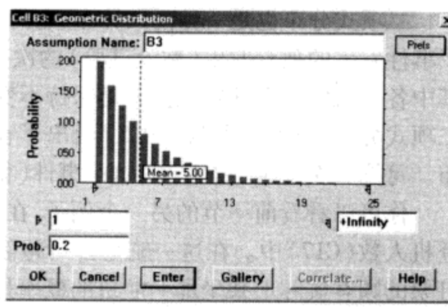
**其他分布**(Other Distributions)

分布图例中还包括了额外的六种分布:顾客分布、超几何分布、γ 分布、推理分布、帕累托分布和极值分布。点击对话框上的更多(More)按钮可以得到这些分布中后面的四种分布(在负二项式分布的后面)。

顾客分布是一种特别有用的分布,因为当分布图例里的 16 种分布都不合适时,它能够

**几何分布:**

- 描述直到事件发生时的试验次数(例如直到你赢时旋转轮盘赌的次数)
- 每次试验概率相同
- 一直持续到事件发生
- 试验次数无限




**负二项式分布:**

- 描述直到事件发生 $n$ 次时的试验次数
- 当状态参数=1 时等同于几何分布
- 每次试验概率相同
- 一直持续到第 $n$ 次事件发生
- 试验次数无限

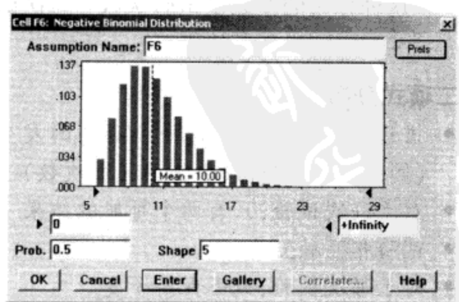



**图 16.38** 涉及直到事件发生时试验次数分布的特点和对话框。这些 Crystal Ball 分布图例中的分布是:(1)几何分布;(2)负二项式分布。

让你为自己设计一种分布。下面的小节就来关注一下如何实现这一目标。

剩余的五种分布并没有广泛地应用于计算机仿真中，所以不再讨论。

**顾客分布**(The Custom Distribution)

在分布图例中所包含的 17 种概率分布中，有 16 个是标准的类型，它们在概率和统计课程中都已经讨论过。在大多数情况下，这些标准分布中的一个需要输入到假设单元格中。然而，独特的情况偶尔也会出现，此时这些标准分布都不适合实际需要。这时就需要分布图例中的第 17 个，称为“顾客分布”。

> 从分布图例中选择顾客分布可以让你定制化自己的分布以适应特殊的情况。

顾客分布在你设计它之前实际上并不是一种分布。不过，你可以借助顾客分布定制化你自己的概率分布函数以适应你可能遇到的大多数独特的情况。在设计分布时，你可以选择输入单个的离散值、等概率发生的离散值的范围或者是一个连续分布。在图 16.39 的三个例子分别说明了这些选择。

在第一个例子中，一家公司正在开发一种新的产品，但是用三种工序中的哪一种来生产产品还是不清楚的。单位生产成本分别是 10 美元、12 美元、14 美元，取决于选择的工序。这些成本的各个离散值的概率如下：

20% 的概率，成本是 10 美元
50% 的概率，成本是 12 美元
30% 的概率，成本是 14 美元

图 16.39 的顶部显示了如何输入这种分布。每一个离散值和概率(以十进制数字表示)一次一个输入到数值(Value)和概率(Prob.)方框中，其余的两个方框空余。每次点击输入(Enter)按钮以清空参数输入方框，这样就可以输入下一组数值和概率。

在图 16.39 的中部给出了如何输入等概率发生的离散值的范围。在这个例子中，只摇一个骰子，因此可能值是 1、2、3、4、5 或者 6。这些值是等可能发生的，因此概率分布如下。

离散值范围：1、2、3、4、5、6

每个值的概率：$\frac{1}{6}$

这个分布可以输入到第一个例子中。不过，还有一个更快捷的输入方式，就是在数值方框中输入数值范围的最小值(1)而在数值 2 方框中输入数值范围的最大值(6)，在概率方框中输入所有数值的总概率(1)，在步长(Step)方框中输入相邻离散值的增长数值(1)，最后点击输入即可。

第三个选择就是输入连续分布，如图 16.39 的底部所示。这个例子的分布有下面的特点。

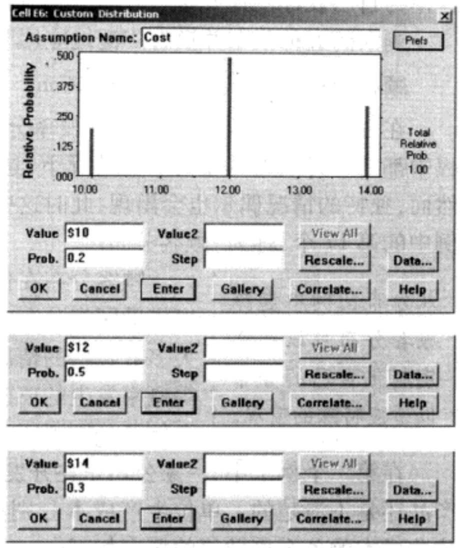
数值范围：4000 ~ 6000
此范围的总概率：1
数值的概率随着数值的增加而缓慢递减。

输入时，在数值方框输入数值范围的最小值(4000)，数值 2 方框输入数值范围的最大值(6000)，在概率方框中输入所有数值的总概率(1)，步长方框空余即可。在点击输入按钮之前的最后一步是把图右上角向下拉，这样就可以反映概率随着数值的增加而缓慢递减[如果在拖拉的过程中数值的总概率发生变化，点击重新度量(Rescale)按钮以重新设定此值]。

拖拉的过程有一个缺陷是图的顶部(如分布的密度函数所示)在拖拉后会保持一条直

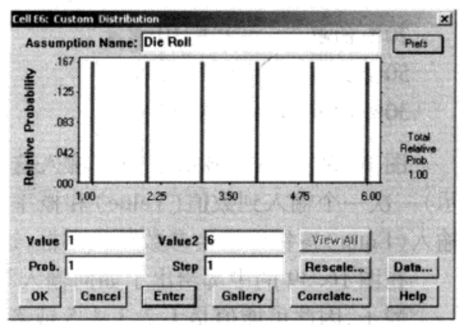
**离散值系列(顾客分布)**:

- 输入概率变化的一组值
- 对于每一个离散值,输入"数值"和"概率"(空余其他的方框)
- 点击输入按钮清空方框以输入下一组数值




**离散值范围(顾客分布)**:

- 输入离散值范围,各值等概率发生
- 在"数值"和"数值 2"对话框中分别输入范围的最小值和最大值
- 在"概率"方框中设定所有数值的总概率
- 在"步长"方框中输入离散值的间距




**连续分布(顾客分布)**:

- 在"数值"和"数值 2"方框中输入范围的最小值和最大值
- 在"概率"方框中输入所有数值的总概率
- 对于连续分布空余"步长"方框
- 向上或向下拖拉分布图的角部以改变整个范围的相对概率,拖拉角部可能会影响总概率,点击"重新度量"(Rescale)按钮以重新设定此值

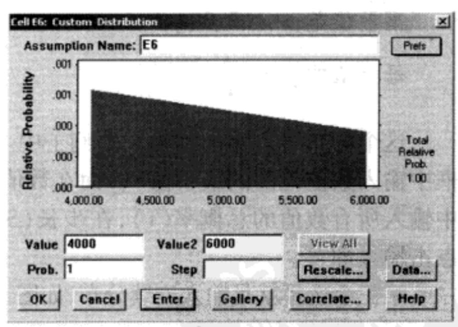



**图 16.39** 按照左边的操作说明,这些对话框依次说明了 Crystal Ball 的顾客分布如何以三种方式让你定制化自己的分布:(1)输入一系列离散值以及和它们对应的概率,(2)输入等概率离散值的范围,(3)输入直线封顶的连续分布。

线。因此,这个过程并不能让你把图形改成一些连续分布所需要的任意曲线。不过,Crystal Ball 确实允许你分别地输入分布的多个部分,只要每次输入一部分范围和它所对应的总概率即可,这样就可以更好地让你近似成连续分布所具有的曲线形状。

输入刚才所描述的三个选择(离散值系列、离散值范围和连续分布)的组合也是可能

的。这个过程在图 16.40 得到说明。这个例子是来自 12.1 节所介绍的高富布鲁克公司案例钻探石油收益的概率分布的变动。在那个案例中，不能发现石油（因此收益是 0 美元）的概率 0.75，发现石油的概率就是 0.25，此时的收益就是 800000 美元。然而，实际上如果发现了石油究竟能够得到多少收益有一定的不确定性，下面的分布会更贴近实际。

收益为 0 美元的概率是 0.75
收益值的范围：600000 美元到 1000000 美元
在这个范围内的数值是等可能发生的
这一范围的概率和：0.25

这个分布就把单一离散值 0 美元分布和 600000 美元到 1000000 美元之间的连续分布相结合。因此，我们就应用如 16.39 顶部的说明来分别输入 $0 和 0.75 到数值和概率方框中，然后点击输入按钮。接下来我们根据图 16.39 底部的说明把 $600000 输入到数值方框、$1000000 输入到数值 2 方框，并且把 0.25 输入到概率方框中，再次点击确定按钮。所有的这些输入操作如图 16.40 所示。

**组合（顾客分布）：**

- 离散值、离散值范围或者连续分布可以任意组合输入
- 输入每一个部分（如图 16.39）点击确定，再输入下一个
- 如果累积概率没有达到 1，点击"重新度量"，你可以按比例地调节所有的概率，以使它们的概率和达到 1

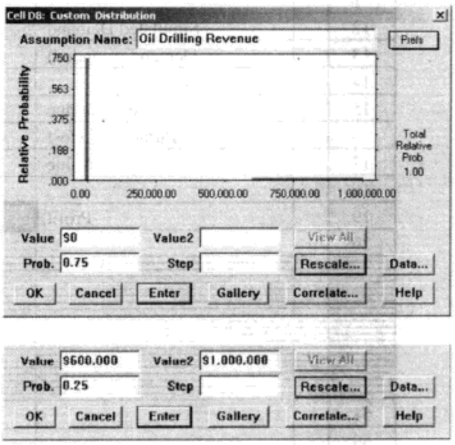



**图 16.40**　按照左边的操作说明，这些顾客分布的对话框说明了图 16.39 中两个选择的结合使用：(1) 输入离散值 $0；(2) 输入 $600000 到 $1000000 之间的平均分布。

## 选择最适合历史数据的连续分布

> 如果你不知道选择哪一个连续分布适合假设单元格，Crystal Ball 可以利用可用历史数据为你选择。

我们现在已经提到了分布图例中所有的 17 种概率分布类型，并描述了它们中大多数的特点。我们现在可以考虑如何选择最适合特定假设单元格分布的问题。当掌握了历史数据时，Crystal Ball 提供了一个很有力的工具选择连续分布，分法是使用分布图例中对话框上的"适合"（Fit）按钮。我们接下来结合 16.1 节提到的案例说明这一功能。

回想弗瑞迪报童在书报摊销售的一份最受欢迎的报纸是《金融日报》。弗瑞迪每天一早就从分销商那里购买报纸。由于在一天销售结束时剩余的报纸对弗瑞迪来说就是损失，他正在试着决策他未来的订购量应该是多少。这样就得到了 16.1 节前面所描述的图 16.1 所示的电子表格模型。这个模型包括了假设单元格仿真需求（C12）。开始时，40 到 70 之间的均匀分布输入到了假设单元格中。

为了更好地指导他的最佳订购量决策，弗瑞迪一直在记录这份报纸的每天需求情况(顾客购买报纸的数值)。图 16.41 的单元格 F4:F63 说明了他在过去 60 天内所收集的数据的一部分，还有一部分是来自图 16.1 中的原始电子表格模型。这些数据说明了每天的销售量是变化很大的——在 40 和 70 之间波动。无论如何，要弄清楚分布图例中的哪种分布最适合这些数据是非常困难的。

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Freddie the Newsboy** | | | | | Historical |
| 2 | | | | | | Demand |
| 3 | | | **Data** | | Day | Data |
| 4 | | Unit Sale Price | $2.50 | | 1 | 62 |
| 5 | | Unit Purchase Cost | $1.50 | | 2 | 45 |
| 6 | | Unit Salvage Value | $0.50 | | 3 | 59 |
| 7 | | | | | 4 | 65 |
| 8 | | | **Decision Variable** | | 5 | 50 |
| 9 | | Order Quantity | 60 | | 6 | 64 |
| 10 | | | | | 7 | 56 |
| 11 | | | **Simulation** | | 8 | 51 |
| 12 | | Simulated Demand | 55 | | 9 | 55 |
| 13 | | Demand (rounded) | 55 | | 10 | 61 |
| 14 | | | | | 11 | 40 |
| 15 | | Sales Revenue | $137.50 | | 12 | 47 |
| 16 | | Purchasing Cost | $90.00 | | 13 | 63 |
| 17 | | Salvage Value | $2.50 | | 14 | 68 |
| 18 | | | | | 15 | 67 |
| 19 | | Profit | $50.00 | | 16 | 67 |
| 20 | | | | | 17 | 68 |
| 58 | | | | | 55 | 41 |
| 59 | | | | | 56 | 42 |
| 60 | | | | | 57 | 64 |
| 61 | | | | | 58 | 45 |
| 62 | | | | | 59 | 59 |
| 63 | | | | | 60 | 70 |

图 16.41 单元格 F4:F63 包含了历史数据需求数据，它是由 16.1 节介绍的弗瑞迪报童为案例研究所收集的。B 列和 C 列来自图 16.1 案例的仿真模型。

Crystal Ball 提供了下面的步骤来解决这一难题。

**选择最适合数据的连续分布的步骤**

1. 收集所需要的数据以选择最佳分布输入到假设单元格中。
2. 把数据输入到建有仿真模型的电子表格中。
3. 选择你想定义的单元格作为假设单元格，其中含有最适合数据的分布。
4. 选择 Crystal Ball 工具条(如图 16.2 所示)上的定义假设单元格按钮，从而弹出分布图例对话框。
5. 点击此对话框上的适合(Fit)按钮，弹出首个适合分布对话框。

6. 使用这个对话框上的范围方框来输入在你的工作表上的历史数据的范围。
7. 点击对话框中的下一步(Next)按钮,弹出第二个适合分布对话框。
8. 使用这个对话框来指定哪一种连续分布应该考虑采用(在此步中不考虑离散分布)。
9. 还要使用此对话框来选择采用哪种排序方法来评估一种分布适合数据的程度(默认的是卡方测试,因为这种是最经常采用的。)
10. 点击确定(OK)按钮,弹出比较图,以确认最适合数据的分布(包括它所对应的参数值)。
11. 如果需要的话,可以反复点击下一种分布(Next Distribution)按钮以查看其他的同样适合数据的分布类型(包括它们的参数值)。
12. 选择了你所需要的分布(从第 10 步到第 11 步)后,在显示分布时点击接受(Accept)按钮。这样就可以把正确的参数输入到此分布的对话框中。点击确定就可以把这种分布输入到假设单元格中。

由于图 16.41 已经在单元格 F4:F63 中包含了所需要的数据,把这一步骤应用到弗瑞迪问题只要选择仿真需求(C12)作为我们想要定义的假设单元格,它包含了最适合数据的分布。然后应用第 4 步和第 5 步,弹出图 16.42 所示的首个适合分布对话框。图 16.41 中单元格 F4:F63 范围内的数据可以输入到此对话框的范围方框中。点击下一步按钮弹出图 16.42 所示的第二个适合分布对话框。当决定哪种连续分布应该考虑时,默认的选择是考虑分布图例中所有的连续分布。卡方测试的默认选项同样为排序方法做了选择。点击确定按钮弹出图 16.43 所示的比较图。垂线显示了图 16.41 中数据的频率图。比较图右边给出了最适合数据的分布,即参数最小值 =39.49 和最大值 =70.51 的均匀分布。

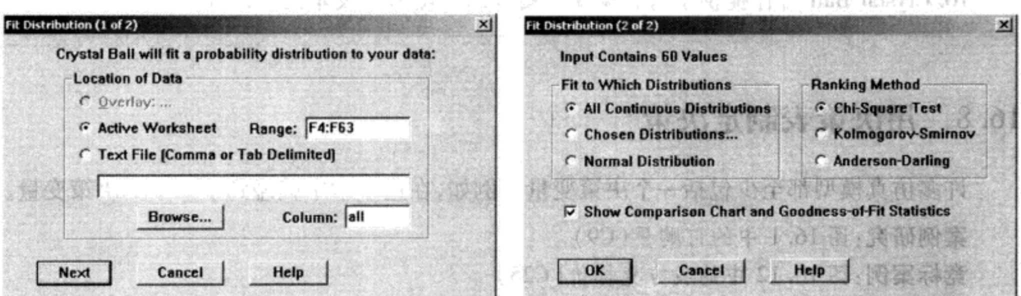



**图 16.42**　首个适合分布对话框指定案例图 16.41 中数据的范围。第二个适合分布对话框指定应该考虑哪种连续分布和使用哪种排序方法(卡方测试)以评估各种分布适合数据的程度。

这一结果说明,图 16.1 的弗瑞迪初始电子表格模型中在假设单元格仿真需求(C12)里输入了均匀分布,此选择是正确的。图 16.43 提供了参数值的稍微修改,即图 16.1 里单元格 E12:F12 中的最小值 =40 和最大值 =70,设定成现在的最小值 =39.49 和最大值 =70.51。因为仿真需求需要近似成图 16.41 里单元格需求(C13)中最接近的整数,所以这种修改是 40 和 70 之间所有整数数值的等概率分布。

如果使用了第 11 步,这个步骤提供了推理分布(均值 =54.39 和比例 =5.60)作为第二适合数据的分布。正态分布(均值 =54.48 和标准差 =9.14)作为第三适合数据的分布。无论如何,在这个案例中,没有理由选择这两种分布来代替均匀分布,所以这一步骤就是输入图 16.43 所确定的均匀分布到图 16.41 的仿真需求(C12)中。

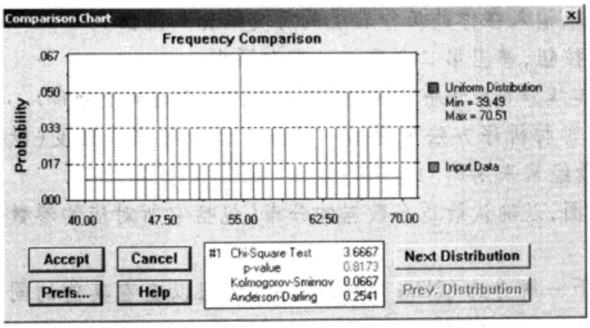



图 16.43 在左边,这个比较图给出了最适合图 16.41 中历史需求数据的连续分布。这种分布已经被分割(水平线),以便于和历史需求数据的频率分布相比较。

## 问题回顾

1. 在 Crystal Ball 的分布图例中有多少种可用概率分布?
2. 连续分布和离散分布的区别是什么?
3. 选择正态分布输入到假设单元格中可能存在什么风险?
4. 选择三角分布的优点有哪些?
5. 偏正态分布与正态、三角分布相比较有何特点?
6. 为什么均匀分布有时是假设单元格的方便的选择?
7. 为假设单元格选择韦布尔分布或者 $\beta$ 分布的一个主要优点在哪里?
8. 二项式分布是何种概率分布?
9. 从分布图例中选择顾客分布可以为你做些什么?
10. Crystal Ball 为你提供了何种步骤帮助你选择输入假设单元格的最佳分布?

## 16.8 用决策表制定决策

许多仿真模型都至少包括一个决策变量。例如,在这一章中就碰到了如下的决策变量。

**案例研究:**图 16.1 中的订购量(C9)
**竞标案例:**图 16.12 中的我方竞标价(C25)
**超额订票案例:**图 16.30 中的允许接受订票数(C13)

在每一个案例中,你已经了解了使用 Crystal Ball 进行计算机仿真的情况,它提供了预测单元格的输出情况,借此来评估决策变量的特殊值。但是,和前面章节所提到的许多管理科学技术(包括线性规划和决策分析)相比,这种计算机仿真方法并没有提供决策变量的最优解决方案。幸运的是,Crystal Ball 提供了一个特殊的工具,称为**决策表工具**(Decision Table tool),可以系统地应用于计算机仿真从而提供含有一到两个决策变量问题的最优解决方案的近似值。在这一节中,我们描述这个很有价值的工具并且说明如何将此工具依次应用于上述的三个决策变量。

> 决策表工具可以系统地应用于一个或两个决策变量的计算机仿真中,并且可以在表中显示运行结果。

进行这一步的一个直观的方法是采用试错法。使用决策变量的不同值,对每个值进行计算机仿真,然后就可以得到哪一个值能够得到性能指标的最佳估计值。这就是决策表所做的工作,但它是以一种系统的方法进行的。它的对话框可以让你迅速地设定你想做的工作。然后,点击一个按钮,所有的

仿真就会进行,结果很快地显示在决策表中。如果需要,你也可以看一些图表,包括启示性的趋势图,它提供了额外的结果相关的详细信息。

如果你先前已经使用过了 Excel 数据表或者是包括在你的管理科学课件中进行系统敏感性分析的 Solver 表,决策表的工作方式和它们是非常相似的。对于一个或两个决策变量的决策表的布局是和一维 Solver 表(5.3 节所介绍)或者二维 Solver 表(5.4 节所介绍)非常接近的。在决策表中能够同时变化的决策变量的个数的最大值是 2。

让我们回到本章的案例,应用决策表工具来开始说明。

## 案例的决策表工具应用

回忆一下,弗瑞迪报童想要决定他每天《金融日报》的订购量应该是多少。16.1 节的图 16.1 ~ 图 16.11 说明了应用计算机仿真来评估采用订购量 60 的这一选择。由这一订购量所获得的平均每天利润的最终估计值是 46.61 美元。如图 16.41 所指出的,弗瑞迪的顾客想要购买的报纸数量是每天发生很大变化的。在图 16.43 的比较图中总结得到最好的描述这种波动的概率分布是 39.49 和 70.51 之间的均匀分布(需要近似成整数值)。给定了这样的一个很高的波动情况,在 40 和 70 之间的订购量应该是多少并不明显。选择其他不同于 60 的订购量能否得到比 46.61 美元更大的每天平均利润呢? 在 40 和 70 之间的哪个订购量能够最大化每天平均利润?

> 在应用决策表解决问题时,必须先定义一到两个决策变量。

为了回答这一问题,看上去最合理的做法是试验订购量的可能值的各个样本,比如 40、45、50、55、60、65 和 70。利用决策表工具来执行此步工作,第一步是定义所要调查的决策变量,也就是图 16.1 中的订购量(C9),具体步骤如下。

**定义决策变量的步骤**

1. 通过点击选择包含决策变量的单元格。
2. 如果单元格还没有数值,要任意输入一个。
3. 点击 Crystal Ball 工具条上的第二个按钮(定义决策变量)(或者从单元格菜单中选择定义决策变量选项),从而弹出定义决策变量对话框(如图 16.44 所示的弗瑞迪报童问题)。
4. 为决策变量的仿真数值输入下限和上限。
5. 点击连续分布或者离散分布来定义决策变量是连续的还是离散的。
6. 如果在步骤 5 中选择了离散分布,使用步长方框来指定决策变量的连续可能值的差值(不仅仅是仿真值)(默认步长是 1)。
7. 点击确定。

图 16.44 显示了弗瑞迪报童问题的这一步骤的应用。既然仿真会在 40 到 70 范围内的订购量数值内运行,这个范围的限制已经输入到了左边。订购量还可能是这个范围内的任意整数,所以这也在右边指明。

现在我们准备好从 Crystal Ball 的工具菜单中选择决策表。这时会弹出如图 16.45 所示的对话框顺序。

第一步的对话框用来从所列出的预测单元格为决策表选择目标单元格。图 16.1 中弗瑞迪的电子表格模型仅有一个预测单元格,利润(C19),所以选择它然后点击下一步按钮。

最初,第二步对话框的左边包含了所有已经定义决策变量的单元格。弗瑞迪报童问题

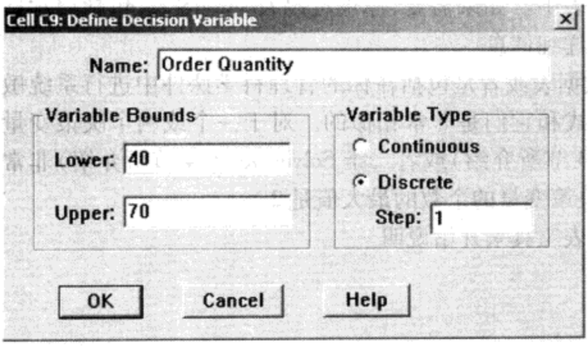



图 16.44　这个定义决策变量的对话框指定了图 16.1 所涉及的弗瑞迪报童问题案例的电子表格模型的决策变量订购量(C9)的特点。

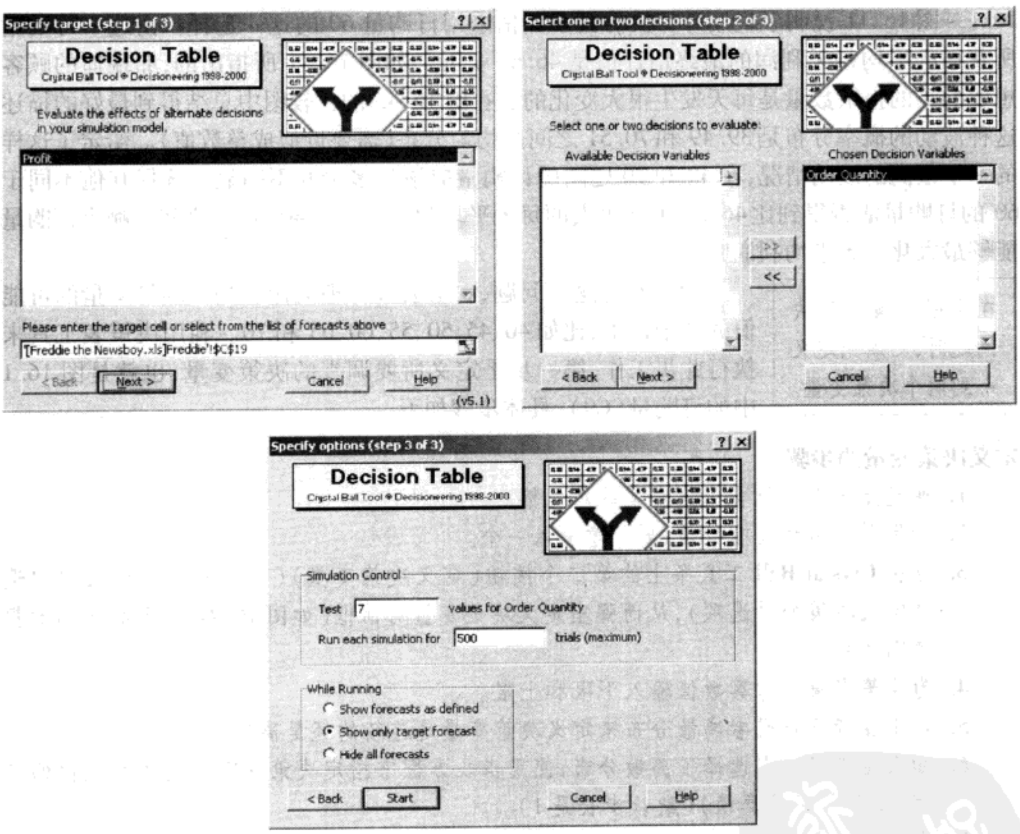



图 16.45　为了生成一个决策表，这三个对话框中第一个指定了哪一个预测单元格是目标单元格，第二个指定了哪一个或两个决策变量会变化，第三个指定了运行参数的选项。这里做的选择是针对弗瑞迪报童问题的案例。

这个模型中仅有一个决策变量，订单量(C9)。这个对话框的目的是选择哪一个或者是两个决策变量在决策表中是变化的。只要选择左边的决策变量然后双击两个方框中间的右箭头(>>)，这样就可以把决策变量添加到右边。图 16.45 显示了此步弗瑞迪报童问题决策变量操作的结果。

指定了所考虑的决策变量的数值个数后，Crystal Ball 在定义决策变量对话框所指定的范围内平均分配数值。

第三步对话框用来指定决策表的选项。第一个输入方框记录了对于每一个决策变量的值所要运行仿真的次数。Crystal Ball 然后就在定义决策变量对话框(图 16.44)所指定的范围内平均分布数值。对于弗瑞迪报童问题，数值的范围是 40 到 70 之间，在第三步对话框中输入数字 7 就会选择 40、45、50、55、60、65 和 70 这七个订单量的数值进行仿真。为每次仿真选择了运行次数并指定你想得到的仿真运行结果后，最后一步就是点击开始运行(Start)按钮。

这是一个一维的决策表，因为这个问题只有一个决策变量。对于定义和选择两个决策变量的问题，决策表的结果是个二维的表格，一个决策变量按行变化，一个决策变量按列变化。

Crystal Ball 运行了仿真后，决策表就会在如图 16.46 所示的一张新的电子表格中创建。对于顶部所示的每一个订单量，第二行给出了目标单元格利润(C19)的平均值，这是由运行所有的仿真试验后所得到的。单元格 D2:F2 显示了订单量 55 达到了最大的平均利润值 47.49 美元，而订单量 50 和 60 基本上获得了第二大的平均利润值。

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Trend Chart<br>Overlay Chart<br>Forecast Charts | Order Quantity (40) | Order Quantity (45) | Order Quantity (50) | Order Quantity (55) | Order Quantity (60) | Order Quantity (65) | Order Quantity (70) |
| 2 | | $40.00 | $44.17 | $46.66 | $47.49 | $46.64 | $44.14 | $39.97 |
| 3 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

图 16.46 在 16.1 节所介绍的案例的决策表。

这一订单量两边平均利润的急剧下降实际上保证了最优订单量位于 50 和 60 之间(可能接近于 55)。为了更精确地得到此值，逻辑上下一步应该是再制作一个决策表，主要考虑 50 和 60 之间的整数订单量。习题 16.14 会要求自己动手做一下。

决策表的左上角提供了三个选项，你可以获得关于你为所选择的单元格运行仿真所获得结果的更详细的信息。一个选项是查看预测单元格，比如频率图或者累积图，只要选择第二行中的一个预测单元格然后点击预测图(Forecast Charts)按钮。另一个选项是查看两个或更多仿真同时运行的结果。要查看的话可以选择一个预测单元格，比如图 16.46 中的单元格 E2:F2，然后点击延展图(Overlay Chart)选项。所得到的延展图显示在图 16.47 中。黑线给出了单元格 E2(订单量为 55)对应的频率图而虚线是为单元格 F2(订单量为 60)对应的频率图，所以这两种情况的结果可以同时比较(在彩色显示器上，你将会看到为区别这两种情况而使用了不同的颜色)。

第三个选项是选择所有的预测单元格(图 16.46 的单元格 B2:H2)，然后点击趋势图(Trend Chart)按钮。所生成的有趣的图称为趋势图，如图 16.48 所示。沿着水平轴的关键点有七条垂直的格子线，每条都对应于仿真运行的一种情况(订单量是 40、45、…、70)。纵轴给出了给定试验次数下仿真运行所获得的利润值。图中的条纹总结了每次仿真运行所得利润值的频率图的有关信息(在彩色显示器上，条纹色彩是不一样的——条纹中心是浅蓝色，相邻条纹是红色，下一条就是绿色，条纹外面是深蓝色)。这些条纹的中心对应于频率图的中数(Medians)。也就是说，(最亮的)中央条纹的中心给出了一个利润值，所以有一半

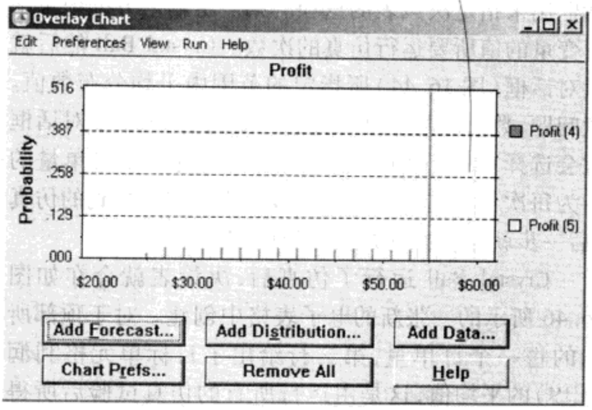



图 16.47 弗瑞迪报童问题中将订单量 55 和 60 的频率分布相比较的延展图。

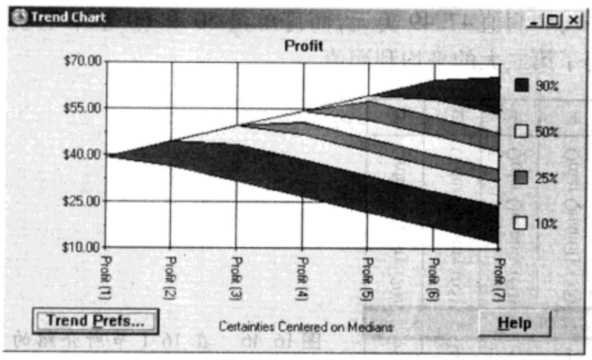



图 16.48 趋势图，显示了弗瑞迪报童问题当订单量上升时频率分布各个比例部分的走势。

的试验其获得的利润大于此值，有一半的试验获得的利润值小于此值。这条中央条纹包含了利润值的 10%（所以在它的两边利润值各为 45%）。相似地，中央的三条条纹包含了利润值的 25%，中央五条条纹包含了利润值的 50%，还有就是所有的七条条纹包含了利润值的 90%（这些百分数列在了趋势图的右手边）。这样，每次仿真运行所获得利润值的 5% 就位于条纹顶部还有 5% 位于条纹底部。

趋势图以图形的形式给出了决策变量值增加的时候目标的变化趋势。

趋势图之所以有这个名字，是因为它用图说明了当决策变量（这个案例中的订单量）的数值增加时的走势。举个例子，在图 16.48 中，观察中央条纹（它在左边图中很窄的部分隐藏起来）。在从第三个订单量（50）向第四个订单量（55）的过渡中，中央条纹的趋势是上升的，但是以后就它就趋于下降。这样，在各次仿真运行中所产生的利润值的中值随着订单量的增加而增加，直到在订单量 55 时达到顶峰，当订单量再增加时，其利润值就开始下降了。相似地，大部分其他的条纹也是如此，当订单量超过 55 并且增加时，这些条纹也是下降的。这说明订单量 55 是一个值得特别注意的点，不仅仅是它所对应的频率分布和均值。实际上趋势图在向右发展的时候就给出了当订单量增加时利润值的变化程度。尽管最大的订单量有机会在某些特殊情况下获得高额的利润，但它们也有了在一定天数下获得特别低的利润的可能。这种风险概貌可能和弗瑞迪本人是相关的，如果他特别关心他每天的利润额变动的话。

我们将在下一节中再次回到本案例，来介绍 Crystal Ball 的另一个特色工具，称为 OptQuest，可以用来寻找最优订单量。

## 科信建筑公司投标问题的决策表工具应用

现在我们回到 16.2 节所提到的科信建筑公司投标问题的决策表工具应用上。由于如何产生决策表的步骤已经在前一小节中阐述过，所以我们的焦点是结果的总结。

回忆公司的管理层比较关心决策为一家大型制造厂家建筑一家分厂的工程所提交的标价应该是多少。因此，图 16.12 的电子表格模型中的决策变量是我们的标价（C25）。图 16.49 的定义决策变量对话框用来进一步描述这个决策变量。管理层感觉标价比较应该在 4800000 美元和 5800000 美元之间，因此有数值（以百万美元为单位）输入到了对话框的变量边界方框中。因为标价可以是这个范围内的任意数值（可以精确到美分），所以在对话框的右手边变量被指定为连续变量。

管理层想要选择标价以最大化其期望利润。接下来，电子表格模型中的预测单元格是利润（C29）。在图 16.50 所示的决策表对话框第一步中，决策变量我们的标价（C25）已经被加入到了右手边作为要考虑的决策变量。在对话框第三步中做出的决策是用来测试此决策变量的六个数值。这六个数值是自动地在图 16.49 所指定的范围内分配的，所以仿真运行的变量值是 4.8、5.0、5.2、5.4、5.6 和 5.8（以百万美元为单位）。第三步对话框还用来指定每次仿真运行次数是 500。

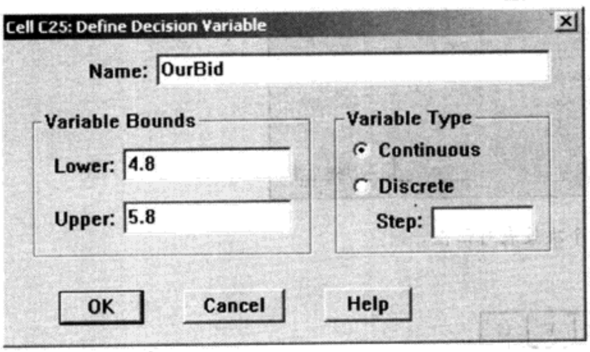



图 16.49　对话框指定了图 16.12 科信建筑公司合同投标价格问题的决策变量我们的标价（C25）的特点。

> 5400000 美元的标价是在第 8 章的案例中科信建筑公司赢得的标价。

图 16.51 显示了决策表的结果。5400000 美元的标价获得了在 500 次仿真运行下利润的最大值。单元格 E2 中的 501000 美元的均值应该是最接近使用此标价的期望利润的估计值。在第 8 章的案例中也是使用了此标价而赢得了合同。

习题 16.17 要求你通过生成决策表重新分析此问题，此决策表考虑了在 4800000 美元和 5800000 美元之间以 50000 美元为步长的所有的标价（它还要求你使用下一节所要介绍的 OptQuest 技术来寻找精确的最优投标价）。

## Transcontinental 航空公司超额订票问题的决策表工具应用

正如 16.6 节所描述，Transcontinental 航空公司有一班从旧金山到芝加哥的很受欢迎的日航班。要求订票的数目通常会大大超过实际的座位数。然而，即使票价是不退还的，还是只有平均 80% 的订票乘客实际上会乘坐那次航班，所以看上去接受超过实际座位数的订票数是合适的。同时，如果订票乘客没有乘坐那次航班的座位，那么航空公司要承担非常巨大的成本。因此，公司的管理科学小组正在分析应该接受的订票数目是多少以最大化此航班

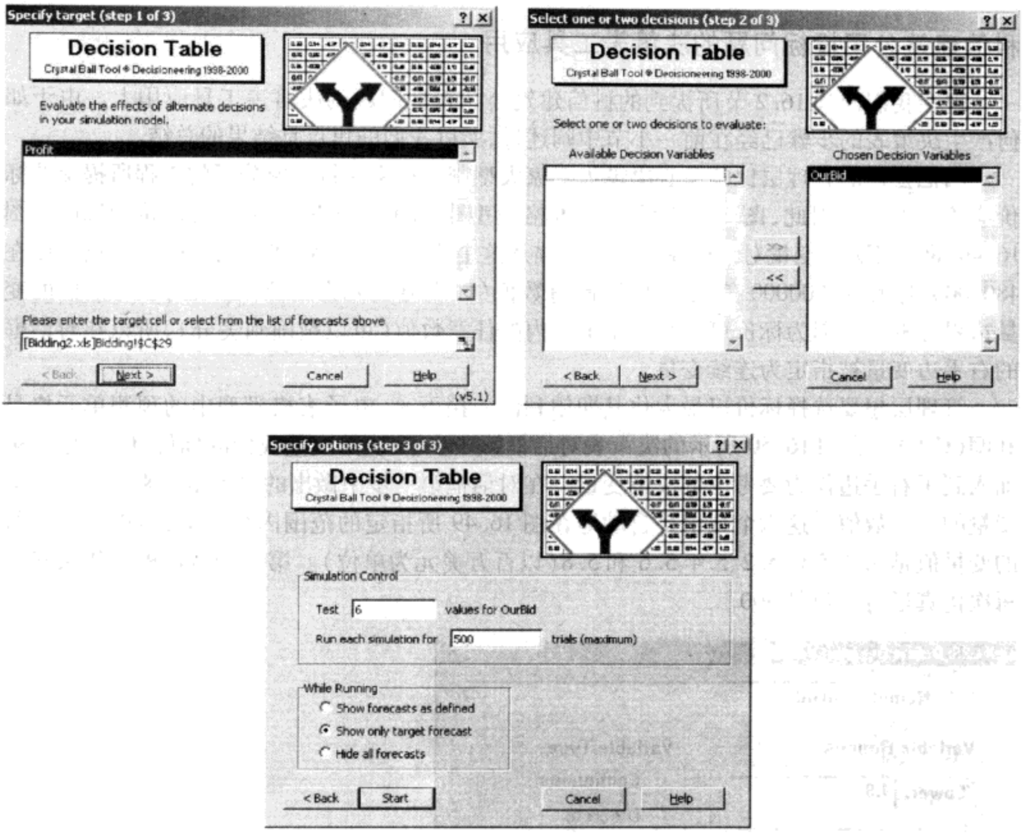



**图 16.50** 科信建筑公司合同投标问题的三个决策表对话框。

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Trend Chart<br>Overlay Chart<br>Forecast Charts | OurBid (4.800) | OurBid (5.000) | OurBid (5.200) | OurBid (5.400) | OurBid (5.600) | OurBid (5.800) |
| 2 | | 0.188 | 0.357 | 0.476 | 0.501 | 0.252 | 0.010 |
| 3 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

**图 16.51** 16.2 节描述的科信建筑公司合同投标问题的决策表。

的期望利润。

> 图 16.30 的决策变量是接受订票数(C13)。

在图 16.30 的电子表格模型中，决策变量是接受订票数(C13)而预测单元格是利润(F23)。管理科学小组认为决策变量的整数值应该在 150 和 200 之间，所以决策变量对话框以同样的方式指定变量的边界并定义决策变量是离散的。决策表对话框的三个方框也以正常的方式使用。在第三步对话框中，所做的决策是试验 11 个接受订票数的数值，所以仿真运行的这些数值是在 150 到 200 之间以 5 为步长而得到的。每一次试验的次数也是 500 次。

图 16.52 给出了结果。图中的决策表显示了每次仿真运行得到的利润的平均值随着接受订票数(C13)的增加而迅速增加，直到订票数是 185 时平均利润值达到峰值 7014 美元，

然后平均利润值就会下降。当订票数是 180 和 190 的均值时利润非常接近峰值的(既然需要考虑的订票数的范围已经很小了,习题 16.20 要求你继续分析考虑此范围内所有的整数值时所得到的决策表,还有通过应用 OptQuest 来寻找最优的接受订票数)。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Trend Chart<br>Overlay Chart<br>Forecast Charts | ReservationsToAccept (150) | ReservationsToAccept (155) | ReservationsToAccept (160) | ReservationsToAccept (165) | ReservationsToAccept (170) | ReservationsToAccept (175) | ReservationsToAccept (180) | ReservationsToAccept (185) | ReservationsToAccept (190) | ReservationsToAccept (195) | ReservationsToAccept (200) |
| 2 | | $788 | $1,888 | $2,963 | $3,999 | $4,990 | $5,897 | $6,638 | $7,014 | $6,821 | $6,256 | $5,554 |
| 3 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |

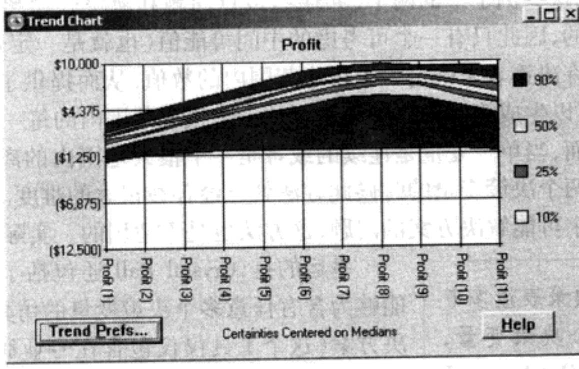



图 16.52　16.6 节所描述的 Transcontinental 航空公司超额订票问题的决策表和趋势图。

图 16.52 的趋势图提供了更多的信息。在此趋势图中所有的七条条纹开始时都是上升的,直到接受订票数大概达到 185 时,然后它们都缓慢地下降。这说明在每次仿真运行中的整个频率分布都保持上升趋势直到第八个仿真(接受订票数是 185 的那次仿真),此后就开始下降。还应该指出的是,所有七条条纹的宽度都是增加的直到第八次仿真运行,然后宽度就基本保持不变了。这说明利润值的变化程度也是增加的直到第八次仿真运行,以后就保持不变了。

## 问题回顾

1. 决策表工具可以帮你做什么工作,而这恰恰是单一决策变量运行一次仿真所不能做到的?
2. 相对于简单的反复试验法,即每次对决策变量的一个试验值来运行一次仿真,使用决策表工具的优点是什么?
3. 在决策表中可以同时变化的决策变量的最大个数是多少?
4. 在从 Crystal Ball 工具菜单中选择决策表之前需要进行哪几步步骤?
5. 从这个菜单中选择了决策表后,第一步对话框的目的是什么?
6. 第二步对话框的目的是什么?

7. 第三步对话框的目的是什么?
8. 延展图给出了什么信息?
9. 在趋势图中都总结了哪一类信息?
10. 决策表使用了需要考虑的决策变量的一个很窄的取值范围后,如何使用另一个决策表来更好地估计决策变量的最优值?

## 16.9 使用 OptQuest 进行最优化

在前一节中,你已经了解了决策表工具如何用来寻找至少是最优解决方案的近似估计值。那里提到的三个案例说明了决策表工具可以很好地处理这类问题。所有的这三个案例都仅仅有一个决策变量(记住决策表工具可以处理最多两个决策变量的问题)。更进一步地说,在这些例子中的两个(弗瑞迪报童问题和航空公司超额订票问题),单一的决策变量是离散的,因此只有一个可考虑的中间可能值(也就是一定合理范围内的整数值)。这样就可以允许决策表来确定一个很小范围内的数值,从而提供了最佳的解决方案。如果需要的话,也可以生成第二张决策表来评估一个很小范围内的每一个决策变量的可能值。

然而,当单一变量是连续的或者是一个很大范围内的离散变量时,这个方法是无效的。即使是两个决策变量的时候此方法就已经存在很大的难度。对于大型的含有多个决策变量和很多个可能解决方案的问题,这方法也是不适用的。实际中的许多问题都属于这种情况。

> 尽管决策表最多考虑两个决策变量,但是 OptQuest 可以处理任意个数的决策变量。
>
> 尽管 OptQuest 经常会找到最佳方案,但是它不能保证做到这点。

幸运的是,Crystal Ball 还包括了另一个工具,称为 OptQuest,它能够为含有任意多个决策变量的仿真模型自动地寻找一个最优的解决方案(这个工具仅仅包含在专业版的 Crystal Ball 中,也包括在你的管理科学课件中)。基于最优化和人工智能多年的研究,OptQuest 提供了一个很强大的搜索引擎,智能有效地寻找最优方案(这个想法和10.5节所描述的遗传算法很相似)。寻找的过程中执行了一系列的仿真,每次运行仿真后都保存了最有希望的候选方案以进行下一次运行。OptQuest 不能保证它所找到的最优方案就是实际中的最优选择。但是,只要有足够的时间,它经常会找出最佳方案,如果没有发现,它通常会得到一个非常接近最优方案的方案。对于那些含有几个离散决策变量的问题,它通常会在处理过程中很早地找到最优方案,然后使用剩余的时间计算出其他的候选方案。这样,尽管 OptQuest 不能指出什么时候它能获得最优方案,但是它可以估计(在仿真运行所提供的精确度范围内)其他的比较好的方案并不比目前的最佳方案更好。

为了说明如何使用 OptQuest,我们来分析一个很容易解决的问题,也就是弗瑞迪报童问题。总结了整个的步骤后,我们再分析一个涉及工程选择的更加复杂的案例。

### 应用 OptQuest 分析案例

在前一节中,图 16.46 所生成的决策表指出,弗瑞迪报童每天应该订购 50 到 60 份的《金融日报》。现在让我们来看看 OptQuest 如何估计哪一个特定的订购量会最大化他每天的平均利润。

在打开 OptQuest 之前,最开始的一步是和 16.1 节所描述的一样,准备进行计算机仿真。

这样，在如图 16.1 所示的电子表格模型中执行了计算机仿真后，Crystal Ball 可以用来定义假设单元格仿真需求（C12）和预测单元格利润（C19），包括了指定预测单元格的精确度控制（如图 16.10）。运行参数对话框方框中也以同样的方式使用。Crystal Ball 中这些定义和参数设置操作都可以用在 OptQuest 中。

图 16.53 的对话框给出了 OptQuest 大多数应用所建议的运行参数。在图左上角的试验次数方框给出了每次仿真试验运行的最大试验次数设定为 500。这个数字代表了两个有价值目标的均衡。一个目标是通过仿真运行中的试验次数而实现的很高的精确度，和它相矛盾的一个目标是多次仿真运行的时间，这样很多的最优候选方案可以被评估。当每次仿真运行后获得的关键的统计数字是预测单元格的均值时，500 次的仿真试验提供了这两个目标之间的一个很好的平衡，因为这个均值在 500 次试验下会足够地稳定。不过，当关键的目标统计数据是一个更难精确估计的数值时，就会在频率分布的尾部存在一定的百分数（或者甚至是此分布的最大值或者最小值），那么更大次数的试验（至少 1000 次）也是应该采用的。

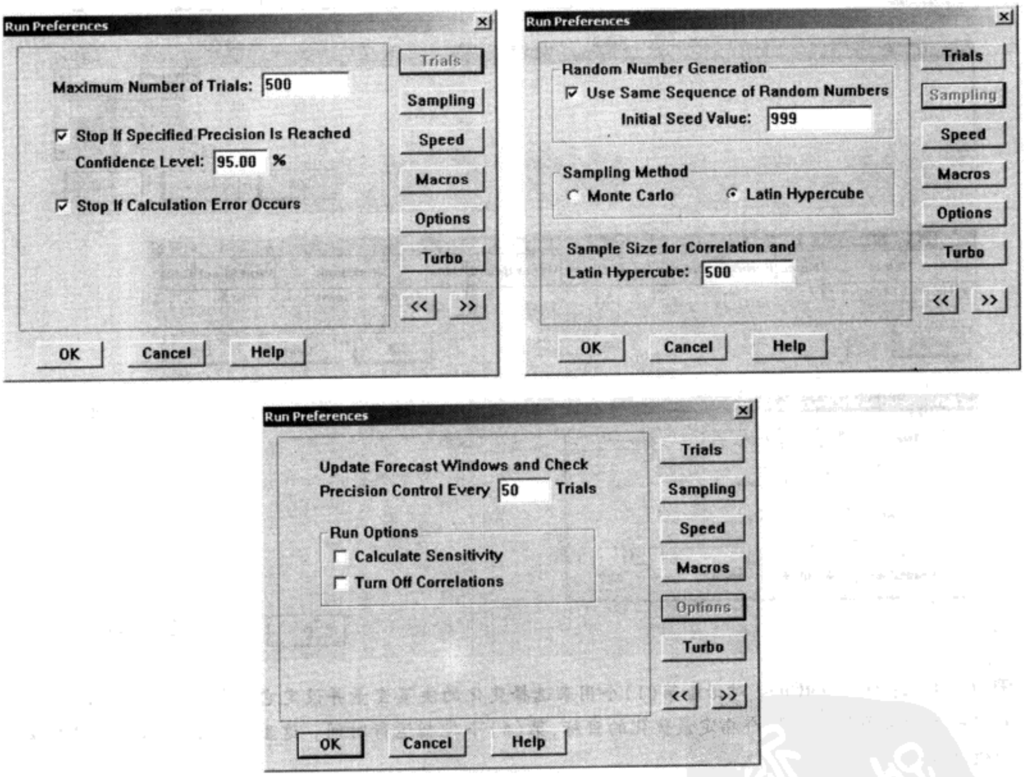



**图 16.53** 这三个对话框给出了 OptQuest 大多数应用所建议的运行参数。

> 使用每次仿真运行随机数的相同顺序选项提供了更精确的比较分析。

在图 16.53 右上角显示的运行参数抽样对话框中，为每次仿真运行使用随机数的相同顺序（初始值是 999）选项应该选中。这样就可以让随机数的类型以相同的方式影响每次仿真运行，当比较不同仿真运行结果时可以增加精确度。拉丁超几何抽样方法也是建议的选项。这种方法保证了从输入到假设单元格中的整个概率分布中有代表性的抽样，从而改善了每次仿真运行结果（特别是均值）的质量。

图 16.53 底部的运行参数选项对话框用来指定检查精确度控制的频率。50 次的默认选择是很好的选择，因为当目前的结果几乎没有可能比目前的最优方案更好时，这可以让 OptQuest 停止仿真运行。

在打开 OptQuest 之前的最后一步是使用 16.8 所提到的步骤来为问题定义决策变量。在这个例子中，惟一的决策变量是订购量(C9)。图 16.44(在 16.8 节)显示的对话框用来定义决策变量，包括边界 40 和 70 的设定。

我们现在已经准备好执行 OptQuest。从 Crystal Ball 工具菜单中选择 OptQuest，然后在文件菜单下选择新建。这样就弹出了图 16.54 所示的四个连续对话框。

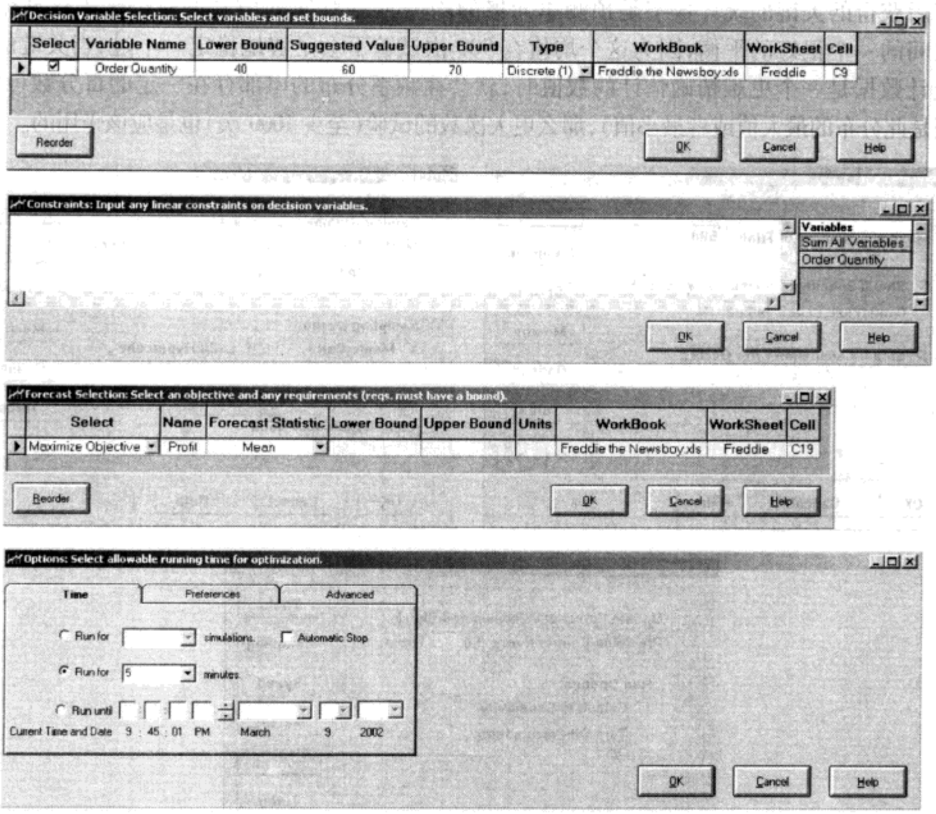



**图 16.54** 这四个 OptQuest 对话框第(1)个用来选择变化的决策变量并设定它们各自的边界，第(2)个指定一些约束条件，第(3)个指定最优化的目标，第(4)个控制运行时间。这里所做的选择是针对弗瑞迪报童案例。

第一个对话框是用来指定要发生变化的决策变量(通过点击选择栏)和在第三和第五列为它们分别设定边界。所有定义的决策变量都会列在这里，后面跟着它们的边界、变量的类型和步长(如果是离散的变量)。弗瑞迪单一决策变量的所有这些信息都是来自图 16.44 的定义决策变量对话框。在推荐值一列中输入的 60 来自 16.1 节前面仿真运行所使用的数值。在边界列和推荐列中的输入值应该检查一下以查看你是否想改变它们。OptQuest 只会考虑边界内的数值，因此设定边界时尽可能地小些(但要保证包含那些最优值)，这样就可以加速查找最优方案的进程。OptQuest 会使用推荐值来进行首次仿真运行，所以对推荐值的

更准确的估计也会加快查找的速度。为了更好地说明 OptQuest 在没有决策表帮助下做了什么工作,我们先不考虑 16.8 节的结果,着重看一下图 16.54 的第一个对话框里所示的数值。

点击确定然后就弹出了限制条件对话框。这个方框用来输入和线性规划同类的任何相关的限制条件。弗瑞迪问题没有这样的限制,所以我们就空白这个对话框然后点击确定(我们的下一个案例将会包含限制条件)。

预测选择方框的目的是指定要最优化的目标。这需要以下几步。

1. 预测选择对话框名称一栏列出了所有的已经定义的预测单元格。决定你要最优化哪一个预测单元格然后点击预测统计列所在的同一行。
2. 预测统计列中的下拉菜单给出了许多可能的统计值(包括均值、中位数、众数、标准差和置信度)。选择一个你想要最优化的。
3. 从选择列中的下拉菜单选择最大化目标(或者最大化选择的统计值)或者最小化目标(或者最小化选择的统计值)。
4. 如果你希望排除特定的方案,如果这些方案所对应的特定统计值低于最小边界或者大于最大边界,那么:(1)点击所选择的预测行;(2)从编辑菜单(它增加了预测行的副本)中选择复选选项;(3)在选择行中使用复选行来从下拉菜单中选择必要条件;(4)从预测统计下拉菜单中选择目标统计值,然后在相应行中输入最低边界或是最高边界(不论是哪个要观察的统计值)。
5. 点击确定。

对于弗瑞迪报童问题,惟一的预测单元格是利润(C19)。图 16.54 说明他想要最大化预测单元格的均值。可以使用上面的第 4 步来去掉那些每天利润变化程度(标准差)非常高的订单量,但是弗瑞迪并没有选择增加这个需求。

> 当很长时间没有进一步的搜索进程时 OptQuest 搜索应该终止。

图 16.54 底部的选项对话框是用来控制最优化(弗瑞迪问题设定了 5 分钟)运行的时间。如果需要的话,可以选择自动停止选项。如果对于一个运行次数非常巨大的仿真整个进程还没有发现一个更好的方案时,就可以尽早地停止最优化进程。但是,你也可以手动地终止搜索进程,当你看到没有进一步搜索时,只要选择运行菜单中的停止选项即可(或者按 <Esc> 或者点击停止按钮)。

不管你希望什么,你可以修改图 16.54 中四个对话框中任一个设定的数值,可以选择工具菜单下的决策变量、限制条件、预测或者是选项(或者也可以点击 OptQuest 工具条上相应的按钮)。

> 如果状态条和方案窗口没有出现,则要从视图菜单中选择这个选项弹出此窗口。

此时,点击选项对话框上的 OK 按钮,然后从运行菜单中选择开始选项就可以开始寻找最优解决方案了。当搜索进行时,你可以看到状态条和方案窗口所显示的进程。图 16.55 就显示了搜索进程结束时的这个窗口。在左边,方案区域给出了第一次仿真运行的情况,即以图 16.54 对话框顶部所设定的订单量(60)这个推荐值来作为决策变量的初始值。这次运行所得到的平均利润为 46.6680 美元。在下次仿真中 OptQuest 试验了订购量 55,所得到的平均利润是 47.5040 美元。再接下来的仿真运行(包括表中所列出的最后一次)试验另外的订购数值,但是都不能提高这一利润均值,所以第 2 次仿真就会在表中标出作为最优方案。这样,订购量 55 就被找出作为(肯定)弗瑞迪问题的最佳方案。

如果性能图没有出现，就要从视图菜单中选择此选项弹出此图。

图 16.55 的右手边的性能图给出了搜索过程中目前所得到的最优均值。当此图经过第 2 次仿真后的多次仿真仍保持水平不变时，OptQuest 就会认为没有其他的订购量会超过此均值 47.5040 美元，所以最优化进程就会终止，OptQuest 就会报告最优方案已经找到。

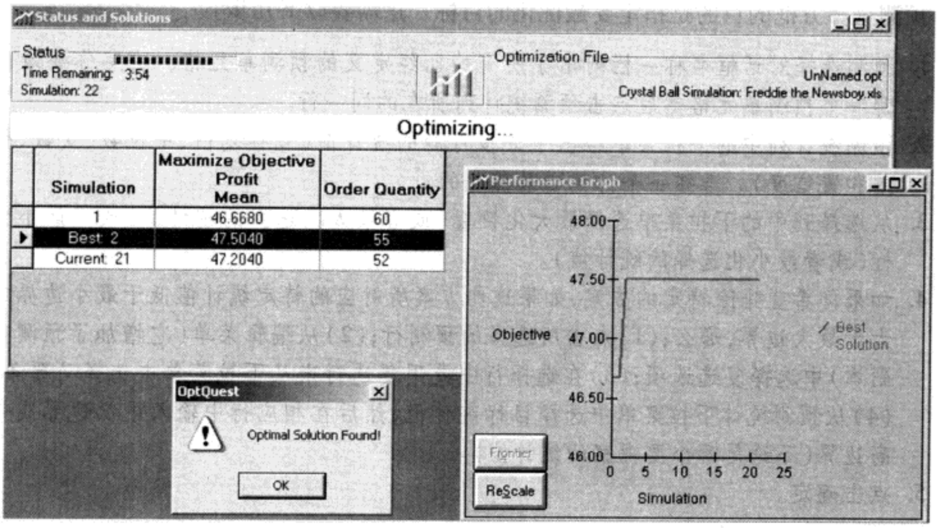



图 16.55 16.1 节所介绍的案例应用 OptQuest 得到的最优化结果。为弗瑞迪报童所找到的最优方案就是使订购量为 55。

最后一步是选择最优方案，然后从编辑菜单中选择复制到 Excel 选项，从而可以将你的方案转移到你的电子表格模型中。这也可以自动地显示最优方案所提供的仿真运行的频率图。如果需要的话，你可以从视图菜单中选择统计值选项，就可以从仿真运行中总结统计数据。

下面的 OptQuest 整个应用的总结，已经在弗瑞迪报童问题中给予说明。

**应用 OptQuest 的步骤**

1. 在电子表格上构建你的仿真模型。
2. 使用 Crystal Ball 来完成你的模型，定义你的假设单元格、预测单元格、决策变量，还有设定你的运行参数。
3. 从 Crystal Ball 工具条上选择 OptQuest，并在文件菜单下选择新建选项。
4. 使用决策变量选择对话框来选择你的决策变量。
5. 使用限制条件对话框来指定你的限制条件（如果有限制条件）。
6. 使用预测选择对话框来选择你的决策变量。
7. 使用选项对话框来指定你的运行时间。
8. 从运行菜单中选择开始来运行仿真。
9. 从编辑菜单中选择复制到 Excel 选项，以把结果复制到你的电子表格模型中。

## 项目选择案例的 OptQuest 应用

我们现在讨论一个更加复杂的涉及 OptQuest 应用的案例。这个案例基于第 6 章最后

的案例6.3。下面是一些基本情况。

Tazer 公司,一家医药生产公司,正在着手寻找一种新的突破性药物。为了选择开发一种药物,下面的五种潜在研发项目已经列出:

**提神项目**:开发一种更有效的不会引发情绪波动的兴奋剂。
**镇定项目**:开发一种治疗躁郁症的药物。
**选择项目**:开发一种较少麻烦的妇女生育的控制方法。
**预防项目**:开发一种麻疹传染病的疫苗。
**保健项目**:开发一种更有效地降低血压的药物。

和 6.3 的案例相比较,Tazer 管理层现在知道公司目前没有足够的资金来进行调研和开发所有的这些项目。公司的可用资金只有 12 亿美元,对于这些项目中的两个或者三个这些资金是够用的。表 16.3 的第二列中给出了每个项目所需的投资数额(以百万美元为单位)。第三列估计了每个项目可能成功的概率。如果这个项目获得成功,这种药物所带来的收益是多少是非常不确定的。这个收益值的估计(以百万美元为单位)服从正态分布,其均值和标准差都在表的最后两列中给出。

**表 16.3 Tazer 公司项目选择问题的数据**

| 项目 | 研发投资(百万美元) | 成功率 | 如果获得成功的收益(百万美元) | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 均值 | 标准差 |
| 提神 | 400 | 50% | 1400 | 400 |
| 镇定 | 300 | 35 | 1200 | 400 |
| 选择 | 600 | 35 | 2200 | 600 |
| 预防 | 500 | 20 | 3000 | 900 |
| 保健 | 200 | 45 | 600 | 200 |

目标是选择项目以最大化期望利润同时还要满足预算的限制条件。

G 列中的单元格成功否(G7:G11)是假设单元格,它指出了仿真运行中每次试验中相应项目是失败(值为0)还是成功(值为1)。

Tazer 管理层现在想要决定这些工程中的哪一个应该开发以最大化来自收益(如果有的话)的期望利润。由于总利润最后结果是多少存在巨大的不确定性,管理层也希望以一个合理的高概率来实现令人满意的总利润(至少是 100000000 美元)。

图 16.56 给出了这个问题的电子表格仿真模型。表 16.3 的数据已经转移到数据单元格 C7:F11 中。第二列中的单元格成功否(G7:G11)是假设单元格,对于一次仿真运行的每个试验值其中的设定值是 0 或者 1。如果开发这个项目,这个值说明那次试验中相应的项目失败(值为 0)或者成功(值为 1)。这样,这些假设单元格的每一个所输入的概率分布应该是二项式分布(16.7 节所描述),此分布的参数就是这个分布仿真运行的试验次数 1 和 D 列所给出的成功概率。H 列的单元格,收益(H7:H11),也是假设单元格。这些假设单元格的概率分布是正态分布,其参数由 E 列和 F 列给出。

J 列中的单元格,决策(J7:J11),是模型的决策变量。这些决策变量的每一个都是 0－1 变量,也就是说,这个变量只有两个可能值 0 或 1。例如,图 16.57 的定义决策变量对话框显示了如何指定它是一个步长为 1 的离散变量。其他的四个决策变量也以同样的方式定义。对于 B 列中列出的每个项目,J 列中相应的决策变量都有如下含义。

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Budget-Constrained Project Selection | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | Estimated Revenue | | | | | |
| 4 | | | R&D | | $millions If Successful | | | | | |
| 5 | | | Investment | Success | (Normal Distribution) | | | Revenue ($millions) | | |
| 6 | | Project | ($millions) | Rate | Mean | St. Dev. | Success? | (If Successful) | Profit | Decisions |
| 7 | | Up | 400 | 50% | 1,400 | 400 | 0.5 | 1,400 | 0.00 | 0 |
| 8 | | Stable | 300 | 35% | 1,200 | 400 | 0.35 | 1,200 | 0.00 | 0 |
| 9 | | Choice | 600 | 35% | 2,200 | 600 | 0.35 | 2,200 | 0.00 | 0 |
| 10 | | Hope | 500 | 20% | 3,000 | 900 | 0.2 | 3,000 | 0.00 | 0 |
| 11 | | Release | 200 | 45% | 600 | 200 | 0.45 | 600 | 0.00 | 0 |
| 12 | | | | | | | | | | |
| 13 | | Invested | 0 | | | | | Total profit ($millions) | 0.00 | |
| 14 | | | <= | | | | | | | |
| 15 | | Budget | 1,200 | | | | | | | |

| | B | C |
|---|---|---|
| 13 | Invested | =SUMPRODUCT(RandDInvestment,Decisions) |

| Range Name | Cells |
|---|---|
| Budget | C15 |
| Decisions | J7:J11 |
| Invested | C13 |
| Profit | I7:I11 |
| RandDInvestment | C7:C11 |
| Revenue | H7:H11 |
| Success? | G7:G11 |
| TotalProfit | I13 |

| | I |
|---|---|
| 6 | Profit |
| 7 | =Decisions*(Success?*Revenue-RandDInvestment) |
| 8 | =Decisions*(Success?*Revenue-RandDInvestment) |
| 9 | =Decisions*(Success?*Revenue-RandDInvestment) |
| 10 | =Decisions*(Success?*Revenue-RandDInvestment) |
| 11 | =Decisions*(Success?*Revenue-RandDInvestment) |

| | H | I |
|---|---|---|
| 13 | Total profit ($millions) | =SUM(Profit) |

**图 16.56** Tazer 公司项目选择问题应用计算机仿真的电子表格模型。假设单元格是成功否(G7:G11)和收益(H7:H11),决策变量是决策(J7:J11),预测单元格是总利润(I13)。

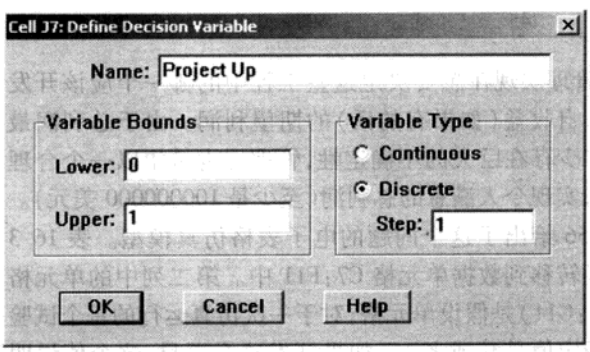



**图 16.57** 定义决策变量对话框指定了图 16.56 中的仿真模型的第一个决策变量提神项目的特点。其他的决策变量也以同样的方式定义。

$$决策变量 = \begin{cases} 1, 如果批准此项目 \\ 0, 如果拒绝此项目 \end{cases}$$

预算(C15)给出了这些研发项目投资的最大数额。假设决策同意了这个项目,输出单元格投资(C13)会记录项目投资的总额。输入到这个单元格的公式如图 16.56 右边的电子表格的底部所示。有限的预算意味着决策变量必须满足限制条件

$$投资(C13) \leq 预算(C15)$$

仅当相应的项目被批准并获得成功，才会获得假设单元格收益（H7:H11）中的收益。

输出单元格利润（I7:I11）给出了一次仿真运行中每次试验的一个项目的利润（收益减去投资）。如果项目被拒绝，那么这个项目的利润是 0。即使这个项目被批准，如果项目没有成功（在 G 列中的相应行显示数字 0）其收益是 0。如果项目获得成功（在 G 列中的相应行显示数字 1），那么此次试验的收益将会以随机数的形式出现在 H 列的相应行。因此，输入到利润单元格（I7:I11）的公式如图 16.56 的右下角所示。还应该指出的是总计（利润）单元格 Sum（Profit）给出了预测单元格总利润（I13）的数值。

以往常的方式使用 Crystal Ball 定义了假设单元格和预测单元格后（还有决策变量），打开 OptQuest 弹出图 16.58 所示的四个系列对话框。

决策变量选择对话框的第二列列出了五个决策变量，使用在此对话框内所给出的这些名字。由于我们还不知道它们之中的最佳项目，所以所有的这五个项目都要选择进入选择列来构建搜索程序，同时考虑这五个可选项目的数值（0 或 1）。在推荐值一列中的 0 输入值来自图 16.56 所示的电子表格模型中决策（J7:J11）的任意输入值。在推荐值一列中输入一个好方案的估计值可以加速 OptQuest 的搜索进程，但是我们决定输入数值 0 来给 OptQuest 制造一点麻烦。

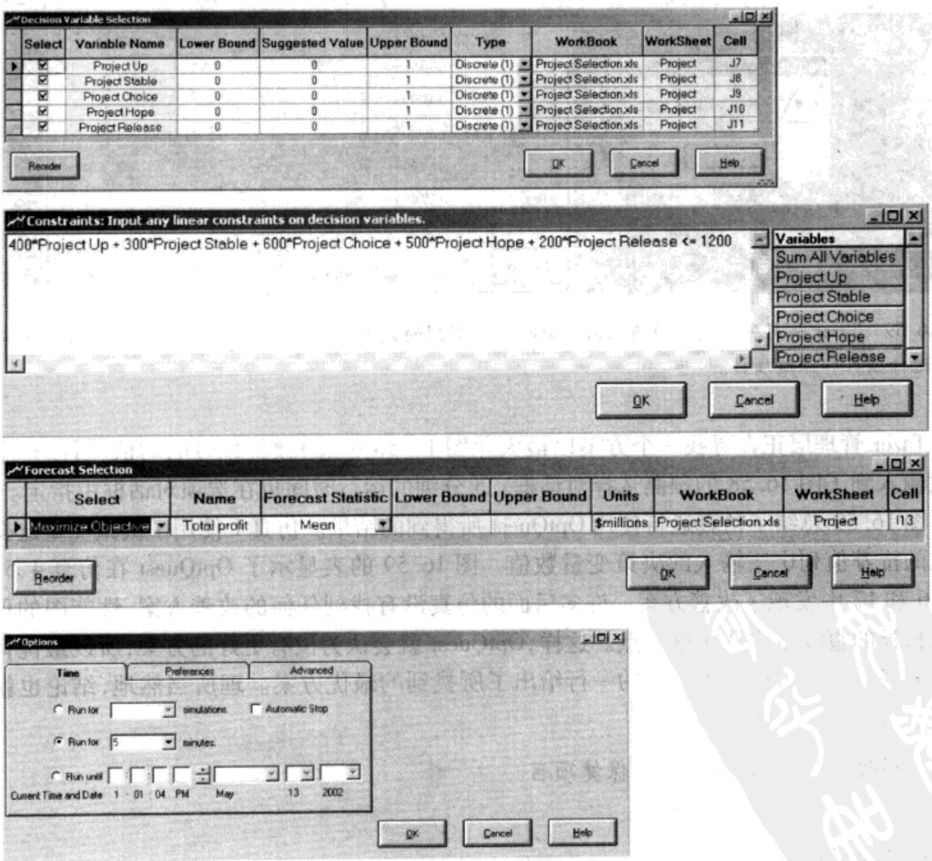



图 16.58　这四个 OptQuest 对话框显示了应用 OptQuest 于图 16.56 构建的 Tazer 公司项目选择问题所需要的选择。

> 只有适合线性规划的约束条件才可以添加到约束条件对话框中。

除了单个决策变量的边界外，有限的预算也给这些决策变量增加了另一个约束条件。这个约束条件需要以线性规划约束条件的形式输入到约束条件对话框中，如图 16.58 所示，星号 * 用来表示乘法。当在 OptQuest 中输入约束条件时单元格数值是不允许的。因此，你或者给决策变量输入一个名字或者点击对话框右边的相应按钮来让 OptQuest 输入你所需要的名字。你也需要输入 < = 表示小于或者等于（其他的约束条件也可以输入 > = 或 = 来代替）。

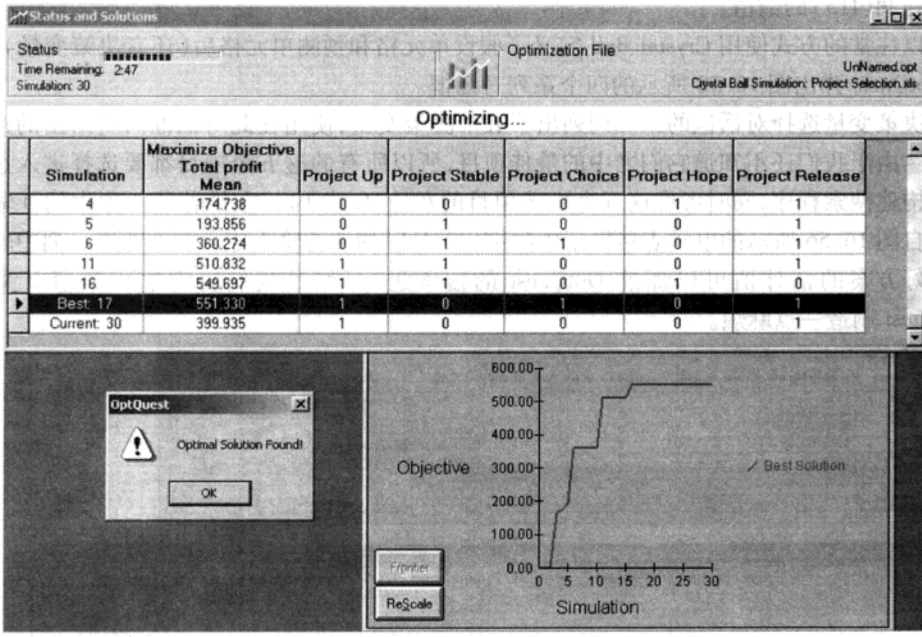



图 16.59 Tazer 公司项目选择问题应用 OptQuest 所得到的最优化结果。找到的最优方案是批准提神项目、选择项目和保健项目。

Tazer 管理层正在寻找一个方案以最大化图 16.56 中总利润（I13）的均值，所以这个目标就输入到了图 16.58 的预测选择对话框。5 分钟的运行时间也在选项对话框中指定。

图 16.59 总结了仿真运行使用 OptQuest 所得到的结果。仿真 1 使用了决策变量选择对话框的推荐值列中所输入的决策变量数值。图 16.59 的表显示了 OptQuest 在仿真 4、5、6、11、16 和 17 中发现了改善方案。许多后面的仿真没有找到任何的改善方案，性能图的顶部一条长长的直线也说明了这一点。这样，OptQuest 就会认为没有更好的方案，所以最优化进程也就终止了。表中突出显示的一行给出了所找到的最优方案。理所当然地，结论也就是如下方案

选择提神项目、选择项目和保健项目

总利润的平均值 = 55133 亿

这就是最优方案。

图 16.60 给出了频率图，它对应使用最优方案的仿真运行时的情况。这个图显示了仿真运行中多次试验所得到的利润值的很高程度的变动。实际上也存在选择一些研发项目时

发生损失(这在行业中也是很平常的)的一定概率。事实上,500 次的仿真试验中有 98 次导致了 12 亿美元的损失,因为所有的三个投资项目都以失败告终。幸运的是,公司还可以连续地以一定概率获得极大的利润。因为 Tazer 管理层希望以很高的概率获得不少于 1 亿美元的总利润,这个数量已经输入到了左下角的方框中。确定性方框显示 59.60% 的试验满足了这个要求。

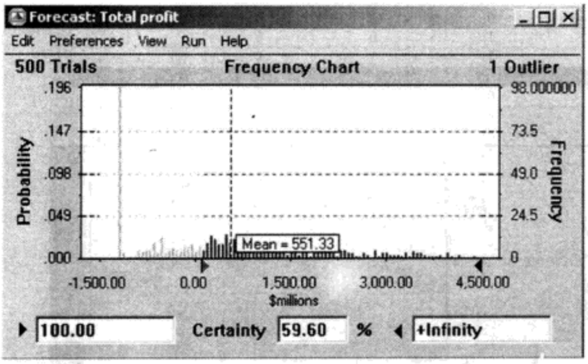



图 16.60　在图 16.59 中所找到的最优方案的频率图。确定性方框给出了至少获得 1 亿美元利润的试验中的百分数。

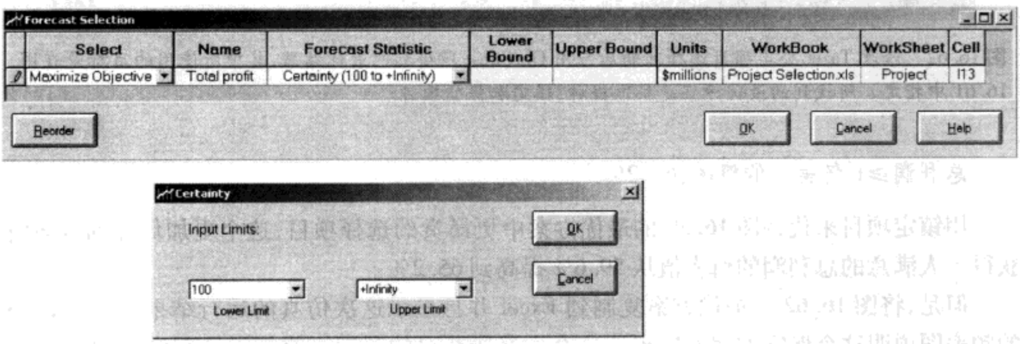



图 16.61　在预测选择对话框中所做的选择和确定性对话框可以让 OptQuest 最大化 Tazer 公司从研发项目选择中获得不少于 1 亿美元的概率。

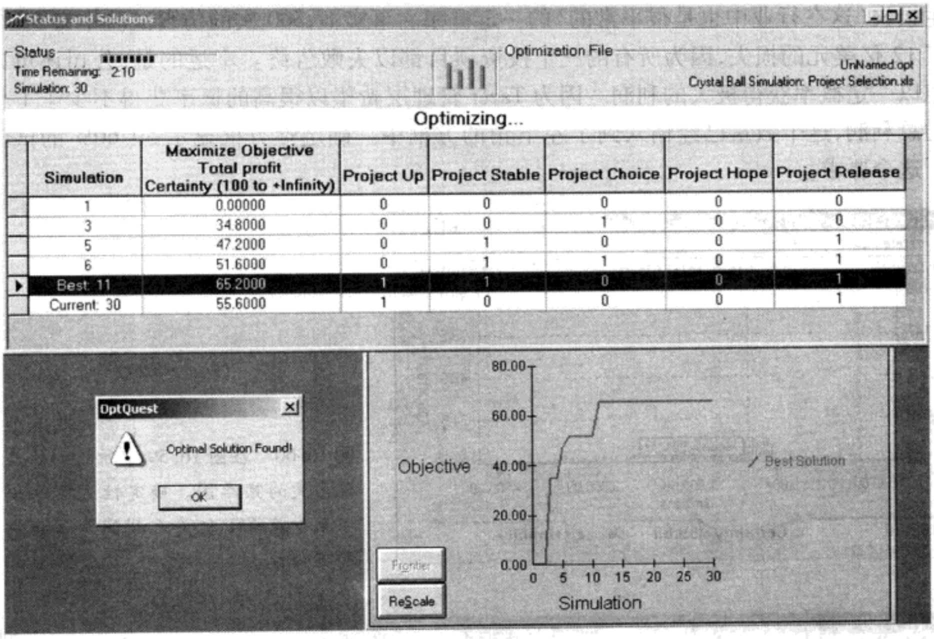
> Tazer 管理层也会对获得不少于 1 亿美元这一令人满意利润的概率最大化感兴趣。

Tazer 管理层希望以更高的概率来获得不少于 1 亿美元的总利润。因此,这样就提出一个问题,就是是否还存在可以增加此概率的其他的研发项目的组合。

为了回答这一问题,在 OptQuest 的工具菜单下面选择预测单元格(或者点击 OptQuest 工具条上的相应按钮)。此时会弹出图 16.61 顶部所示的预测选择对话框。不要选最大化均值,而是在预测统计列中使用下拉菜单以选择确定性。此时会弹出图 16.61 底部所示的确定性对话框。输入一个较低的边界 100。由于使用了百万美元这个单位,这就改变了预测选择对话框(图中所示)的目标,现在是寻找能够最大化获得不少于 1 亿美元利润的概率(确定性)。

使用这一新的目标来运行 OptQuest 得到了如图 16.62 所示的结果。仿真 3、5、6 和 11 都成功改善了先前的最佳方案。性能图显示了这一过程。仿真运行结束时(仿真 11)所找到的最优方案提供了试验次数的 65.2% 可以获得不少于 1 亿美元的利润。这个方案是:

选择提神、镇定和保健项目




| Simulation | Maximize Objective Total profit Certainty (100 to +Infinity) | Project Up | Project Stable | Project Choice | Project Hope | Project Release |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 34.8000 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 47.2000 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 51.6000 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Best: 11 | 65.2000 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Current: 30 | 55.6000 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**图 16.62** 修改 Tazer 公司项目选择问题后应用 OptQuest 所得到的最优结果,其中所使用的目标是在图 16.61 中指定。所找到的最优方案是批准提神、镇定和保健项目。

总利润≥1 亿美元的概率:65.2%

用镇定项目来代替图 16.59 的最优方案中更昂贵的选择项目,这个更加保守的方案将获得令人满意的总利润的概率值从 59.6% 提高到 65.2%。

但是,将图 16.62 中最优方案复制到 Excel 并且显示这次仿真的运行结果后,图 16.63 的频率图说明这个保守方案的缺点。这个方案所获得的利润均值仅仅是 510830000 美元,而当最大化利润均值时图 16.59 中最优解决方案所获得的利润均值是 551330000 美元。同时,保守方案将最大可能损失从 12 亿美元降到了 9 亿美元。

我们可以得到结论,OptQuest 为 Tazer 管理层提供了两种不同的方案来选择,同时还给出了每个方案的详细信息。一个看上去是高风险高收益的方案,因为它最大化可以获得的平均总利润。另一个看上去是最保守方案,因为它最大化获得满意利润的概率。通过在风险和收益之间的平衡评估,管理层现在可以做出关于采用哪个方案的判断决策。

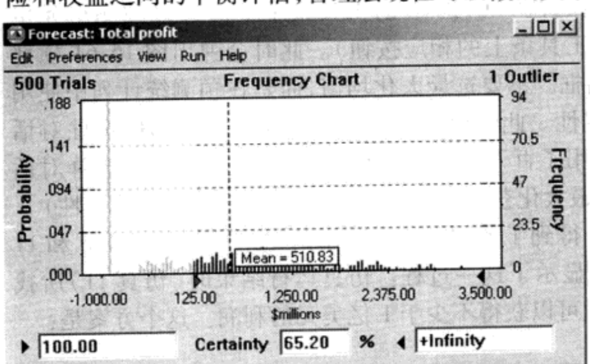



**图 16.63** 图 16.62 中最优方案所提供的仿真运行获得利润值的频率图。确定性方框显示了获得不少于 1 亿美元利润的试验次数百分比。

## 问题回顾

1. OptQuest 为带有决策变量的仿真模型寻找什么？
2. 哪类问题 OptQuest 能够处理而决策表却不能处理？
3. OptQuest 肯定能找到最优方案吗？
4. 在打开 OptQuest 之前所要完成的初始工作是什么？
5. 决策变量选择对话框的用途是什么？
6. 约束条件对话框的用途是什么？
7. 预测选择对话框的用途是什么？
8. 选项对话框的用途是什么？
9. 当运行 OptQuest 时，状态条和方案窗口提供了什么信息？
10. 当运行 OptQuest 时，什么时候手动终止仿真运行是合理的？
11. 项目选择案例的决策变量应该是哪一类？

## 16.10　本章小结

电子表格软件正在不断地被用来进行计算机仿真。正如前面一章所描述的，标准的 Excel 软件包有时候用来进行这些工作是绰绰有余的。此外，一些 Excel 的加载宏现在也大大增加了它的仿真能力。Crystal Ball 就是一个特别强大的这类加载宏。

当使用 Crystal Ball 时，含有随机值的每个单元格都作为假设单元格。定义假设单元格的步骤包含了从分布图例中选择 17 种概率分布中的一种以输入到假设单元格中。当掌握历史数据时，Crystal Ball 也有一个步骤可以用来确认最适合这些数据的连续概率分布。

用来预测性能指标的一个输出单元格称为预测单元格。仿真运行中每次试验都会在每个预测单元格中产生一个数值。当仿真运行完成时，Crystal Ball 提供了许多有用的结果形式，包括频率分布、统计表、百分比表和累积图。

当仿真模型含有一个或两个决策变量时，Crystal Ball 提供了决策表工具，它可以系统应用计算机仿真来确认至少一个最优方案的接近方案。趋势图在决策制定中也提供了一些额外的信息。

此外，Crystal Ball 专业版包含了强大的最优化工具称为 OptQuest，它基于多年的最优化和人工智能的研究。这个工具高效地使用了一系列的仿真运行来为含有任意多个决策变量的仿真模型寻找最优化方案。

这样强大的软件现在可以让管理层把计算机仿真添加到管理科学技术的个人工具箱中，用来分析一些关键的管理问题。本章中大量的案例证明了计算机仿真重要应用的一些可能性。

## 专业术语

**假设单元格**(assumption cell)：一个输入单元格，其中含有随机值，因此一个假设的概率分布必须输入到此单元格以代替输入一个定值。(16.1 节)

**决策表工具**(Decision Table tool)：一个 Crystal Ball 模型，它能够系统地应用计算机仿真于含有一至两个一定范围内的决策变量的问题，并以表格的形式

显示结果。(16.8 节)

**分布图例**(Distribution Galley):Crystal Ball 的 17 种概率分布图例,可从中选择一种输入到假设单元格中。(16.7 节)

**动态选项**(dynamic option):当单元格数值输入到分布对话框参数区域内时,选择动态选项就会使得此单元格内的数值随着仿真运行的每次试验而重新估计。(16.1 节)

**预测单元格**(forecast cell):一个输出单元格,计算机仿真用来预测一些性能指标。(16.1 节)

OptQuest:一个 Crystal Ball 模型,它能够为含有任意多个决策变量的仿真模型自动寻找最优方案。(16.9 节)

**风险曲线**(risk profile):投资所获得收益的频率分布。(16.5 节)

**静态选项**(static option):当单元格数值输入到分布对话框参数区域内时,选择静态选项就会使得此单元格内的数值只是重新估计一次,在仿真运行的开始,在那一时点的参数值就会一直用来进行所有的仿真试验。(16.1 节)

**试验**(trial):从已输入到电子表格的概率分布中产生随机观察数的一次应用过程,然后以同样方式计算输出单元格并记录目标单元格的结果。(16.1 节)

# 本章管理科学课件的学习辅助

"Ch. 16—**使用** Crystal Ball **进行计算机仿真**" Excel **文件**:

弗瑞迪报童问题
科信建筑公司投标案例
科信建筑公司项目计划案例
EGGY 公司现金流线性规划
EGGY 公司现金流管理案例
梦大公司财务风险分析案例
Transcontinental 航空公司超额订票案例
Tazer 公司项目选择案例
销售数据 1
销售数据 2

Excel **加载宏**:

Crystal Ball 专业版 2000

# 习　　题

下面的习题应该应用 Crystal Ball。问题的序号前标有星号表明该问题至少有一部分的答案在后面给出。

16.1. 仿真运行的结果本质上是随机的。这个问题将会证明这个结论,并且了解一下试验次数对随机过程的影响。考虑 16.1 节所介绍的弗瑞迪报童问题案例。电子表格模型已经包含在你的管理科学课件的 CD 中。查看"使用相同顺序的随机数"(Use Same Sequence of Random Numbers)选项没有被选中,并且在运行参数抽样标签中选择蒙特—卡罗抽样方法(Monte-Carlo Sampling Method)。订单量设定为 60。

a. 在运行参数中设定试验次数为 100,然后运行弗瑞迪报童问题的计算机仿真 5 次。注意每次仿真运行的平均利润。

b. 在运行参数中设定试验次数为 1000,重复 a。

c. 比较 a 和 b 问题的结果,并讨论其不同之处。

16.2. 考虑 16.3 节提到的科信建筑公司项目计划案例。计算机仿真用来估计准时完成项目的平均概率,图 16.21 给出了一次仿真运行中有 61.50% 的试验能够准时完成项目。正如解释此结果时的讨论,准时完成项目的试验次数的百分比会随着每次仿真而发生变化。这个问题将会证明此结论,并且了解一下试验次数对随机过程的影响。电子表格模型已经包含在你的管理科学课件的 CD 中。

查看"使用相同顺序的随机数"选项没有被选中,并且在运行参数抽样标签中选择蒙特—卡罗抽样方法。

a. 在运行参数中设定试验次数为 100,运行

此项目的 5 次仿真。注意平均完成时间和每次仿真中能够在 47 周的期限内准时完成项目的试验次数的百分比。

b. 在运行参数中设定试验次数为 1000，重复 a。

c. 比较 a 和 b 问题的结果，并讨论其不同之处。

16.3.* 考虑你管理科学课件的 CD 中的 Excel 文件“销售数据 1”中所包含的历史数据。使用 Crystal Ball 来找到一个适合这些数据的所有连续分布。

a. 哪一种连续分布最适合这些数据？此分布的参数是什么？

b. 哪一种连续分布第二适合这些数据？此分布的参数是什么？

16.4. 考虑你管理科学课件的 CD 中的 Excel 文件“销售数据 2”中所包含的历史数据。使用 Crystal Ball 来找到一个适合这些数据的所有连续分布。

a. 哪一种连续分布最适合这些数据？此分布的参数是什么？

b. 哪一种连续分布第二适合这些数据？此分布的参数是什么？

16.5. 亚伯丁发展公司（ADC）正在考虑一个亚伯丁旅馆项目。此旅馆位于美丽的格林湾岸边，并且拥有自己的一流高尔夫场地。

购买此块土地的成本是 1000000 美元，现在支付。建筑成本大约是 2000000 美元，在年末支付。但是，建筑成本是不确定的。这些成本会在估计成本 200 万美元上下 20% 的范围内波动。假设建筑成本服从三角分布。

一旦旅馆竣工，关于每年所获得的经营利润（或损失）是多少 ADC 非常不确定。每年经营利润的最好估计是在第 2、3、4 和 5 年获得 700000 美元。假设每年的利润是相互独立的，并且都服从正态分布。

ADC 打算 5 年后出售此旅馆。出售价格很可能在 4000000 美元和 8000000 美元之间（假设服从平均分布）。ADC 使用 10% 的贴现率来计算净现值（为了计算的方便，假设每年的利润都在年末获得）。使用 Crystal Ball 在电子表格上进行试验次数为 1000 的计算机仿真。

a. 这个项目的平均净现值（NPV）是多少？[提示：在 Excel 中 NPV(rate, cash stream) 函数可以计算一系列现金流的净现值，假设从现在开始到将来的某一年。例如，NPV(10%, C5:F5) 就会得到以 10% 为贴现率的净现值，其中 C5 是第 1 年末的现金流，D5 是第 2 年末的现金流，E5 是第 3 年末的现金流，F5 是第 4 年末的现金流。]

b. 项目能够获得超过 2000000 美元的净现值的估计概率是多少？

c. ADC 同时也比较关心第 2、3、4 和 5 年的现金流。使用 Crystal Ball 产生一个预测单元格，其中给出这四年中任一年的最小年经营利润（未贴现）的分布。在这四年中最小的年经营利润的平均值是多少？

d. 在所有的这四年经营中年经营利润不低于 0 美元的概率是多少？

16.6. 常青藤大学正在计划为其商学院建造一座新的建筑物。这个项目需要完成下表中所有的活动。对于大部分活动，在一项活动开始时，处于它之前所有的活动必须已经完成。例如，奠基活动直到建筑设计和选址结束才能开始。

| 活　　动 | 紧前活动 |
|---|---|
| A. 筹资 | – |
| B. 建筑设计 | A |
| C. 选址 | A |
| D. 奠基 | B, C |
| E. 建筑 | D |
| F. 电路 | E |
| G. 管道 | E |
| H. 装修 | F, G |
| I. 完工 | H |
| J. 美化 | H |

筹集资金可能会花费大约 6 个月的时间（其标准差是 1 个月）。假设这个活动的时间服从正态分布。建筑师估计建筑设计所需的时间应该是位于 6 个月到 10 个月之间。假设此项活动时间服从平均分布。总合同商提供了每项建筑任务的三个估计时间——一种乐观情况（如果天气情况良好并且进展顺利所需的最少时间）、一种最有可能情况和一种悲观情况（由于天气或者其他问题出现的原因所需的最多时间）。这些估计值在下面的表格中列出。假设这些建筑活动中的每一项都服从三角分布。最后，庭

园设计师保证他的工作将会在5个月内完成。

| 建筑时间估计(单位:月) | | | |
|---|---|---|---|
| 活　动 | 乐观情况 | 最可能情况 | 悲观情况 |
| C. 选址 | 1.5 | 2 | 2.5 |
| D. 奠基 | 1.5 | 2 | 3 |
| E. 建筑 | 3 | 4 | 6 |
| F. 电路 | 2 | 3 | 5 |
| G. 管道 | 3 | 4 | 5 |
| H. 装修 | 4 | 5 | 7 |
| I. 完工 | 5 | 6 | 7 |

使用 Crystal Ball 为这个项目运行试验次数为1000的计算机仿真。利用所得到的结果回答下列问题。

a. 项目的平均完成时间是多长?
b. 项目在36个月内完成的概率是多少?
c. 生成一个敏感性图。基于此图,哪一项活动最大限度地影响了项目完成时间?

16.7.* 重新考虑问题8.12,其中涉及估计项目的完成时间和准时完成项目的概率。假设现在每项活动的完成时间都服从三角分布,它们的三个参数在问题8.12已经给出。使用 Crystal Ball 在电子表格上为此项目进行试验次数为1000的计算机仿真。

a. 项目完成的平均时间是多少?
b. 项目能够在22个月内完成的概率是多少?
c. 生成一个敏感性图。基于此图,哪一项活动最大限度地影响了项目完成时间?

16.8. 重新考虑问题15.10。为了得到公司雇员保险项目平均成本的近似估计,在电子表格中使用 Crystal Ball 为雇员健康保险进行试验次数为500的计算机仿真。生成一个频率图和一张统计表。

16.9. 重新考虑15.1节的例2所提到的任重公司的案例。对于下面的问题a到c,运用 Crystal Ball 在电子表格上进行1000次试验的计算机仿真,获得每天期望成本的估计值。同时产生频率图和统计表。

a. 只有在发动机出现故障以后才拆换的方案。
b. 四天后拆换发动机的方案(如果发生故障,要尽快拆换它)。
c. 五天后拆换发动机的方案(如果发生故障,要尽快拆换它)。
d. 如果说发动机在第三天拆换的话,可以获得期望成本为2000美元的解析解,将这一情况与前面三个选项进行比较,何种方法可以最大限度地降低每天的期望成本。

16.10. 艾佛雷(Avery)公司工厂的一条作业线上的控制板必须进行维修。该控制板上有4个完全一样的电子继电器,是控制板出现故障的原因所在。因为继电器很容易出现故障,导致控制板故障(它控制着生产流程),从而迫使该控制板控制的整条流程线都必须停下来以进行拆换工作。目前的做法是在继电器坏了之后才进行修理。这样操作的总成本为每小时3.19美元。为了降低此种成本,有人提出了一个方案,那就是如果控制板上的任意一个继电器发生故障后,就把四个继电器都换掉。这样是否可以节省成本呢?

数据如下:对于每一个继电器,故障前的运作时间服从(1000,2000)之间的均匀分布。拆换一个继电器时控制板要关闭一小时,而拆换所有的四个继电器需要两个小时。关闭控制板拆换继电器的总成本为1000美元每小时,每个继电器成本为200美元。

在电子表格上运用计算机仿真估计新方案的成本并与现在做法下的成本比较。在两种方法下,分别运用 Crystal Ball 进行1000次试验(每次试验以控制板的关闭为结束事件),并确定每小时的平均成本。

16.11. 艾普拉斯(Aplus)公司生产的一种新产品,必须在金属块中钻入套管,而套管中需插入圆轴。圆轴的半径至少为1.0000英寸,但是又不能超出太多。在上述的生产流程下圆轴的半径服从三角分布,最小值为1.0000英寸,最可能的数值为1.0010英寸,最大值为1.0020英寸。而套管的半径服从正态分布,均值为1.0020英寸,标准差为0.0010英寸。套管和圆轴间的空隙即为两者的半径之差。因为套管和圆轴都是随机选择的,所以两者可能会有冲突(例如空隙为负值)。

管理层对由于上述的这种冲突而可能引起的生产中断十分关心。或许应该改进

(以合适的成本)圆轴和套管的生产流程以减少这种事故。为了评估是否需要采取新的生产方法,管理层希望你能够告诉他们这种中断事故在上述生产流程中发生的频率。

运用 Crystal Ball,在电子表格上进行 500 次试验,估计中断的概率。

16.12. 考虑在 16.5 节提到的财务风险分析的案例,该例子的结果在图 16.29 中。梦大公司的管理层对于这一提议的风险状况很是关心。其中有两个数据引起了普遍的关注。其一是有 20% 的概率会造成损失(净现值为负值)。其二是有 10% 的概率可能会损失均值(18000000 美元)的 1/3(6000000 美元)。因此,管理层认为是否可以只投资一个项目,以谨慎为重。除了采取第一种方案(建议的方案)外,第二种方案是在宾馆项目中投资 16.5%(不投资购物中心项目),方案三是只在购物中心项目中投资 13.11% 的股份(不投资宾馆项目)。管理层只会在这三个方案中选择一个,下面对方案 2 和 3 进行风险分析。

a. 对方案 2 分别进行 1000 次试验的计算机仿真,产生频率图和百分比表。

b. 对方案 3 重复 a 中的要求。

c. 假设你是梦大公司的 CEO。使用图 16.29 为方案 1 分析的结果,并参考其他两个方案所得到的相关结果,在三个方案的分析基础上,做出决策,并解释原因。

16.13. 重新考虑 15.5 的掷骰子问题,现在分析的目标是赢得该游戏的概率。如果概率超过 0.5 的话,你就可以到拉斯维加斯去,进行多次的游戏,就可以赢得一大笔钱。但是如果概率是少于 0.5 的话,你最好还是呆在家里为好。

在电子表格上进行计算机仿真,以估计这一概率。运用 Crystal Ball 进行如下次数(游戏次数)的试验。

a. 100 次

b. 1000 次

c. 10000 次

d. 实际的概率值为 0.493,从上面多次运行的结果你可以得出怎样的结论,怎样才能使得到的估计值与实际值的偏差不会超过 0.007?

16.14. 考虑 16.1 节介绍的弗瑞迪报童问题的案例。电子表格模型已经放在了你的管理科学课件的 CD 中。16.8 节所生成的弗瑞迪报童问题的决策表(见图 16.46)说明 55 是最优订购量,但是这个表仅仅考虑了订购量是 5 的倍数的情况。重新寻找弗瑞迪报童问题的最优订购量,生成新的决策表,其中考虑了所有的 50 和 60 之间的整数订购量。

16.15.* Michael Wise 在一个繁忙的商业中心经营一家书报摊。星期天的泰晤士报的平均需求量是 300 份,其标准差是 50 份(假设服从正态分布)。Michael 采购报纸的价格是每份 0.75 美元,销售价格是每份 1.25 美元。一天销售结束时剩下的报纸会被无偿收回。

a. 假设 Michael 在每个星期天早上为他的书报摊采购 350 份报纸。使用 Crystal Ball 在电子表格上进行试验次数为 500 的计算机仿真。Michael 销售星期天泰晤士报的平均利润是多少? Michael 获得 0 美元利润的概率是多少?

b. 生成一张决策表来考虑 250 到 350 之间的 5 个可能订单量。哪一个订单量最大化了 Michael 的平均利润?

c. 为 b 问题考虑的 5 个订单量生成一张趋势图。

d. 使用 OptQuest 来寻找最大化 Michael 平均利润的最优订单量。

16.16. Susan 是一个门票贩。她在赛季开始之前以 100 美元的单价购买了洛杉矶湖人队的比赛门票。由于比赛时门票会售空,所以 Susan 可以在比赛当日以 150 美元的单价出售她手中的门票。Susan 不能在比赛当天售出的门票就会作废。基于过去的经验,Susan 已经预测到她能够出售的门票数的概率分布如下表所示。

| 出售的票数 | 概　率 |
|---|---|
| 10 | 0.05 |
| 11 | 0.10 |
| 12 | 0.10 |
| 13 | 0.15 |
| 14 | 0.20 |
| 15 | 0.15 |
| 16 | 0.10 |
| 17 | 0.10 |
| 18 | 0.05 |

a. 假设 Susan 每场比赛购买 14 张门票。使

用 Crystal Ball 在电子表格上进行试验次数为 500 的计算机仿真。Susan 销售门票所得到的平均利润是多少？Susan 获得不低于 0 美元利润的概率是多少？（提示：使用顾客分布来仿真门票需求。）

b. 生成一张决策表，考虑 10 到 18 之间所有的 9 种可能购票数。哪一种购票数能够最大化 Susan 平均利润？

c. 为 b 问题中的 9 种可能购票数生成一张趋势图。

d. 使用 OptQuest 寻找最大化 Susan 平均利润的最优购票数。

16.17. 考虑 16.2 节讨论的科信建筑公司的投标问题。电子表格模型已经包含在你的管理科学课件的 CD 中。16.8 节所生成的这个问题的决策表（见图 16.51）建议 5400000 美元是最佳标价，但是此表只考虑 200000 美元倍数的标价。

a. 重新寻找最优标价，生成一张决策表，考虑 5200000 美元和 5600000 美元之间以 50000 美元为步长的所有标价。

b. 使用 OptQuest 来寻找最大化科信建筑公司平均利润的最优标价。假设投标价格在 4800000 美元和 5800000 美元之间变动。

16.18. Road Paver 公司（RPI）正在考虑一条县公路建筑项目的投标问题。RPI 已经估计这个项目的成本是 5000000 美元。投标过程中所花费的总成本是 50000 美元。这个县同时还收到了来自 RPI 竞争者的项目标书。这些竞争者过去的经历说明了每个竞争者的标价最有可能是成本的 120%，但是也有可能在 105% 和 140% 之间。假设每一个标价都服从三角分布。

a. 假设 RPI 的此项目标价是 5700000 美元。使用 Crystal Ball 在电子表格上进行试验次数为 500 的计算机仿真。RPI 赢得投标的概率是多少？RPI 的平均利润是多少？

b. 生成一张决策表来考虑 5300000 美元和 6000000 美元之间所有的 8 个可能标价，并预测 RPI 的平均利润。哪一个标价最大化了 RPI 的平均利润？

c. 为 b 问题中的 8 种可能标价生成一张趋势图。

d. 使用 OptQuest 来寻找最大化 RPI 平均利润的最优标价。

16.19. 考虑 16.4 节分析的 EGGY 公司现金流问题。电子表格模型已经包含在你的管理科学课件的 CD 中。

a. 生成一张决策表来考虑 0 美元和 20000000 美元之间所有的 5 种可能的长期贷款，并预测 EGGY 的平均利润。哪一种长期贷款最大化了 EGGY 的平均利润？

b. 为 a 问题中的 5 种可能长期贷款生成一张趋势图。

c. 使用 OptQuest 来寻找最大化 EGGY 平均余额的最优长期贷款。

16.20. 考虑 16.6 节讨论的超额订票问题。电子表格模型已经包含在你的管理科学课件的 CD 中。在 16.8 节中所生成的此问题的决策表（见图 16.52）建议为了最大化利润，185 是最优的接受订票数，但是这只考虑了 5 的倍数的情况。

a. 重新为此问题寻找最优接受订票数，生成一张决策表，考虑 180 和 190 之间所有的整数接受订票数。

b. 为 a 问题中的 11 种可能接受订票数生成一张趋势图。

c. 使用 OptQuest 来寻找最大化航空公司平均利润的最优接受订票数。假设接受订票数是在 150 和 200 之间的任意整数。

16.21. 在西雅图和旧金山之间往返的 120 航班很受休闲和商务旅行者的喜爱。这架飞机的单一机舱最多能容纳 112 位乘客。此航班提供提前 7 天订票折扣价和全价票两种票价。航空公司的管理层正在试着决策：(1) 应该预留多少张前 7 天订票折扣价机票；(2) 多少张全价票。

折扣票售价为 150 美元，是不可退票的。提前 7 天的订票需求处于 50 和 150 之间，但是最可能的数值是 90 左右（假设服从三角分布）。全价票（无提前购买的必要，并且可以在检票之前全额退票）的票价是 400 美元。排除购买此种机票但在检票之前取消此次航班的乘客，这种机票的需求等可能地分布于 30 和 70 之间（所有的这些需求发生在航班前周之内）。购买不可退还的折扣票的乘客平均未登机率是 5%，而购

买可全额退票的全价票的乘客未登机率是15%。如果乘客登机人数超过实际座位数，多余的乘客必须改乘其他航班。换机乘客会重新坐另一航班并获得未来航班免费订票的证明。对于每一位换机乘客，航空公司的总成本是 600 美元。每运行一次航班的固定成本是 10000 美元。

现在有两种决策。第一，航班飞行一周之前，有多少机票应该作为折扣票出售？如果出售过多，航空公司就会丧失一些潜在的全额订票的乘客。出售过少，公司又会面对航班的乘坐率不高的窘境。第二，航空公司应该出售的机票总数是多少？出售机票过多，航空公司就会承担为乘客换机的风险。出售过少，航空公司又会面对航班的乘坐率不高的窘境。

a. 假设航空公司决定出售 75 张折扣票，并且每次航班的出售机票总数是 120。使用 Crystal Ball 进行试验次数为 1000 的计算机仿真，预测利润、座位使用数和换机乘客数的概率分布。
b. 生成一张二维的决策表，其中给出两个决策变量下列值的所有组合的平均利润：(1)折扣机票数目位于 50 和 90 之间，并以 10 为步长；(2)机票总数是 112、117、122、127 或者 132。
c. 使用 OptQuest 尝试寻找最大化航空公司期望利润的最大折扣机票数和出售总机票数。

# 案例 16.1　行为投机

Adventure Toys 公司生产一系列的连环画，并且将它们以每单位 10 美元的批发价分销给玩具商店。此种连环画的需求具有季节性，在圣诞之前和春季销售额最高。夏季和冬季销售额最低。

每个月的月基本销售额都服从正态分布，其均值是前一个月的实际基本销售额，标准差是 500 单位。任意一个月的实际销售额是此月的基本销售额乘以这个月的季节因素，各月的季节因素已经在下表中列出。2002 年 12 月的基本销售额是 6000，实际销售额等于(1.18)(6000) = 7080。现在是 2003 年的 1 月 1 日。

| 月份 | 季节因素 | 月份 | 季节因素 |
|---|---|---|---|
| 1 月 | 0.79 | 7 月 | 0.74 |
| 2 月 | 0.88 | 8 月 | 0.98 |
| 3 月 | 0.95 | 9 月 | 1.06 |
| 4 月 | 1.05 | 10 月 | 1.10 |
| 5 月 | 1.09 | 11 月 | 1.16 |
| 6 月 | 0.84 | 12 月 | 1.18 |

现金销售额大概占到月销售额的 40%，但是这一数字在有些月份中最低可以达到 28%、最高可以达到 48%。除去现金支付外剩余的销售额在 30 天后无息支付，在发货后的一个月内全额收回。截止到 2002 年底，有 42% 的销售额已经收到现金，还有 58% 的份额还在挂账。

生产成本取决于劳动力和生产原料的成本。用来制造连环画的塑料价格每月都在波动，取决于市场状况。由于这些波动，每单位的生产成本平均分布在 6 美元和 8 美元之间。除了这些变动的生产成本以外，公司生产连环画的每月固定成本是 15000 美元。公司还会为订单包装产品。当一批特别的连环画被订购时，公司会在几天内生产和发运。

公司使用了 8 台造型机器来制造连环画。这些机器有时会发生故障，每次拆换零件的成本是 5000 美元。每台机器每月都会有 10% 的概率拆换故障零件。

公司规定每月末最小现金余额必须维持在 20000 美元以上。2002 年 12 月末(或者可以等价地认为是 2003 年 1 月初)的余额是 25000 美元。如果需要的话，公司会借用短期贷款(一个月的期限)来抵消费用从而可以维持最低余额。贷款必须在借款后以一定利率(使用当前的货币月利率)在 1 个月内偿还。例如，如果 3 月的年利率是 6%(也就是月利率为 0.5%)，并且在 3 月借款 1000 美元，那么在 4 月就应该还款 1005 美元。不过，每月内都可以借款。

月末的任意数量的余额(包括最低余额)都会直接进入下一个月的账户并且也计算存款的利息。例如，如果 3 月末的余额是 20000 美元，并且 3 月的存款年利率是 3%(也就是月利率为 0.25%)，那么在 4 月存款的利息是 50 美元。

贷款利率和存款利率都是基于基本利率而每月变动的。贷款利率设定在基本利率加2%，而存款利率则设定在基本利率减2%。无论如何，贷款利率不会超过9%，存款利率不会低于2%。

2002年12月的基本利率是年利率5%。这个利率取决于联邦储备委员会的决定。特别的是，每月的利率都有70%的概率会维持不变，10%的概率会增长25个基本点（即0.25%），10%的概率会降低25个基本点，5%的概率会增长50个基本点，5%的概率会降低50个基本点。

a. 在电子表格上构建一个仿真模型以跟踪查看公司每月的现金流。在电子表格上直接指出假设单元格的概率分布（分布的类型和参数）。使用Crystal Ball为2003年的现金流运行试验次数为1000的计算机仿真，并将你的结果粘贴在电子表格上。

b. 公司管理层想了解在2003年末公司的净资产是多少和净资产在0美元以上的概率的相关信息（这里的净资产定义为年末现金余额加上存款利息和应收账款减去贷款和所欠利息）。以各种形式显示问题a中的仿真运行结果，这将有助于管理层分析此问题。

c. 公司需要安排2003年从银行短期贷款。因此，公司管理层也希望得到2003年所需的最多短期贷款数额的有关信息。以各种形式显示问题a中的仿真运行结果，这将有助于管理层分析此问题。

# 案例16.2 压力下的定价问题

爱丽思·苏莉文在9月份搬到纽约居住，并开始了在第一银行顾客服务部的分析工作。第一银行是一家为全美的顾客提供经纪服务的大型投资银行。一到达纽约，她就开始脚踏实地工作了。前面6个星期是培训，在培训期间她遇到了很多像她一样的刚工作的新手，并学习了第一银行的基本会计业务，现金流分析，顾客服务以及联邦法规。

在培训之后，爱丽思搬到了第一银行在曼哈顿的40层高的办公室里，她的第一项任务是在直接上级员工的领导下进行的，因为这样她可以学到处理业务的一套程序。

现在她有机会展示自己的才华了，但是她的老板麦克·斯特曼给她安排了一项在自己控制下的任务。一位行为古怪、富有但是贪婪的投资者，名为艾美·波蓝德很想购买一个欧洲买方期权（Call Option），该期权将给予他在2月初（距今尚有12周）以44.00美元的价格购买菲雷尔（Fellare）公司的股份的权利。菲雷尔是一家法国的飞机制造商，而艾美先生强烈地感觉到欧洲太空公司在2月份建造国际空间站的合同会给他带来一部分收益。因为艾美认为如果太空公司与菲雷尔公司签订这一合同的话，该公司的股票会大涨。而如果没有签合同，该公司的股份会持续现在走低的趋势。为了保证收益，艾美不想直接购买该公司的股份。

麦克要求爱丽思为这一期权定价，他希望在今天的股市关闭之前得到结果，这样艾美就可以决定是否购买期权，从而进行交易。

不幸的是，爱丽思在大学里的投资科学课程中不包括期权这一内容，只介绍了如何估价、分析风险、预算资金以及市场的效益。她记得在估价时必须将2月1号的期权贴现才能算出现在的价格。现在要贴现12个星期，贴现的公式就可以表示为期权的价值/$(1+\text{周利率})^{12}$。在开始计算之前，她决定采用的年利率为8%。现在开始计算期权的现值。

爱丽思知道在2月1号艾美可能会采取两种行动，或者是执行期权购买菲雷尔公司的股票，如果说该公司的股票高于他现在投资的价格44美元的话。在这种情况下，艾美买入股票价为44美元，而卖出的价格是2月1号的市场价。期权的价格就应该是这一市场价与执行价的差值。而如果市场价低于执行价44美元的话，艾美就不会执行期权，期权的价格为0。

这样期权的价格是由菲雷尔公司股票在2月1号的价值所决定的，爱丽思知道市场上股票的价格是不稳定的，服从一定的概率分布。她回想起管理科学课上学到的用来估计股票价格分布的计算机仿真技术。在建模之前，爱丽思又记起在统计课上介绍说股票的价格或涨或跌，遵循的是一种偏正态分布。因此根据这一模型，下一周的股票价格是这一周的股票价格再乘上一个增长因子。增长因子为e的$N$次幂，$N$为服从正态分布的变量。可以表示为：

$$s_n = e^N S_c$$

其中

$s_n$ = 下周的股票价格
$s_c$ = 本周的股票价格
$N$ = 正态分布的随机变量

爱丽思从报纸上查到菲雷尔公司股票现在价格为 42 美元，她打算以此作为整个分析的基础。这样，下一周的股票价格就是在这一股票价格上乘上一个增长因子。下一步，需要估计出用于计算增长因子的正态分布的均值和标准差。这一随机变量决定了股票变动的幅度，因此，爱丽思决定用现在的年利率和股票一年的变动情况的历史记录作为基础估算出均值和标准差。

目前的年利率为 8%，记录的航空股票年变动量为 30%。但现在爱丽思要计算的是每周的情况而不是一年的情况，为了估算出决定每周股票价格的增长因子的均值和标准差，就必须先算出每周的利率以及每周股票的变动率。为了得到每周利率 $w$，计算公式如下所示：

$$w = (1+r)^{(1/52)} - 1$$

记录的每周股票的变动率为年变动率的 52 次方根，而正态分布的均值如下计算出：

$$均值 = w - 0.5(每周股票的变动率)^2$$

正态分布的标准差就等于每周股票的变动率。现在可以建模了。

1. 描述系统的各个组成部分，以及相互之间的关系。
2. 定义系统的状态。
3. 描述一种产生随机观察数的方法。
4. 描述改变系统状态的方法。
5. 描述推进仿真时钟的程序。
6. 建立仿真模型估计现在期权的价格。

a. 在电子表格上建立一个仿真模型，计算期权当天的价值。使用 Crystal Ball 独立运行三次仿真估计出现的期权的价格，第一次仿真运行 100 次试验，第二次 500 次试验，第三次 1000 次试验。记录下每一次仿真所得的期权价格。

b. 爱丽思将她的结果交给麦克看，麦克很是赞赏，但同时表示可以用一种简单的封闭式的方法计算期权的现值——布兰克—斯科尔斯(Black-Scholes)公式。麦克从书架上抽出一本书来，说明这种功能强大而复杂的公式：

$$V = N[d_1]P - N[d_2]\text{PV}[K]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[P/PV[K]]}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$N[x]$ = Excel 函数 NORMSDIST($x$)，其中：

$$x = d_1 \text{ 或 } d_2$$

$P$ = 股票的现值

$K$ = 执行价

$\text{PV}[K]$ = 执行价的现值 $= \dfrac{K}{(1+w)^t}$

$t$ = 到执行期的周数

$\sigma$ = 每周股票的变动率

运用这一公式计算期权的现值，将得到的结果与 a 中的结果相比较。

c. 在这一例子中，你是否认为这一随机的概率分布能够完全反映出股票价格的变动？为什么？

APPENDIX

# A 部分习题答案

## 第 2 章

2.8. d.

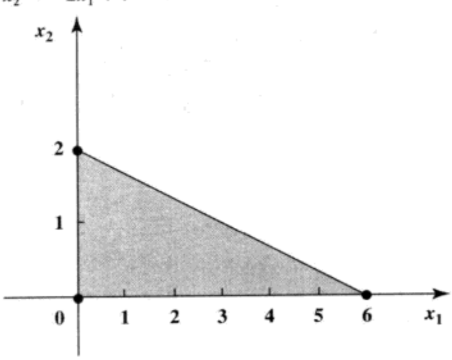
| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 每单位数量的活动使用的资源量 | | | | | |
| 2 | | 活动 | | | | |
| 3 | 资源 | 1 | 2 | 总计 | | 可用资源 |
| 4 | 第一部分 | 1 | 0 | 0.667 | ≤ | 1 |
| 5 | 第二部分 | 0 | 1 | 0.667 | ≤ | 1 |
| 6 | 资金 | 5000 | 4000 | 6000.0 | ≤ | 6000 |
| 7 | 工作时数 | 400 | 500 | 600 | ≤ | 600 |
| 8 | 单位利润 | 4500 | 4500 | $6000 | | |
| 9 | 方案 | 0.667 | 0.667 | | | |

2.13. a. 如果 $x_2=0$，则 $x_1=2$。如果 $x_1=0$，则 $x_2=4$。

c. 斜率 $=-2$

d. $x_2=-2x_1+4$

2.16. a.




2.21. b.

| | 斜截形式 | 斜率 | $x_2$ 截距 |
|---|---|---|---|
| 利润 = 6 | $x_2=-\frac{2}{3}x_1+2$ | $-\frac{2}{3}$ | 2 |
| 利润 = 12 | $x_2=-\frac{2}{3}x_1+4$ | $-\frac{2}{3}$ | 4 |
| 利润 = 18 | $x_2=-\frac{2}{3}x_1+6$ | $-\frac{2}{3}$ | 6 |

2.25. $x_2=-\frac{8}{5}x_1+8$

2.29. b. $x_1=13, x_2=5$,利润 = 31 美元

2.40. b. $x_1=2, x_2=4$,成本 = 110 美元

## 第 3 章

3.2. d. 0 只茶几、40 只矮茶几和 30 只餐桌,利润为 10600 美元

3.4. e. 参与 19% 的 A 项目,完全参与 C 项目,不参与 B 项目;期末余额 59.5(百万美元)

3.6. d. 8AM ~ 4PM:4 个 FT(全职员工);12PM ~ 8PM:4 个 FT;4PM ~ 午夜:4 个 FT;8AM ~ 12AM:2 个 PT(兼职员工);12PM ~ 4PM:0 个 PT;4PM ~ 8PM:4 个 PT;8PM ~ 午夜:2 个 PT。每天总成本为 1728 美元。

## 第 4 章

4.2. c. 3.333 单位活动 1,3.333 单位活动 2,利润为 166.67 美元。

4.5. d. 26 单位产品 1,54.76 单位产品 2,20 单位产品 3,利润为 2904.76 美元。

4.10. d. 1.14 千克玉米,2.43 千克苜蓿。成本为 2.42 美元。

4.15. b. 成本为 410000 美元。

| 送货量 | 客户 1 | 客户 2 | 客户 3 |
|---|---|---|---|
| 工厂 1 | 300 | 0 | 100 |
| 工厂 2 | 0 | 200 | 300 |

4.17. c. 60000 美元用于投资 A(第一年),84000 美元用于投资 A(第三年),117600 美元用于投资 D(第五年)。第六年总计 152880 美元。

4.20. a. 利润为 13330 美元。

| 载货分配 | 前　厢 | 中　厢 | 后　厢 |
|---|---|---|---|
| 货物 1 | 0 | 5 | 10 |
| 货物 2 | 7.333 | 4.167 | 0 |
| 货物 3 | 0 | 0 | 0 |
| 货物 4 | 4.667 | 8.333 | 0 |

## 第 5 章

5.1. f. 生产玩具的单位利润可行变化范围为:2.50 美元至 5.00 美元。生产配件的单位利润可行变化范围为 -3.00 美元至 -1.50 美元。

5.4. f. (变动 a):最优解不变(成本在可行范围内增加 10 美元)。
(变动 b):最优解改变(成本比可行范围下降 5 美元)。
(变动 c):变动 a 和 b 同时发生,最优解可能变化也可能不变化。

$$C_{8AM}: 160\text{ 美元}\rightarrow 165\text{ 美元},\text{可行增量范围} = 100\left(\frac{165-160}{10}\right) = 50\%$$

$$C_{4PM}: 180\text{ 美元}\rightarrow 170\text{ 美元},\text{可行增量范围} = 100\left(\frac{180-170}{5}\right) = 200\%$$

$$\text{总和} = 250\%$$

5.8. a. 生产 2000 件玩具和 1000 套配件,获利 3500 美元。
b. 配件 A 的影子价格为 0.50 美元,该价格是公司愿意支付的最高价格。

5.12. a. 每增加 1000 美元的广告预算,总感知量增加 3000。

b. a 中的感知量在预算增加到 2500 美元前保持不变。

e. 广告预算和规划预算同时变化,影子价格依然有效(以千美元计):

$C_A$:4000 美元→4100 美元,可行增量范围 $= 100\left(\frac{4100-4000}{250}\right) = 40\%$

$C_P$:1000 美元→1100 美元,可行增量范围 $= 100\left(\frac{1100-1000}{450}\right) = 22\%$

总和 = 62%

## 第 6 章

6.5. 今天从哈里处购买 3 品脱,明天从迪克处购买 4 品脱。总成本 = 19.50 美元。

6.19. b. A - 2, B - 4, C - 3, D - 1。总成本 20 美元。

6.22. b. 戴维—仰泳,托尼—蛙泳,柯里斯—蝶泳,卡尔—自由泳。总时间为 126.20 秒。

## 第 7 章

7.1. c. 0 S1-D1, 10 S1-D2, 30 S1-D3, 30 S2-D1, 30 S2-D2, 0 S2-D3。总成本为 580 美元。

7.4. c. 2187000 美元。

7.7. 最大流为 15。

7.12. b. 1 年后置换。总成本为 29000 美元。

7.15. 连接:B-C, E-F, C-D, A-B, C-F, E-G。总成本为 18000 美元。

## 第 8 章

8.2. c. AFK, AGHIJ, BCHIJ。

8.5. c. BEJM, CGLN。

8.8. ABCEFJKN。总工期为 26 周。

8.10. $\mu = 37, \sigma^2 = 9$。

8.14. b. ACEF。长度为 51 天。

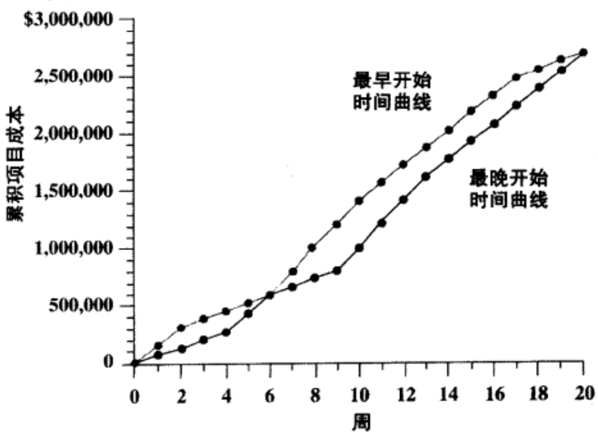
c. 0.9772。

d. 0.9192。

8.20. b. 活动 B 应急时间 1 周,活动 C 应急时间 2 周,活动 D 应急时间 1 周,活动 E 应急时间 2 周。节省 7834 美元。

8.21. 活动 A 应急时间 2 周,活动 B 应急时间 1 周,活动 G 应急时间 1 周,活动 H 应急时间 1 周。总成本 217 美元。

8.24. d.




e. 项目经理需要重视活动 D,因为活动 D 没有按时完成并且超支。

## 第9章

9.3. a. 最优解$(x_1,x_2)=(2,3)$，$P=13$。

9.5. a. 采购14架远程飞机，16架短程飞机，不采购中程飞机。利润为9560万美元。

9.9. b. 伊伍负责购物和洗碗，史蒂夫负责做饭和洗衣服。总时间为18.4小时。

9.13. 生产2000单位的产品2。总收入为80000美元。

9.17. 生产45单位的产品1，31单位的产品2。

9.19. 最优路径为OADT。总距离为10英里。

## 第10章

10.6. c. 投资46667美元于股票1，3333美元于股票2，预期收益为13000美元。投资33333美元于股票1和16667美元于股票2，预期收益为15000美元。

10.10. d. 朵伟恩公司应该生产1单位窗和1单位门。

## 第11章

11.1. L7的系数是K7系数的3倍。

11.3. a. 生产15单位的产品3。

## 第12章

12.4. a. 投机投资。

b. 逆循环投资。

12.6. b. $A_3$

c. $A_2$

12.11. a. $A_1$

b. 18美元

12.15. d. EVPI=3000美元。无需借助于信贷评定组织。

12.20. c. 选择自己制造电脑（期望收益为2700万美元）。

f. 如果$P\leqslant 0.722$选择自己制造电脑。如果$P>0.722$则选择销售电脑。

12.21. a. EVPI=750万美元

c. P（卖出10000台|预期卖出10000台）=0.667。

P（卖出100000台|预期卖出100000台）=0.667。

12.22. 最优选择是不作市场调研而制造电脑。

12.25. c. 800000美元

f,g. 里兰德大学应该雇用威廉。当他预测本年度将会获胜，那里兰德大学将组织运动当他预测本年度将会失利，那里兰德大学将不组织运动。

12.29. a. 选择新产品上市（期望收益为1250万美元）。

b. 750万美元。

c. 最优选择是不用试销而推出新产品。

f. 两个图都表明期望收益对参数敏感，但是当胜利的时候期望收益对利润变化的敏感程度大于当失利的时候期望收益对损失变化的敏感程度。

12.33. a. 选择不买保险（期望收益为249840美元）。

b. 选择购买保险（期望收益为499.82美元）。

12.35. 9

## 第13章

13.1. a. 39
b. 26
c. 36
13.3. MAD = 15
13.8. 2091
13.12. 当 $\alpha = 0.1$，预测 = 2072。
13.15. 552
13.17. b. MAD = 5.18
c. MAD = 3
d. MAD = 3.93
13.29. 62%
12.35. b. $y = 410 + 17.6x$
d. 604

## 第14章

14.3 a. 正确
b. 错误
c. 正确
14.8 a. $L = 2$
b. $L_q = 0.375$
c. $W = 30$ 分钟 $W = 5.625$ 分钟
14.11. a. 96.6%的时间
14.14. b. $L = 0.333$
g. 两位成员
14.17. $L_q$ 未变而 $W_q$ 减半。
14.21. a. $L = 30$
d. TC（现状）= 85 美元/小时
TC（建议）= 73 美元/小时
14.23. a. 在当前策略下，一架飞机将损失 1 天的飞行时间，而在建议的策略之中将损失 3.25 天。
b. 在当前策略下，平均每天有一架飞机在损失飞行时间，而在建议策略之中是 0.8125 架飞机。
14.28. a. 0.211 小时
b. 约 3.43 分钟
14.33. c. 0.4
d. 7.2 小时
14.37. 吉姆可以开放 4 个收银台。每小时期望成本为 80.59 美元。

## 第15章

15.1. b. 让从 0.0000 到 0.5999 的数字对应打击，从 0.6000 到 0.9999 的数字对应球。对于投掷的随机观测为 0.3039 = 打击，0.7914 = 球，0.8543 = 球，0.6902 = 球，0.3004 = 打击，0.0383 = 打击。

15.5. a. 这里有一个样本副本：

| 结果总结 | |
|---|---|
| 赢？（1＝是,0＝否） | 0 |
| 投掷的次数＝ | 3 |

**模拟投掷**

| 投掷 | 骰子 1 | 骰子 2 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 6 |
| 2 | 3 | 2 | 5 |
| 3 | 6 | 1 | 7 |
| 4 | 5 | 2 | 7 |
| 5 | 4 | 4 | 8 |
| 6 | 1 | 4 | 5 |
| 7 | 2 | 6 | 8 |

**结　果**

| 赢? | 输? | 继续? |
|---|---|---|
| 0 | 0 | Yes |
| 0 | 0 | Yes |
| 0 | 1 | No |
| NA | NA | No |
| NA | NA | No |
| NA | NA | No |
| NA | NA | No |

15.7. b. 当 $x=-5.18$ 时，$F(x)=0.0965$。
当 $x=18.46$ 时，$F(x)=0.5692$。
当 $x=23.29$ 时，$F(x)=0.6658$。

15.9. a. 让从 0.0000 到 0.3999 的数字来对应小修，从 0.4000 到 0.9999 的数字对应大修。那么平均修理时间为 $(1.224+0.950+1.610)/3=1.26$ 小时。
c. 平均修理时间为 1.28 小时。
d. 平均修理时间为 1.09 小时。

15.12. a. $x=\sqrt{r}$
d. SQRT(RAND())

15.18. b. 平均等待时间为 1 天。
c. 平均等待时间为 0.33 天。

## 第 16 章

16.3. a. 三角分布（最小值为 293.51，最可能值为 501.00，最大值为 599.72）。

16.7. a. 平均项目完成时间为 33 个月。
c. 活动 B 和 J 对项目完成时间的影响最大。

16.15. a. 平均利润约为 107 美元，利润大于等于 0 美元的可能性为 96.5%。

［General Information］
书名＝数据、模型与决策：运用电子表格建模与案例研究　（第二版）
作者＝（美）弗雷德里克·S·希利尔（Frederick S. Hillier），（美）马克·S·希利尔（Mark S. Hillier）著；任建标译
页数＝783
SS号＝11900241
出版日期＝2004.01
出版社＝北京市：中国财政经济出版社
SSLIB-JPG=http://img2.5read.com/image/ss2jpg.dll?did=b59&pid=4C88B61CE75FFD8BE0600DA98B14422A7184065F7B2F1682956EE6E793DB41F66E56035530CC8A4F98D771930075 3CB81C475AA4D6F96B583A8E60C735BFB361C82C59F20CF58069DB531359F2F179C5478B9A29033E755095F6F54D0E9F37676567 5E3D5D0DDB64638BD1645CCAE6BB444C&jid=/